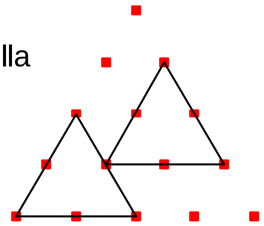
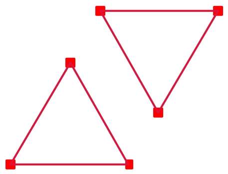
Problemes de Geometria per a l'ESO 69

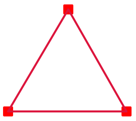
681.- Siga una graella isomètrica (triangles equilàters) de claus a una distància 1 cm d'un a l'altre com indica l'esquema.
Amb elàstics es formen triangles equilàters de 2 cm de costat. (en la graella s'han dibuixat dos triangles).
Quants triangles equilàters diferents són possibles si la graella té n claus per costat del triangle equilàter.
Crux Mathematicorum M513

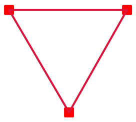


Solució:
Hi ha dos formes distintes de presentar-se els triangles:



Suposem que hi ha n claus per costat.

En la posició  hi ha:
$1+2+3+......+(n-2)$ triangles.

En la posició  hi ha:
$1+2+3+......+(n-4)$ triangles.

En total hi ha:
$T_n = (1+2+3+......+(n-2)) + (1+2+3+......+(n-4))$.

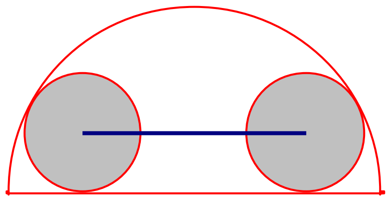
Sumant els termes de les dues progressions aritmètiques:

$$T_n = \left(\frac{1+n-2}{2}(n-2)\right) + \left(\frac{1+n-4}{2}(n-4)\right).$$

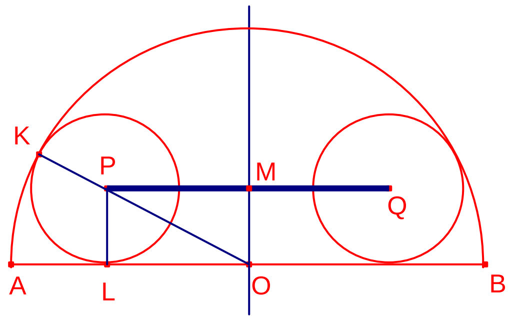
$$T_n = \left(\frac{n^2-3n+2}{2}\right) + \left(\frac{n^2-7n+12}{2}\right).$$

$T_n = n^2 - 5n + 7$ on n és el nombre de claus per costat.

682.- Dos cercles de radi 8 estan en l'interior d'un semicercle de radi 25.
Els dos cercles són tangent al diàmetre i al semicercle.
Determineu la distància entre els centres dels dos cercles.



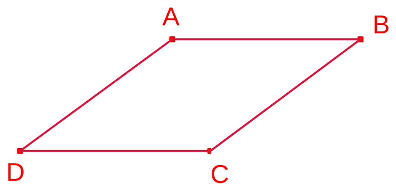
Solució:
Siguen P i Q en centre dels cercles.
Siga $d=\overline{PQ}$, distància entre els centres dels dos cercles.
Els dos cercles són simètrics respecte de la mediatriu del diàmetre $\overline{AB}$ de la semicircumferència.
Siga M el punt mig del segment $\overline{PQ}$.
$\overline{PM}=\frac{d}{2}$.



Siga $\overline{OA}=25$ radi de la semicircumferència.
Siguen K, L els punts de tangència del cercle de centre P i la semicircumferència i el diàmetre, respectivament.
$\overline{PL}=\overline{PK}=8$.
$\overline{OP}=25-8=17$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMP}$:
$\left(\frac{d}{2}\right)^2+8^2=17^2$. Resolent l'equació:
$d=30$.

683.- Siga ABCD un rombe de costat 10 i àrea 60.
Calculeu la mesura de les diagonals.



Solució 1:
Cadascuna de les diagonals divideix el rombe en dos triangles iguals.
Siga x una de les diagonals.
L'àrea del rombe és igual a dues vegades l'àrea del triangle de costats 10, 10, x.
Aplicant la fórmula d'Heró:

$$2\frac{\sqrt{(10+10+x)(-10+10+x)(10-10+x)(10+10-x)}}{4}=60\,.$$

$$x\sqrt{400-x^2}=120\,.$$

Elevant al quadrat:

$$x^4-400x^2+14400=0\,.$$

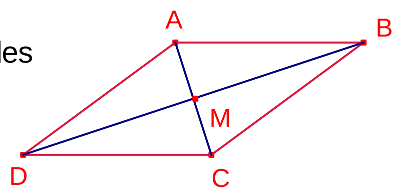
Resolent l'equació:

$$x=6\sqrt{10}\,,\ \ x=2\sqrt{10}\,.$$

La diagonal major és $\overline{BD}=6\sqrt{10}$ i la diagonal menor $\overline{AC}=2\sqrt{10}$.

Solució 2:
Siga $D=\overline{BD}$ diagonal major del rombe.
Siga $d=\overline{AC}$ diagonal menor del rombe.
Les diagonals d'un rombe divideixen en rombe en 4 triangles rectangles iguals.
Siga M la intersecció de les diagonals.

$$\overline{BM}=\frac{d}{2},\ \ \overline{AM}=\frac{d}{2}.$$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMB}$:

$$\left(\frac{d}{2}\right)^2+\left(\frac{D}{2}\right)^2=10^2\,.$$

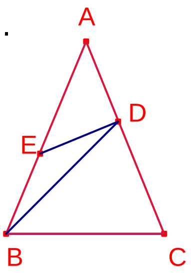
L'àrea del rombe és:

$$\frac{Dd}{2}=60\,.$$

Considerem el sistema format per les dues expressions anteriors:

$$\begin{cases}\dfrac{d^2}{4}+\dfrac{D^2}{4}=100\\[2mm] \dfrac{Dd}{2}=60\end{cases}\ .\ \text{Resolent el sistema: } \begin{cases}D=6\sqrt{10}\\ d=2\sqrt{10}\end{cases}.$$

684.- En el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de la figura $\overline{AB}=\overline{AC}$, $\overline{BC}=\overline{BD}$, $\overline{AD}=\overline{DE}=\overline{EB}$.
Calculeu l'angle A.



Solució:
Siga $\alpha=\angle CBD$, $\beta=\angle DBA$.

Per ser $\overset{\Delta}{ABC}$ isòsceles:
$C=\alpha+\beta$.

Per ser $\overset{\Delta}{BCD}$ isòsceles:
$\angle BDC=\alpha+\beta$.

Els angles del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ sumen 180º, aleshores:
$3\alpha+2\beta=180^{o}$ (1)

Per ser $\overset{\Delta}{BDE}$ isòsceles:
$\angle BDE=\beta$.
$\angle AED=2\beta$.

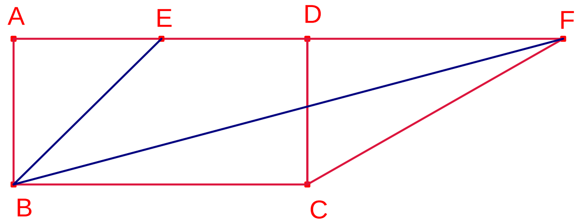
Per ser $\overset{\Delta}{ADE}$ isòsceles:
$A=2\beta$.

Els angles del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ sumen 180º, aleshores:
$2\alpha+4\beta=180^{o}$ (2)
Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):
$\begin{cases}3\alpha+2\beta=180^{o}\\ 2\alpha+4\beta=180^{o}\end{cases}$. Resolent el sistema:
$\begin{cases}\alpha=45^{o}\\ \beta=\dfrac{45^{o}}{2}\end{cases}$.
Aleshores, $A=2\beta=45^{o}$.

685.- Siga un rectangle ABCD tal que $\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{BC}$.

A l'exterior del rectangle dibuixem el triangle $\overset{\Delta}{DCF}$ tal que $\angle DFC = 30^{o}$ i A, D, F alineats.

Siga E el punt mig del costat $\overline{AD}$.
Determineu la mesura de l'angle $\angle EBF$.
Crux Mathematicorum M261.



Solució:
Per ser A, D, F alineats, $\angle CDF = 90^{o}$.
Aleshores, $\angle DCF = 60^{o}$.
Per tant, $\overline{CF} = 2\overline{CD}$.
Per hipòtesi $\overline{BC} = 2\overline{CD}$.

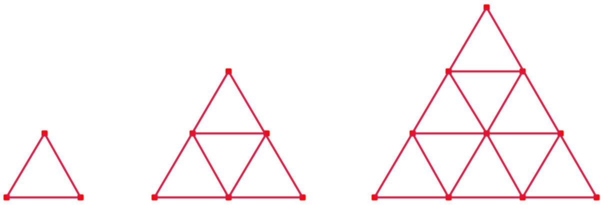
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{BCF}$ és isòsceles.

$\angle BCF = 90^{o}+60^{o} = 150^{o}$, Per tant, $\angle CBF = \frac{180^{o}-150^{o}}{2} = 15^{o}$.

El triangle $\overset{\Delta}{BAE}$ és rectangle i isòsceles, aleshores:
$\angle ABE = 45^{o}$.
$\angle EBF = \angle ABC - (\angle ABE + \angle CBF) = 90^{o}-(45^{o}+15^{o}) = 30^{o}$.

686.- Disposem de 1000 triangles equilàters de costat 1cm i volem construir un mosaic en forma de triangle equilàter.
Quin és el costat més gran del triangle equilàter que es pot formar?
Quantes peces sobren?.

Solució:



1^2 2^2 3^2

El nombre de triangles que es necessiten per fer un triangle equilàter formen una successió de nombres quadrats:

$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, ...$

El terme general és $t_n = n^2$ on n és la mesura del costat (nombre de triangles que formen la base).

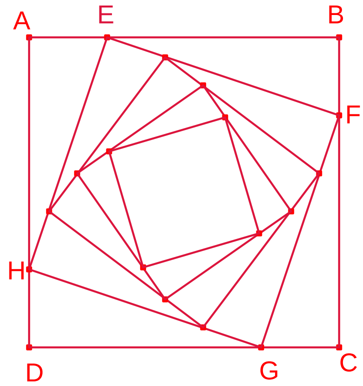
$n^2 \leq 1000$. Resolent la inequació:

$n \leq \left\lfloor \sqrt{1000} \right\rfloor = 31$.

El costat del triangle més gran mesura 31cm.

Sobren $1000 - 31^2 = 39$ triangles equilàters de costat 1cm.

687.- A partir del quadrat ABCD de costat c construïm el quadrat EFGH tal que $\overline{AE} = \frac{1}{4}\overline{AB}$.
A partir del quadrat EFGH en construïm un altre amb el mateix procediment, i així successivament.
Determineu la mesura dels costats dels quadrats formats.
Determineu l'àrea dels quadrats formats.
Determineu la suma de les àrees dels infinits quadrats.



Solució:
Siga $\{c_i\}$ successió dels costats.
$c_1 = c$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AEH}$:

$$c_2 = \overline{HE} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}c\right)^2 + \left(\frac{3}{4}c\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{4}c.$$

$$c_3 = \sqrt{\left(\frac{1}{4}c_2\right)^2 + \left(\frac{3}{4}c_2\right)^2} = \frac{c_2}{4}\sqrt{10} = \frac{\sqrt{10}}{4}\frac{\sqrt{10}}{4}c.$$

Els costats formen un progressió geomètrica de primer terme c i raó $\frac{\sqrt{10}}{4}$.
El terme general és:

$$c_n = \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^{n-1} c.$$

Siga $\{S_n\}$ la successió de les àrees dels quadrats.
La successió de les àrees el seus termes són els quadrats dels elements de la successió dels costats.
Aleshores les àrees formen un progressió geomètrica de primer terme c^2 i raó

$$r = \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}.$$

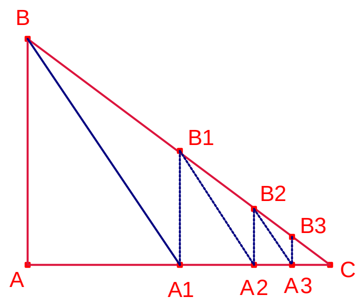
El terme general de les àrees és:

$$S_n = \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} c^2.$$

Notem que $-1 < r < 1$, aleshores la successió de les àrees té suma infinita.
La suma de les infinites àrees dels quadrats és:

$$S = \frac{S_1}{1-r} = \frac{c^2}{1-\frac{5}{8}} = \frac{8}{3}c^2.$$

688.- En el dibuix $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle rectangle de catets $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=4$.
$\overline{A_iB_i}$ és perpendicular a $\overline{AC}$. A_1 és el punt mig de $\overline{AC}$ i A_{i+1} és el punt mig del segment $\overline{A_iC}$.
Determineu la suma dels infinits segments diagonals:
$\overline{BA_1}+\overline{B_1A_2}+\overline{B_2A_3}+......$



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABA_1}$:

$$\overline{BA_1}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{10}.$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABA}$, $\overset{\Delta}{A_1B_1C}$ són semblants i la raó és 2:1

$$\overline{A_1B_1}=\frac{1}{2}\overline{AB}.$$

$\overline{A_1A_2}=\frac{1}{2}\overline{A_1C}=\frac{1}{2}\overline{AA_1}$, aleshores:

els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABA_1}$, $\overset{\Delta}{A_1B_1A_2}$ són semblants i la raó és 2:1

$$\overline{B_1A_2}=\frac{1}{2}\overline{BA_1}.$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{A_iB_iA_{i+1}}$, $\overset{\Delta}{A_{i+1}B_{i+1}A_{i+2}}$ són semblants i la raó és 2:1

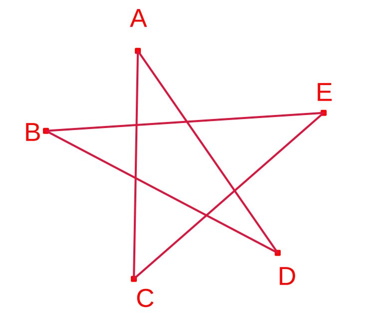
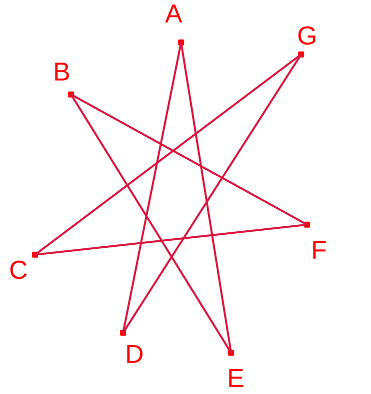
$\overline{BA_1}, \overline{B_1A_2}, \overline{B_2A_3}$,...... formen una progressió geomètrica de primer terme:

$\overline{BA_1}=\sqrt{10}$ i raó $r=\frac{1}{2}$.

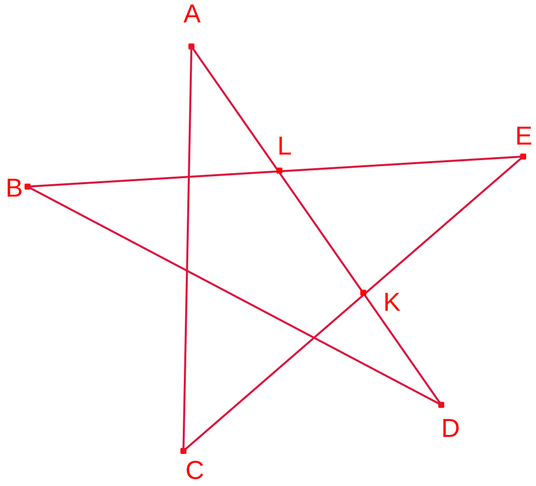
Notem que $-1<r<1$ aleshores, té suma infinita.
La suma infinita és:

$$L=\frac{\overline{BA_1}}{1-r}=\frac{\sqrt{10}}{1-\frac{1}{2}}=2\sqrt{10}.$$

689.-
a) Calculeu la suma dels angles d'un pentàgon estelat.
b) Calculeu la suma dels angles d'un heptàgon estelat.

	
Pentàgon estelat	Heptàgon estelat

Solució:
a)



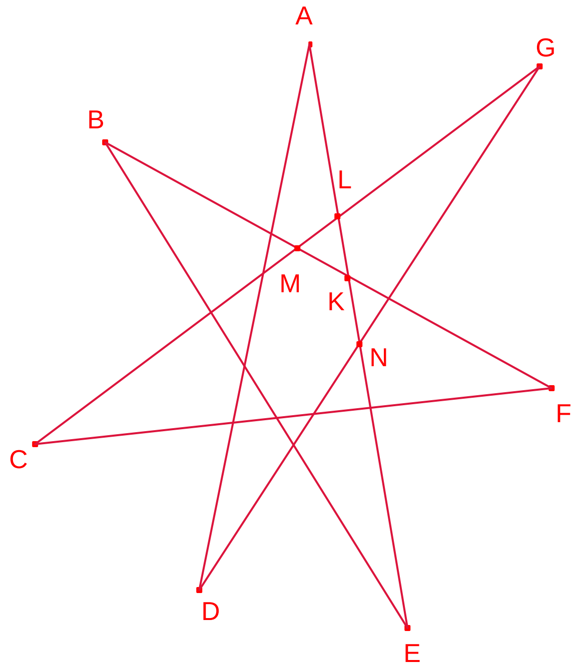
Siga K la intersecció dels segments $\overline{AD}$ i $\overline{CE}$.
Siga L la intersecció dels segments $\overline{BE}$ i $\overline{AD}$.

Considerant el triangle $\overset{\Delta}{ACK}$:
$\angle LKE = A + C$.

Considerant el triangle $\overset{\Delta}{BLD}$.
$\angle ELK = B + D$.

La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{KLE}$ és 180º.
Aleshores, $A + B + C + D + E = 180^{o}$.

b)



Siga K la intersecció dels segments $\overline{AE}$ i $\overline{BF}$.
Siga L la intersecció dels segments $\overline{AE}$ i $\overline{CG}$.
Siga M la intersecció dels segments $\overline{BF}$ i $\overline{CG}$.
Siga N la intersecció dels segments $\overline{AE}$ i $\overline{DG}$.

Considerant el triangle $\overset{\Delta}{BEK}$:
$\angle MKL = B + E$.

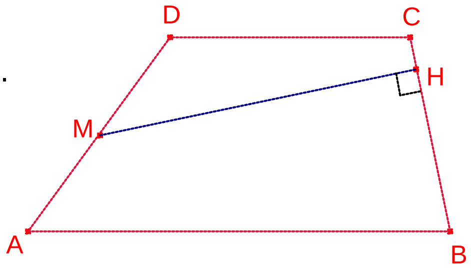
Considerant el triangle $\overset{\Delta}{CFM}$:
$\angle LMK = C + F$.

Considerant el triangle $\overset{\Delta}{LMK}$:
$\angle GLN = B + E + C + F$.

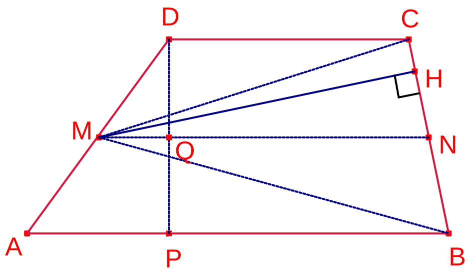
Considerant el triangle $\overset{\Delta}{ADN}$:
$\angle LNG = A + D$.

La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{LNG}$ és 180º.
Aleshores, $A + B + C + D + E + F + G = 180^{o}$.

690.- Siga ABCD un trapezi de costats paral·lels $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ i àrea 24cm^2.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AD}$.
Siga H el punt del costat $\overline{BC}$ tal que $\overline{MH}$ és perpendicular a $\overline{CB}$.
Calculeu $\overline{BC}\cdot\overline{MH}$.



Solució:
Siga N el punt mig del costat $\overline{CB}$. $\overline{MN}$ és la paral·lela mitjana del trapezi.
Siga $\overline{DP}=h$ altura del trapezi ABCD.
Siga Q la intersecció de $\overline{MN}$, $\overline{DP}$, aleshores:
$\overline{DQ}=\overline{PQ}=\frac{h}{2}$.
L'àrea del trapezi ABCD és:
$\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}h$.
L'àrea del trapezi ABCD és igual a la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ABM}$, $\overset{\Delta}{CDM}$ i $\overset{\Delta}{BCM}$.



$$\frac{\overline{AB}\cdot\frac{h}{2}}{2}+\frac{\overline{CD}\cdot\frac{h}{2}}{2}+\frac{\overline{BC}\cdot\overline{MH}}{2}=24.$$
$$\frac{1}{2}\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}h+\frac{\overline{BC}\cdot\overline{MH}}{2}=24.$$
$$\frac{1}{2}24+\frac{\overline{BC}\cdot\overline{MH}}{2}=24.$$
Aleshores, $\overline{BC}\cdot\overline{MH}=24\text{cm}^2$.

Nota Si H pertany a la prolongació del costat el resultat és el mateix.