

61.- Donat el trapezi isòsceles ABCD de costats paral·lels \overline{AD} , \overline{BC} , tal que $\overline{AB} = \overline{CD} = a$, $\overline{AC} = \overline{BD} = b$, $\overline{BC} = c$. Siga M un punt qualsevol de l'arc BC de la circumferència circumscrita al trapezi. Calculeu $\frac{\overline{BM} + \overline{MC}}{\overline{AM} + \overline{MD}}$.

Shariguin 1182.

Solució:

Aplicant el teorema de Tolomeu al quadrilàter inscrivible BMCD:

$$a \cdot \overline{BM} + b \cdot \overline{MC} = c \cdot \overline{MD} \quad (1)$$

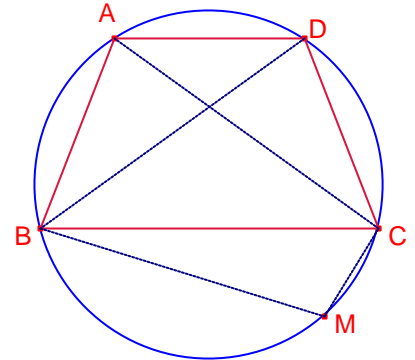
Aplicant el teorema de Tolomeu al quadrilàter inscrivible BMCA:

$$b \cdot \overline{BM} + a \cdot \overline{MC} = c \cdot \overline{AM} \quad (2)$$

Sumant les expressions (1) (2)

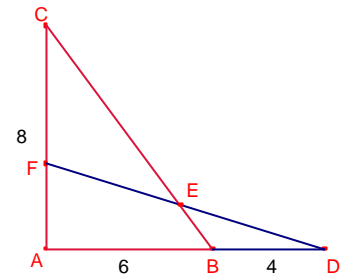
$$(a + b)(\overline{BM} + \overline{MC}) = c(\overline{AM} + \overline{MD}).$$

$$\text{Aleshores, } \frac{\overline{BM} + \overline{MC}}{\overline{AM} + \overline{MD}} = \frac{c}{a + b}.$$



62.-Siga el triangle rectangle $\triangle ABC$ de la figura i D un punt en la prolongació del costat \overline{AB} .

Calculeu la mesura del segment \overline{DF} si l'àrea del triangle $\triangle CFE$ és la meitat de l'àrea del triangle $\triangle ABC$. $\overline{AB} = 6$, $\overline{AC} = 8$, $\overline{BD} = 4$.
García Ardura 2. prob. 765.



Solució:

L'àrea del triangle $\triangle ABC$ és $S_{ABC} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$.

Aleshores $S_{CFE} = \frac{24}{2} = 12$.

Siga $x = \overline{AF}$

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

Siga S l'àrea del triangle $\triangle AEF$, T l'àrea del triangle $\triangle ABE$.

Els triangle $\triangle AEF$, $\triangle CFE$ tenen la mateixa altura, aleshores,

$$\frac{S}{12} = \frac{x}{8-x} \quad (1)$$

Els triangle $\triangle ABE$, $\triangle ADE$ tenen la mateixa altura, aleshores,

$$\frac{S_{ADE}}{T} = \frac{10}{6} \cdot S_{ADE} = \frac{5}{3}T$$

L'àrea del triangle $\triangle ADF$ és $S_{ADF} = \frac{10x}{2} = 5x$.

$$S_{ADF} = S_{AEF} + S_{ADE} \cdot$$

$$S + \frac{5}{3}T = 5x \quad (2)$$

$$S_{ABEF} = \frac{1}{2}S_{ABC}, S_{ABEF} = S_{AEF} + S_{ABE} \cdot$$

$$S + T = 12 \quad (3)$$

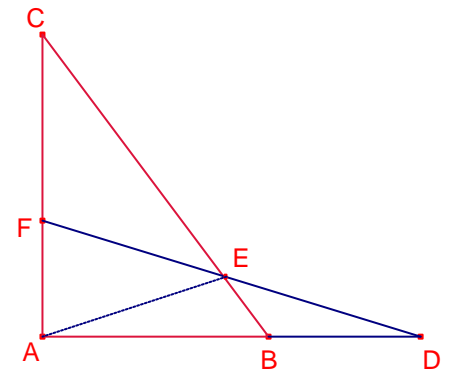
Considerem el sistema format per les expressions (1) (2) (3):

$$\begin{cases} 8S - xS - 12x = 0 \\ 3S + 5T - 15x = 0 \\ S + T = 12 \end{cases}$$

$$\text{La solució del qual és: } \begin{cases} x = \frac{34 - 2\sqrt{89}}{5} \\ S = 3\sqrt{89} \\ T = 33 - 3\sqrt{89} \end{cases}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ADF$:

$$\overline{DF} = \sqrt{10^2 + x^2} = \sqrt{10^2 + \left(\frac{34 - 2\sqrt{89}}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{4012 - 136\sqrt{89}}}{5}$$



63.- Les diagonals d'un trapezi rectangle són perpendiculars. Demostreu que l'altura del trapezi és mitja geomètrica de les bases.

Gúsiév 449.

Solució:

Siga el trapezi ABCD \overline{AB} , paral·lel a \overline{CD} , $\angle DAB = 90^\circ$.

Siga O la intersecció de les diagonals.

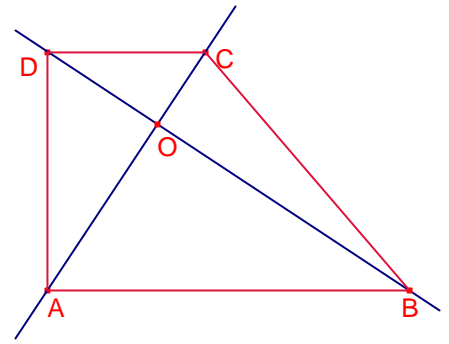
Siga $\alpha = \angle DAC$.

Per ser les diagonals perpendiculars:

$\angle ABO = \alpha$.

Per ser \overline{AB} , \overline{CD} paral·lels:

$\angle BDC = \alpha$.



Els triangles rectangles $\triangle ABO$, $\triangle DOA$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OD}}{\overline{AD}} \quad (1)$$

Els triangles rectangles $\triangle DOC$, $\triangle AOD$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{AD}} \quad (2)$$

Multiplicant les expressions (1) (2):

$$\frac{\overline{OA} \cdot \overline{OD}}{\overline{AB} \cdot \overline{CD}} = \frac{\overline{OD} \cdot \overline{OA}}{\overline{AD}^2}.$$

Aleshores, $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AD}^2$, és a dir, l'altura del trapezi és mitjana geomètrica de les bases.

64.- En les costats \overline{AB} , \overline{BC} i \overline{CD} del rectangle ABCD, fora d'ell, s'han construït els triangles equilàters $\triangle ABO_1$, $\triangle BCO_2$, $\triangle CDO_3$. Demostreu que les distàncies que formen els punts migs dels segments \overline{AB} , $\overline{O_1O_2}$ i els punts migs dels segments \overline{BC} , $\overline{O_2O_3}$ són iguals.
Gúsiév 470.

Solució:

Siga el rectangle ABCD amb les següents coordenades:

$A(0,0)$, $B(2a,0)$, $C(2a,2b)$, $D(0,2b)$.

Les coordenades dels vèrtex dels triangles equilàters són:

$O_1(a, -a\sqrt{3})$, $O_2(2a + b\sqrt{3}, b)$, $O_3(a, 2b + a\sqrt{3})$

Siga P el punt mig del segment \overline{AB} les seues coordenades són:

$P(a,0)$

Siga Q el punt mig del segment $\overline{O_1O_2}$ les seues coordenades són:

$$Q\left(\frac{3a + b\sqrt{3}}{2}, \frac{b - a\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{3a + b\sqrt{3}}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{b - a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Siga M el punt mig del segment \overline{BC} les seues coordenades són:

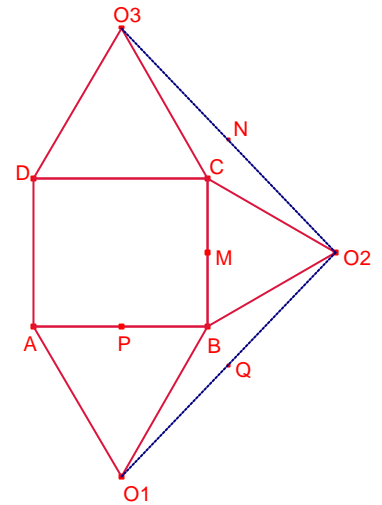
$M(a,b)$

Siga N el punt mig del segment $\overline{O_2O_3}$ les seues coordenades són:

$$N\left(\frac{3a + b\sqrt{3}}{2}, \frac{b + a\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$\overline{MN} = \sqrt{\left(\frac{3a + b\sqrt{3}}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{b + a\sqrt{3}}{2} - b\right)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

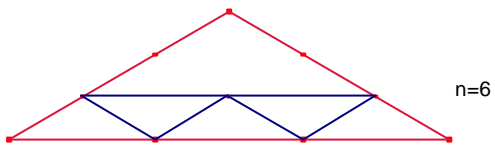
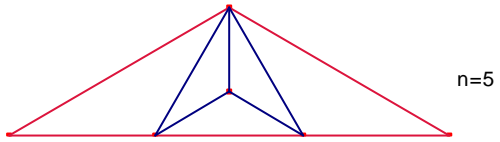
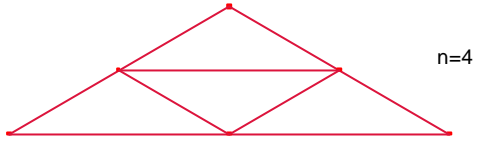
Aleshores, $\overline{PQ} = \overline{MN}$ i és igual a la meitat de la diagonal del rectangle.



65.- Proveu que un triangle isòsceles amb un angle de 120° pot ser dividit en $n \geq 4$ triangles semblants a l'original.

Solució:

És suficient demostrar que es poden fer les divisions per a $n = 4, 5, 6$.



66.- En un trapezi rectangle les bases paral·leles i costat lateral menor mesuren a, b, c, respectivament. Calculeu la distància de la intersecció de les diagonals a les bases i al costat lateral menor.

Gúsiév 81.

Solució:

Siga el trapezi rectangle ABCD, $\angle A = 90^\circ$, \overline{AB} paral·lel a \overline{CD} tal que $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b$, $\overline{AD} = c$.

Siga O la intersecció de les diagonals \overline{AC} , \overline{BD} .

Siga $x = \overline{OH}$ l'altura del triangle $\triangle ABO$ sobre el costat \overline{AB} (distància de O al costat \overline{AB}).

L'altura del triangle $\triangle DOC$ sobre el costat \overline{CD} és $c - x$ (distància de O al costat \overline{CD}).

Els triangles $\triangle ABO$, $\triangle DOC$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{a} = \frac{c-x}{b}, \text{ aleshores la distància de O al costat } \overline{AB} \text{ és } x = \frac{ac}{a+b}.$$

$$\text{La distància de O al costat } \overline{CD} \text{ és } c - x = c - \frac{ac}{a+b} = \frac{bc}{a+b}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle ADC$:

$$\overline{AC} = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Siga P la projecció de C sobre el costat \overline{AB} .

Els triangles $\triangle AHO$, $\triangle APC$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{c} = \frac{\overline{AO}}{\sqrt{b^2 + c^2}}. \text{ Aleshores, } \overline{AO} = \frac{x\sqrt{b^2 + c^2}}{c} = \frac{a\sqrt{b^2 + c^2}}{a+b}.$$

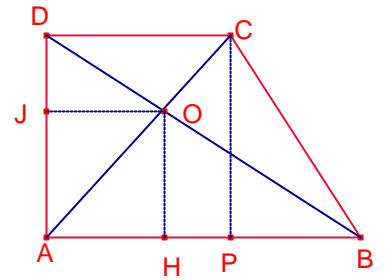
Siga $y = \overline{OJ}$ l'altura del triangle $\triangle ADO$ sobre el costat \overline{AD} (distància de O al costat \overline{AD}).

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle AJO$:

$$\overline{AO}^2 = y^2 + x^2.$$

$$\frac{a^2(b^2 + c^2)}{(a+b)^2} = y^2 + \frac{a^2c^2}{(a+b)^2}. \text{ Resolent l'equació en la incògnita y:}$$

$$y = \frac{ab}{a+b}.$$



67.- L'altura d'un trapezi isòsceles és h i l'angle agut entre les diagonals és 2α .
Determineu la longitud de la paral·lela mitjana del trapezi.
Gúsiév 83.

Solució:

Siga el trapezi isòsceles $ABCD$, $\overline{AB} = a$ paral·lel a $\overline{CD} = b$, $\overline{AD} = \overline{BC}$.

Siga \overline{PQ} la paral·lela mitjana del trapezi.

La paral·lela mitjana del trapezi mesura $\overline{PQ} = \frac{a+b}{2}$.

Siga O la intersecció de les diagonals.

Siga H la projecció de O sobre la base \overline{AB} .

Siga $2\alpha = \angle AOD$.

Per ser el triangle $\triangle ABO$, $\angle OAB = \angle OBA = \alpha$.

Siga $x = \overline{OH}$ l'altura del triangle $\triangle ABO$.

Els triangles $\triangle ABO$, $\triangle DCO$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{a} = \frac{h-x}{b}. \text{ Aleshores, } a+b = \frac{a}{x}h.$$

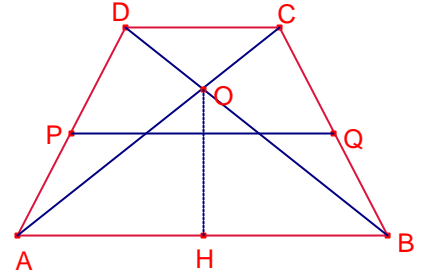
$$\frac{a+b}{2} = \frac{a}{2x}h \tag{1}$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle AHO$:

$$\text{ctg}\alpha = \frac{a}{2x} \tag{2}$$

Substituint l'expressió (2) en l'expressió (1):

$$\overline{PQ} = \frac{a+b}{2} = h \cdot \text{ctg}\alpha.$$



68.- El perímetre d'un trapezi és igual a 52cm, la base menor mesura 1cm. Calculeu la seua àrea si sabem que les diagonals són bisectrius dels angles obtusos.

Gúsiev 251.

Solució:

Siga el trapezi ABCD $\overline{AB} = a$ paral·lel a $\overline{CD} = 1$.

Siga $\alpha = \angle CAB$, aleshores, $\angle DCA = \angle ACB = \alpha$.

Aleshores el triangle $\triangle ABC$ és isòsceles, per tant, $\overline{BC} = a$.

Anàlogament, $\overline{AD} = a$, per tant el trapezi és isòsceles.

Com el perímetre és 52cm:

$$1 + 3a = 52.$$

Aleshores la base major és: $a = 17$ cm

Siga H la projecció de D sobre el costat \overline{AB} .

$$\overline{AH} = \frac{\overline{AB} - \overline{CD}}{2} = 8\text{cm}.$$

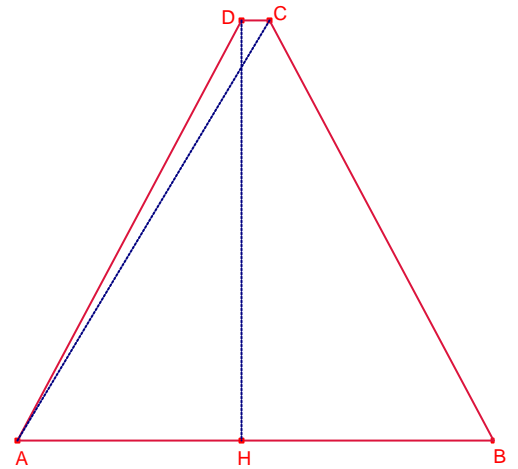
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle

$\triangle AHD$:

$$\overline{HD} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{AH}^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15\text{cm}.$$

L'àrea del trapezi és:

$$S_{ABCD} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} \overline{HD} = \frac{17 + 1}{2} 15 = 135\text{cm}^2.$$



69.- Dues circumferències de radis 4 i 8 cm, amb centres els punts O_1, O_2 és tallen en els punts C i D. \overline{AB} és la tangent exterior. Determineu l'àrea del quadrilàter O_1BAO_2 si sabem que les tangents traçades des del punt C a les dues circumferències són perpendiculars.

Gúsiév 252.

Solució:

Notem que O_1BAO_2 és un trapezi rectangle.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle

rectangle $O_1\hat{C}O_2$:

$$\overline{O_1O_2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}.$$

Siga H la projecció de O_1 sobre $\overline{AO_2}$.

$$\overline{HO_2} = \overline{AO_2} - \overline{BO_1} = 8 - 4 = 4.$$

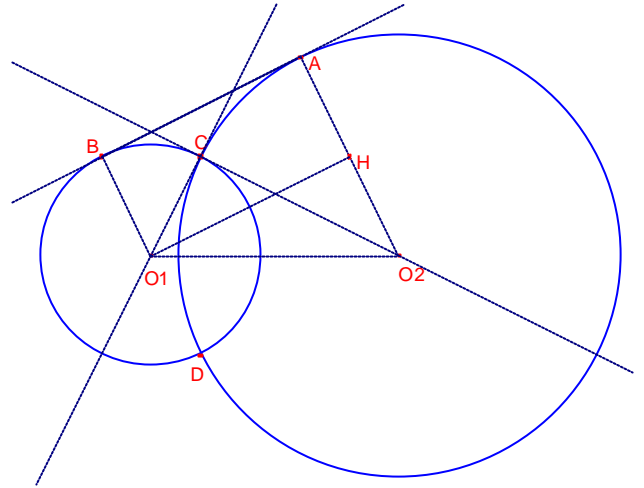
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle

rectangle $O_1\hat{H}O_2$:

$$\overline{HO_1} = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 - 4^2} = 8.$$

L'àrea del trapezi és:

$$S_{O_1BAO_2} = \frac{\overline{AO_2} + \overline{BO_1}}{2} \overline{HO_1} = \frac{8+4}{2} 8 = 48\text{cm}^2.$$



70.- Dues circumferències iguals de radi R , i de centres els punts O_1, O_2 són tangents exteriors. La recta r intersecta les circumferències en els punts A, B, C , i D de forma que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$. Determineu l'àrea del quadrilàter O_1ADO_2 .
Gúsiev 253.

Solució:

Si les circumferències són del mateix radi i $\overline{AB} = \overline{CD}$ la recta r és paral·lela a la recta O_1O_2 .

El quadrilàter O_1ADO_2 és un trapezi isòsceles.

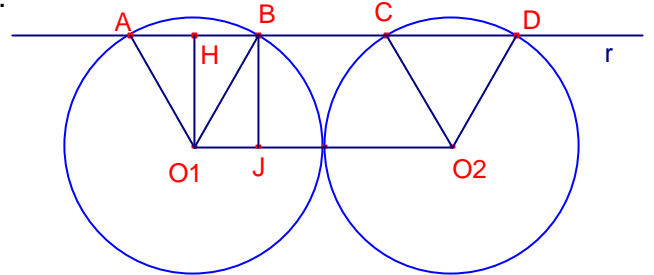
Siga $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = a$.

Siga H la projecció de O_1 sobre \overline{AB} .

Siga J la projecció de B sobre O_1O_2 .

Siga $h = \overline{HO_1} = \overline{JB}$.

$$\overline{AH} = \frac{\overline{AD} - \overline{O_1O_2}}{2} = \frac{3a - 2R}{2}.$$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle AHO_1$:

$$R^2 - h^2 = \left(\frac{3a - 2R}{2}\right)^2 \quad (1)$$

Considerem el trapezi isòsceles O_1BCO_2 .

$$\overline{O_1J} = \frac{\overline{O_1O_2} - \overline{BC}}{2} = \frac{2R - a}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\triangle O_1JB$:

$$R^2 - h^2 = \left(\frac{2R - a}{2}\right)^2 \quad (2)$$

Igualant les expressions (1) (2):

$$\left(\frac{3a - 2R}{2}\right)^2 = \left(\frac{2R - a}{2}\right)^2. \text{ Resolent l'equació en la incògnita } a:$$

$$a = R \quad (3)$$

Substituint l'expressió (3) en l'expressió (1):

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}R.$$

Aleshores, la superfície del quadrilàter O_1ADO_2 és:

$$S_{O_1ADO_2} = \frac{\overline{AD} + \overline{O_1O_2}}{2} \overline{HO_1} = \frac{3R + 2R}{2} \frac{\sqrt{3}}{2}R = \frac{5\sqrt{3}}{4}R\text{cm}^2.$$