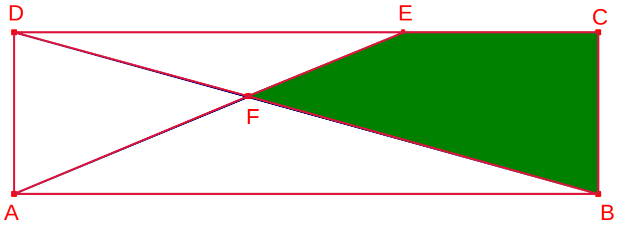
Problemes de Geometria per a l'ESO 70

691.- Siga el rectangle ABCD, $\overline{BC}=5$.

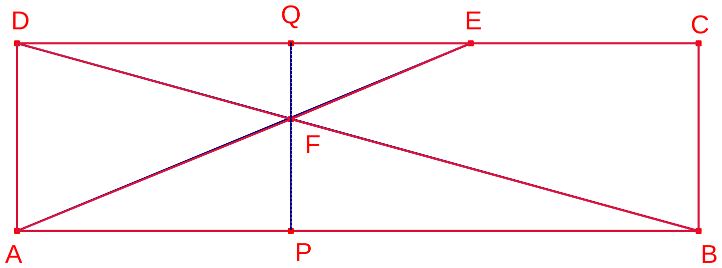
Siga E del costat $\overline{CD}$ tal que $\overline{EC}=\frac{1}{3}\overline{CD}$.

Siga F la intersecció de $\overline{AE}$ i $\overline{BD}$.

Si l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DFE}$ és 12 i l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABF}$ és 27, determineu l'àrea del quadrilàter BCEF.



Solució:



Siga $\overline{CE}=x$, aleshores, $\overline{DE}=2x$, $\overline{AB}=\overline{Cd}=3x$.

Siguen P, Q les projeccions de F sobre els costats $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, respectivament.

Els triangles $\overset{\Delta}{DFE}$, $\overset{\Delta}{ABF}$ són semblants i la raó de semblança és $\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}}=\frac{2}{3}$.

Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{QF}}{\overline{PF}}=\frac{2}{3}$. $\overline{PQ}=\overline{BC}=5$, aleshores:

$\overline{QF}=2$, $\overline{PF}=3$.

Calculant l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DFE}$:

$S_{DFE}=\frac{2x\cdot 2}{2}=12$. Resolent l'equació:

$x=6$.

$\overline{AB}=\overline{CD}=3\cdot 6=18$.

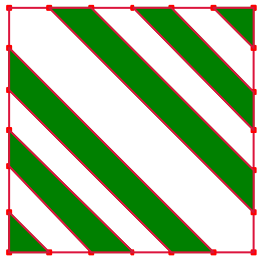
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és:

$S_{BCD}=\frac{3x\cdot 5}{2}=\frac{18\cdot 5}{2}=45$.

L'àrea del quadrilàter BCEF és igual a la diferència entre les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{BCD}$ i $\overset{\Delta}{DFE}$:

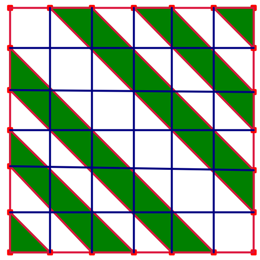
$S_{BCEF}=S_{BCD}-S_{DEF}=45-12=33$.

692.- Els costats d'un quadrat s'han dividit en 6 parts iguals i s'ha ombrejat una zona (veure figura.
Determineu la proporció de zona ombrejada.



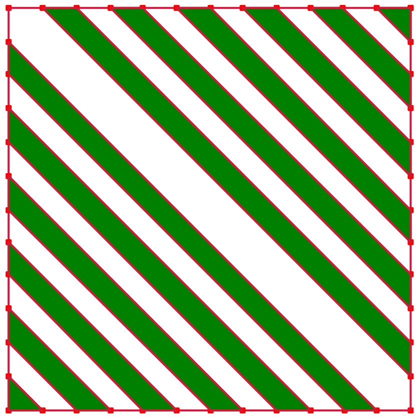
Solució:
Dividim el quadrat inicial en 36 quadrats iguals (veure figura.
La zona ombrejada ocupa $1+5+9$ quadrats.
Aleshores:
La proporció entre l'àrea de la superfície ombrejada i l'àrea del quadrat és:

$$\frac{S_O}{S_q}=\frac{15}{36}=\frac{5}{8}.$$



Generalització:
Els costats d'un quadrat s'han dividit en 2n parts iguals i s'ha ombrejat una zona.
Determineu la proporció de zona ombrejada.

Solució:



Dividim el quadrat inicial en $(2n)^2$ quadrats iguals.

La zona ombrejada ocupa $1+5+9+.....+(1+(n-1)4)=\frac{4n-2}{2}n=2n^2-n$ quadrats.

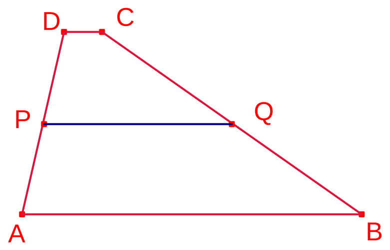
$$\frac{S_O}{S_q}=\frac{2n^2-n}{4n^2}.$$

693.- La paral·lela mitjana d'un trapezi divideix el trapezi en dos trapezis, les àrees dels quals estan en proporció 3:7.
Si la paral·lela mitjana mesura 5. Determineu la mesura de les bases paral·leles del trapezi.

Solució:

Siga ABCD el trapezi de bases paral·leles $a=\overline{AB}$, $\overline{CD}=b$, $a \geq b$.

Siga $\overline{PQ}=5$ la paral·lela mitjana.



$\overline{PQ}=\frac{a+b}{2}=5$.

$a+b=10$ (1)

Per ser $\overline{PQ}$ la paral·lela mitjana les altures dels trapezis ABQP i PQCD són iguals.
Siga h aquesta altura.

$\frac{S_{PQCD}}{S_{ABQP}}=\frac{3}{7}$, $\frac{\frac{5+b}{2}h}{\frac{a+5}{2}h}=\frac{3}{7}$.

Simplificant:

$3a-7b=20$ (2)

Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):

$\begin{cases} a+b=10 \\ 3a-7b=20 \end{cases}$. Resolent el sistema $\begin{cases} a=9 \\ b=1 \end{cases}$.

694.- Donat el quadrat ABCD s'han dibuixat els triangles equilàters $\overset{\Delta}{CDE}$, $\overset{\Delta}{DAF}$, $\overset{\Delta}{ABG}$, $\overset{\Delta}{BCH}$, amb els costats en l'interior del quadrat.
Determineu la proporció entres les àrees del quadrilàter EFGH i el quadrat ABCD.

Solució:

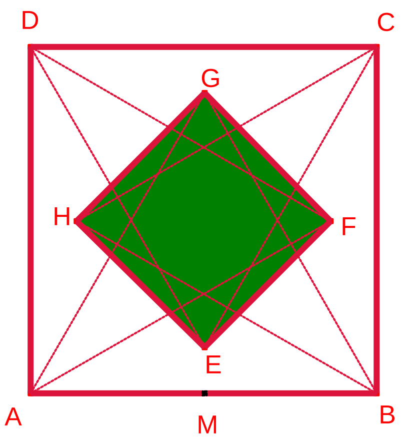
Siga $\overline{AB}=c$ costat del quadrat ABCD.

L'àrea del quadrat ABCD és $S_{ABCD}=c^2$

Notem que EFGH és un quadrat.

Siga $x=\overline{EF}$ costat del quadrat EFGH.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABG}$:

$$\overline{GM}=\frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

$$\overline{EM}=\overline{AB}-\overline{GM}=\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)c.$$

$$\overline{EG}=\overline{AB}-2\cdot\overline{EM}=\left(\sqrt{3}-1\right)c.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EFG}$:

$$x^2+x^2=\overline{EG}^2=\left(\sqrt{3}-1\right)^2c^2.$$

$$2x^2=\left(4-2\sqrt{3}\right)c^2.$$

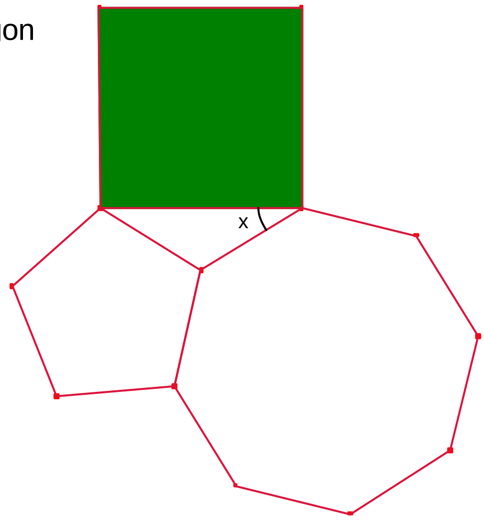
$$x^2=\left(2-\sqrt{3}\right)c^2$$

L'àrea del quadrat EFGH és:

$S_{EFGH}=x^2=\left(2-\sqrt{3}\right)c^2=\left(2-\sqrt{3}\right)S_{ABCD}$. Aleshores:

$$\frac{S_{EFGH}}{S_{ABCD}}=2-\sqrt{3}.$$

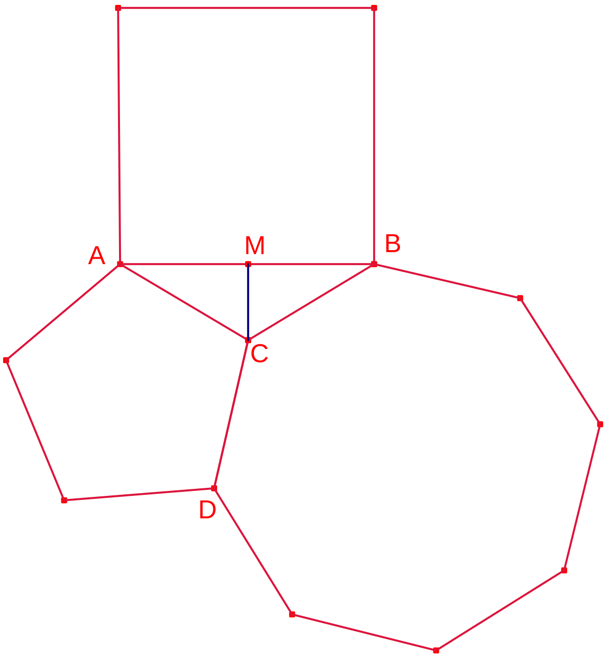
695.- En la figura hi ha un pentàgon regular i un octògon regular de costat 1cm i un quadrat format en unir un vèrtex del pentàgon un de l'octògon.
a) Determineu la mesura de l'angle x.
b) Calculeu l'àrea del quadrat.



Solució:
Siga $\overline{AB}$, costat del quadrat.
$\overline{CD} = \overline{AC} = \overline{BC} = 1$.

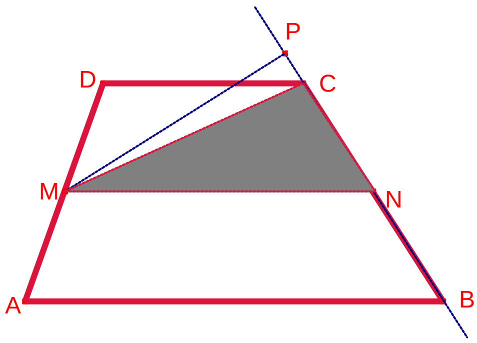
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és isòsceles.
L'angle interior del pentàgon regular i de l'octògon regular és:
$\angle ACD = 108^o$, $\angle BCD = 135^o$.
$\angle ACB = 360^o - (108^o + 135^o) = 117^o$

$$x = \angle CBA = \frac{180^o - 117^o}{2} = 31^o30'.$$



Siga M el punt mig del segment $\overline{AB}$.
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMC}$:
$\overline{BM} = \cos 31^o30'$.
$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BM} = 2 \cdot \cos 31^o30'$.
L'àrea del quadrat és:
$S = (2 \cdot \cos 31^o30')^2 \approx 2'91 cm^2$.

696.- Siga el trapezi ABCD de bases paral·leles $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{BC}=c$.
Si la distància del punt mig del costat $\overline{AD}$ a la recta BC és d, calculeu l'àrea del trapezi ABCD.
Selectivitat russa 1996 3.4.



Solució:
Siga $a=\overline{AB}$, $b=\overline{CD}$ bases del triangle.
Siguen M, N els punts migs dels costats $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, respectivament.
$\overline{BN}=\overline{CN}=\frac{c}{2}$.
Siga P la projecció de M sobre la recta BC. $\overline{MP}=d$.
Per ser $\overline{MN}$ paral·lela mitjana del trapezi $\overline{MN}=\frac{a+b}{2}$.

Siga S l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MNC}$.
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MNC}$ és:

$$S=S_{MNC}=\frac{\overline{CN}\cdot\overline{MP}}{2}=\frac{\frac{c}{2}d}{2}=\frac{cd}{4}.$$

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

Els triangles $\overset{\Delta}{MNC}$, $\overset{\Delta}{MND}$ tenen la mateixa àrea ja que tenen igual base, i igual altura $\overline{MP}=d$ sobre aquestes bases.
$S_{MND}=S$.
Els triangles $\overset{\Delta}{MNB}$, $\overset{\Delta}{CDM}$ tenen la mateixa altura aleshores:

$$\frac{S_{CDM}}{S}=\frac{\overline{CD}}{\overline{MN}}=\frac{b}{\frac{a+b}{2}}.$$ Aleshores:

$$S_{CDM}=\frac{2b}{a+b}.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{MNC}$, $\overset{\Delta}{ABM}$ tenen la mateixa altura aleshores:

$$\frac{S_{ABM}}{S}=\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}}=\frac{a}{\frac{a+b}{2}}.$$ Aleshores:

$$S_{ABM}=\frac{2a}{a+b}.$$

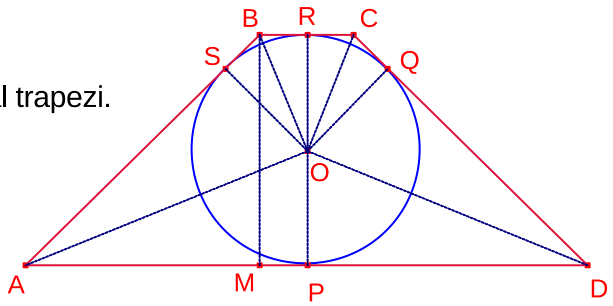
L'àrea del trapezi ABCD és:

$$S_{ABCD}=S_{MNB}+S_{MNC}+S_{CDM}+S_{ABM}=S+S+\frac{2b}{a+b}S+\frac{2a}{a+b}S=4S=cd.$$

697.- Un trapezi isòsceles ABCD de costats paral·lels $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ $\angle BAD = 45^\circ$ està circumscrit a una circumferència. Si l'àrea del trapezi és trenta calculeu la mesura dels costats no paral·lels.

Selectivitat russa 1998 1.4.

Solució:



Siga $\overline{AD} = a$, $\overline{BC} = b$ bases paral·leles del trapezi.

Siguen $\overline{AB} = \overline{CD} = c$ els costats no paral·lels.

Siga la circumferència de centre O i radi r tangent al trapezi.

Siguen P, Q, R, S els punts de tangència.

$$\overline{BR} = \overline{BS} = \frac{b}{2}.$$

$$\overline{AP} = \overline{AS} = \frac{a}{2}.$$

$$c = \overline{AS} + \overline{BS} = \frac{a+b}{2}.$$

L'àrea del trapezi és igual a la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ABO}$, $\overset{\Delta}{BCO}$, $\overset{\Delta}{CDO}$, $\overset{\Delta}{ADO}$.

$$S_{ABCD} = \frac{a+b+2c}{2} r = 30$$

$$\frac{4c}{2} r = 30 \qquad (1)$$

Siga M la projecció de B sobre el costat $\overline{AD}$.

$\angle BAD = 45^\circ$, aleshores:

$\overline{AM} = \overline{BM} = 2r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMB}$:

$$c^2 = 2(2r)^2$$

$$r = \frac{\sqrt{2}}{4} c \qquad (2)$$

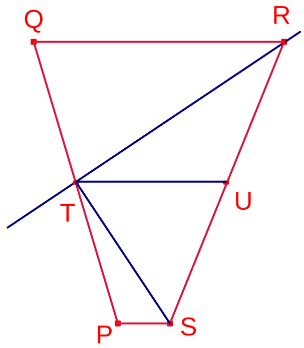
Substituint l'expressió (2) en l'expressió (1):

$$\frac{4c}{2} \frac{\sqrt{2}}{4} c = 30.$$

$$c^2 = 30\sqrt{2}.$$

$$c = \sqrt{30}\,\sqrt[4]{2}.$$

698.- En un trapezi PQRS, $\overline{QR}$ i $\overline{PS}$ paral·lels, el segment $\overline{RT}$ és bisectriu de l'angle $\angle QRS$ i T el punt mig del costat $\overline{PQ}$.
Si la paral·lela mitjana mesura $2\sqrt{5}$ i $\overline{TS}=4$, determineu la mesura del segment $\overline{RT}$.
Selectivitat russa 2003 5.4.

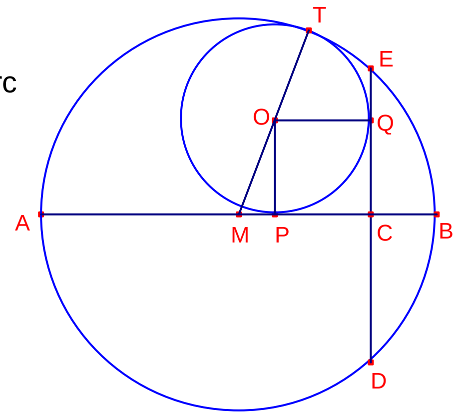


Solució:
Siga $\overline{TU}=4$ la paral·lela mitjana del trapezi PQRS.
Siga $\angle QRS=2\alpha$.
$\angle QRT=\angle TRU=\alpha$.
$\angle QRT=\angle RTU=\alpha$.
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{TRU}$ és isòsceles. Aleshores:
$\overline{RU}=\overline{TU}=2\sqrt{5}$.
$\overline{SU}=\overline{RU}=2\sqrt{5}$.
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{TUS}$ és isòsceles.
$\angle TUS=2\alpha$.
$\angle UTS=\angle UST=90º-\alpha$.
$\angle RTS=90º$.
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{RTS}$ és rectangle.
$\overline{RS}=4\sqrt{5}$
Aplicant el teorema de Pitàgores:
$\overline{RT}=\sqrt{\overline{RS}^2-\overline{TS}^2}=\sqrt{\left(4\sqrt{5}\right)^2-4^2}=8$.

699.- En el diàmetre $\overline{AB}$ d'una circumferència de radi 3 s'agafa el punt C tal que $\overline{AC}:\overline{CB}=5:1$. Pel punt C es dibuixa la corda $\overline{DE}$ perpendicular al diàmetre.

Determineu el radi de la circumferència tangent als segments $\overline{AC}$, $\overline{CE}$ i a l'arc $\overset{\frown}{AE}$ la circumferència.
Selectivitat russa 2004 3.4.

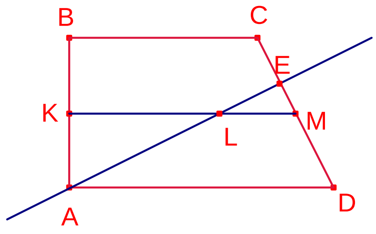
Solució:
Siga M el centre de la circumferència de diàmetre $\overline{AB}=6$.
$\overline{AC}:\overline{CB}=5:1$, aleshores:
$\overline{AC}=5$, $\overline{CB}=1$.
Siga la circumferència tangent als segments $\overline{AC}$, $\overline{CE}$ i a l'arc $\overset{\frown}{AE}$ la circumferència de centre O.
Siguen P i Q els punts de tangència amb segments $\overline{AC}$, $\overline{CE}$.



Siga T el punt de tangència amb l'arc $\overset{\frown}{AE}$ la circumferència.
Siga $r=\overline{OP}=\overline{OQ}=\overline{OT}=\overline{PC}$ radi de la circumferència.
$\overline{MO}=3-r$, $\overline{MP}=\overline{MC}-\overline{PC}=2-r$, $\overline{OP}=r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MPO}$:
$(3-r)^2=r^2+(2-r)^2$.
Resolent l'equació:
$r=-1+\sqrt{6}$.

700.- Siga el trapezi ABCD de costats paral·lels $\overline{BC}=5$, $\overline{AD}=7$, $A=90º$.
Siga $\overline{KM}$ la paral·lela mitjana (K en el costat $\overline{AB}$).
La recta perpendicular al costat $\overline{CD}$ que passa pel punt A talla el segment $\overline{KM}$ en el punt L tal que $\overline{KL}:\overline{LM}=2:1$,
Calculeu l'àrea del trapezi.
Selectivitat russa 2004 3.6.



Solució:
Siga E la projecció de A sobre el costat $\overline{CD}$.

$\overline{KM}=\frac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}=\frac{7+5}{2}=6$.

$\overline{KL}:\overline{LM}=2:1$, aleshores, $\overline{KL}=4$, $\overline{LM}=2$.

Siga $\overline{AK}=x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKL}$:

$\overline{AL}=\sqrt{16+x^2}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADE}$, $\overset{\Delta}{LME}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{AE}}{7}=\frac{\overline{EL}}{2}=\frac{\overline{AE}-\overline{EL}}{7-2}\frac{\overline{AL}}{5}$.

Aleshores, $\overline{EL}=\frac{2}{5}\sqrt{16+x^2}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AKL}$, $\overset{\Delta}{MEL}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{KL}}{\overline{AL}}=\frac{\overline{EL}}{\overline{ML}}$.

$\frac{4}{\sqrt{16+y^2}}=\frac{\sqrt{16+y^2}}{2}$. Resolent l'equació:

$y=2$.

L'àrea del trapezi ABCD és:

$S_{ABCD}=\frac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}\overline{AB}=\frac{7+5}{2}4=24$.