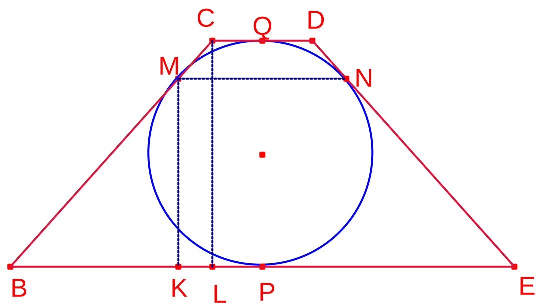
Problemes de Geometria per a l'ESO 71

701.- Siga el trapezi isòsceles BCDE de costats paral·lels $\overline{CD}$, $\overline{BE}$ d'àrea 96 i altura 6 que té inscrita una circumferència.
Siguen M, N els punts de tangència de la circumferència inscrita i els costats $\overline{BC}$ i $\overline{DE}$, respectivament. Calculeu la mesura del segment $\overline{MN}$.
Selectivitat russa 2002 5.4.

Solució:
Siguen P, Q els punts de tangència de la circumferència inscrita i els costats $\overline{BE}$ i $\overline{CD}$.
$\overline{PQ}=6$.
Siga $x=\overline{BP}=\overline{BM}=\overline{EP}$.
Siga $y=\overline{CQ}=\overline{CM}=\overline{DQ}$.



L'àrea del triangle és 96 aleshores:
$\frac{2x+2y}{2}6=96$. Simplificant:
$x+y=16$ (1)
Siga L la projecció de C sobre el costat $\overline{BE}$.
$\overline{BL}=x-y$, $\overline{BC}=x+y$, $\overline{CL}=6$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BLC}$:
$(x+y)^2=(x-y)^2+6^2$. Simplificant:
$xy=9$ (2)
Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):
$\begin{cases}x+y=16\\ xy=9\end{cases}$, la solució del qual és $\begin{cases}x=8+\sqrt{55}\\ y=8-\sqrt{55}\end{cases}$.
Siga K la projecció de M sobre el costat $\overline{BE}$.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BKM}$, $\overset{\Delta}{BLC}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{\overline{BK}}{x}=\frac{x-y}{x+y}$. Aleshores:
$\overline{BK}=x\frac{x-y}{x`+y}=\left(8+\sqrt{55}\right)\frac{2\sqrt{55}}{16}=\frac{55+8\sqrt{55}}{8}$.
$\overline{MN}=\overline{BE}-2\cdot\overline{BK}$.
$\overline{MN}=2\left(8+\sqrt{55}\right)-2\left(\frac{55+8\sqrt{55}}{8}\right)=\frac{9}{4}$.

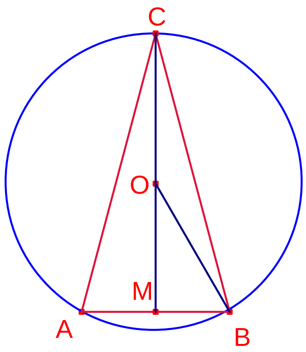
702.- En una esfera s'ha inscrit un con.
L'àrea de l'esfera és 16 vegades l'àrea de la base del con.
Determineu l'angle entre l'altura del con i la generatriu.
Selectivitat russa 1991 2.2.

Solució:
Siga l'esfera de centre O i radi R.
Siga una secció de l'esfera que passa pel vèrtex C del con i pel centre de l'esfera.
La secció forma un triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ on $\overline{AB} = 2r$ diàmetre del con.
$\overline{OB} = \overline{OC} = R$.
Siga $\alpha = \angle OCB$ $0 \le \alpha \le 90^o$, angle entre l'altura $\overline{CM}$ del con i la generatriu $\overline{BC}$.
$\angle OBC = \angle OCB = \alpha$.
Aleshores, $\angle MOB = 2\alpha$.
L'àrea de l'esfera és $S_{esf} = 4\pi R^2$.
L'àrea del cercle base del con és $S_{base} = \pi r^2$.
L'àrea de l'esfera és 16 vegades l'àrea de la base del con, aleshores:

$$\frac{4\pi R^2}{\pi r^2} = 16.$$

Aleshores:

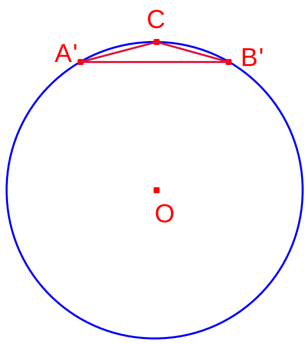
$$\frac{R}{r} = 2.$$



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMB}$

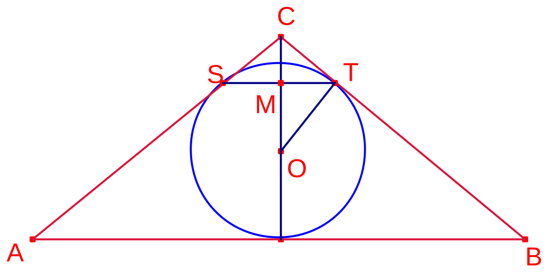
$$\sin 2\alpha = \frac{r}{R} = \frac{1}{2}.$$

Aleshores, $2\alpha = 30^o, 150^o$. Aleshores:
$\alpha = 15^o, 75^o$.



703.- En un con s'ha inscrit una esfera.
La longitud de la circumferència de l'esfera, tangent al con, és igual a 4 vegades el radi de l'esfera.
Determineu l'angle entre el plànol de la base con i la generatriu.
Selectivitat russa 1991 1.2.

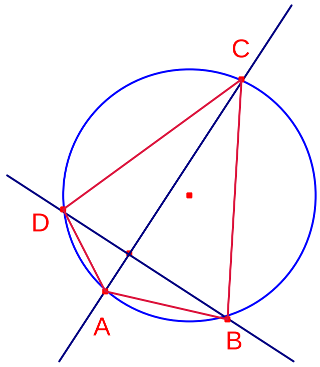
Solució:
Siga l'esfera de centre O i radi R.
Siga una secció del con que passa pel vèrtex C del con i pel centre de l'esfera.



La secció forma un triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siguen S i T els punts de tangència de l'esfera i les generatrius $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$.
$\overline{OT}$ és perpendicular a la generatriu $\overline{BC}$.
$\overline{OS} = \overline{OT} = R$.
Siga M el punt mig del segment $\overline{ST}$, centre de la circumferència de l'esfera tangent al con.
Siga $\overline{MT} = r$ radi de la circumferència.
Siga $\alpha = \angle ABC \quad 0 \le \alpha \le 90^o$, angle entre el plànol de la base del con i la generatriu $\overline{BC}$.
$\angle TOM = \angle ABC = \alpha$.
La longitud de la circumferència tangent al con és $L_c = 2\pi r$.
La longitud de la circumferència és 4 vegades el radi de l'esfera aleshores:
$\frac{2\pi r}{R} = 4$. Simplificant:
$\frac{r}{R} = \frac{2}{\pi}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMT}$
$\sin\alpha = \frac{r}{R} = \frac{2}{\pi}$.
$\alpha = \arcsin\frac{2}{\pi} \approx 39^o 32' 25''$.

704.- En un circumferència s'agafen els punts consecutius A, B, C i D tal que $\overline{AC} \perp \overline{BD}$, $\overline{BC} = m$, $\overline{AD} = n$. Calculeu el radi de la circumferència.
Selectivitat russa, 1994, 1. 6.



Solució
Siga R el radi de la circumferència.
Siga $\alpha = \angle ABD$.
$\angle BAC = 90º - \alpha$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$:
$\frac{n}{\sin\alpha} = 2R$, r radi de la circumferència circumscrita a $\overset{\Delta}{ABD}$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\frac{m}{\sin(90º-\alpha)} = 2R$, r radi de la circumferència circumscrita a $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\frac{m}{\cos\alpha} = 2R$.

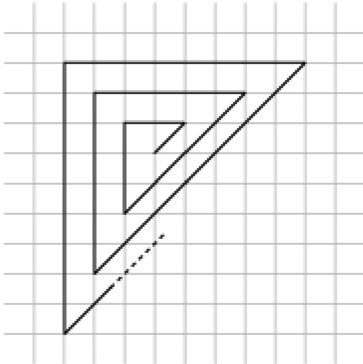
$\frac{n}{\sin\alpha} = \frac{m}{\cos\alpha} = 2R$.

$\frac{n}{m} = \text{tg}\alpha$. Aleshores, $\sin\alpha = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}$.

Aleshores el radi de la circumferència és:

$R = \frac{1}{2}\frac{n}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + n^2}$.

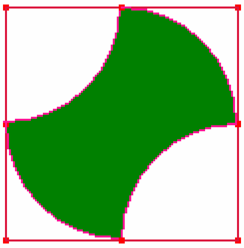
705.- En un paper quadriculat (cada quadrícula mesura 5mm de costat) s'ha dibuixat la següent sanefa de 999 segments.
Quant mesura la línia poligonal.
Aproxima a metres.
KöMaL K360. Desembre 2012.



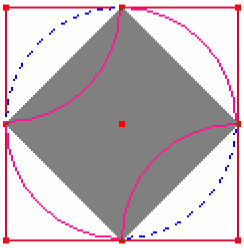
Solució:
Suposem que cada quadrícula mesura 1u de costat.
Començant pel segment més menut les mesures dels segments formen la següent successió:
$\sqrt{2}, 2, 3, 4\sqrt{2}, 5, 6, 7\sqrt{2}, 8, 9, 10\sqrt{2}, ..., 997\sqrt{2}, 998, 999$.
La suma de tots els segments és:
$S = 1 + 2 + 3 + ... + 999 + \left(\sqrt{2} - 1\right)(1 + 4 + 7 + ... + 997)$.
$1 + 2 + 3 + ... + 999 = \frac{1+999}{2} 999$.
$1 + 4 + 7 + ... + 997 = \frac{1+997}{2} 333$.
$S = 1 + 2 + 3 + ... + 999 + \left(\sqrt{2} - 1\right)(1 + 4 + 7 + ... + 997) = 499500 + \left(\sqrt{2} - 1\right)166167 =$
$= 333333 + 166167\sqrt{2}u$.

La longitud de la línia poligonal en mm és:
$L = 5\left(333333 + 166167\sqrt{2}\right) = 1666665 + 830835\sqrt{2} \approx 2841643.13mm$
L'aproximació en metres és 2842m.

706.- En un quadrat de costat 10 s'ha inscrit la figura ombrejada.
Calculeu la seua àrea i el seu perímetre.

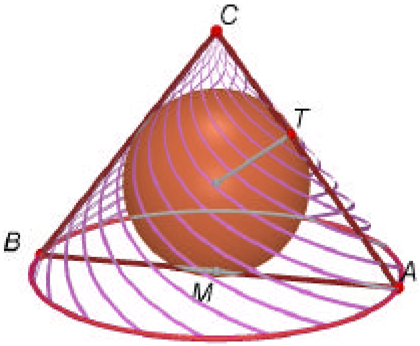


Solució:
L'àrea és igual a la meitat del quadrat.
El perímetre és igual a la longitud de circumferència de radi la meitat del costat del quadrat.



707.- Una esfera de 6cm de radi està inscrita en un con tal que qualsevol punt de tangència de la superfície lateral dista 8cm del vèrtex.
Calculeu la proporció entre el volum de l'esfera i del con.

Solució.

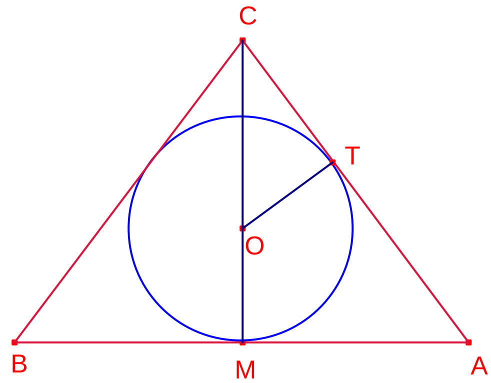


Siga $\overset{\Delta}{ABC}$ la secció del con que passa pel punt M centre de la circumferència de la base del con.
Siga O el centre de l'esfera.
Siga T el punt de tangència de l'esfera i el segment $\overline{AC}$.
$\overline{OM} = \overline{OT} = 6$, $\overline{CT} = 8$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTC}$:
$\overline{OC} = 10$.
Aleshores, $\overline{OM} = 16$.
Els triangles $\overset{\Delta}{OTC}$, $\overset{\Delta}{AMC}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{OT}}{\overline{CT}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{CM}}.$$

$\frac{6}{8} = \frac{\overline{AM}}{16}$. Aleshores:

$\overline{AM} = 12$ radi de la circumferència base del con.



El volum de l'esfera és:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi\overline{OT}^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3.$$

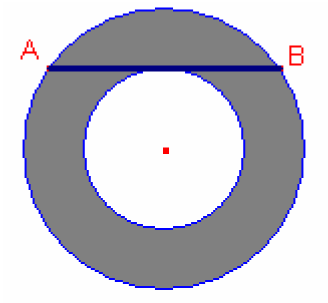
El volum del con és:

$$V_{con} = \frac{1}{3}\pi\overline{AM}^2 \cdot \overline{CM} = \frac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 16.$$

La proporció entre els volums de l'esfera i el con és:

$$\frac{V_{esfera}}{V_{con}} = \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot 6^3}{\frac{1}{3}\pi \cdot 12^2 \cdot 16} = \frac{3}{8}.$$

708.- Calculeu l'àrea ombrejada si la tangent $\overline{AB} = d$.



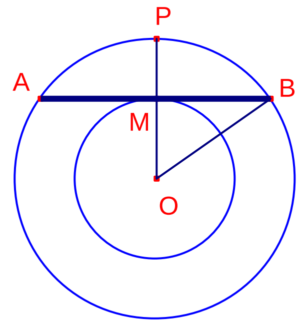
Solució:
Siga O el centre de les dues circumferències.
Siga M el punt mig de la corda $\overline{AB}$.

$\overline{MB} = \frac{d}{2}$.

Siga $\overline{OP} = \overline{OB} = R$ radi de la circumferència exterior.
Siga $\overline{OM} = r$ radi de la circumferència interior.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMB}$:

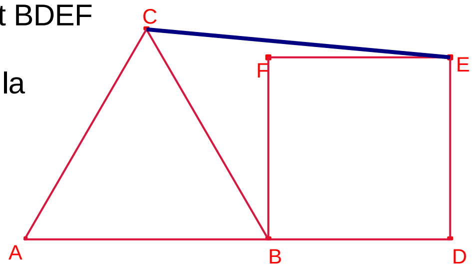
$$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = R^2 - r^2.$$



L'àrea de la corona circular és igual a la diferència de les àrees dels cercles exterior i interior.

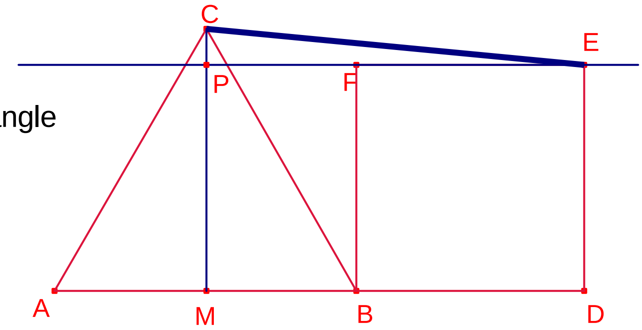
$$S = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi\left(R^2 - r^2\right) = \pi\frac{d^2}{4}.$$

709.- En la figura el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ i el quadrat BDEF tenen el mateix perímetre i A, B, C alineats.
Si el costat del triangle equilàter mesura 4cm calculeu la mesura del segment $\overline{CE}$.



Solució:
Siga $c = \overline{AB}$.
Per hipòtesi el perímetre del quadrat és igual al perímetre del triangle, aleshores:

$$\overline{BD} = \frac{1}{4} 3\overline{AB} = \frac{3}{4} c.$$



Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMC}$:

$$\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2} c.$$

Siga P la projecció de E sobre l'altura $\overline{CM}$

$$\overline{PE} = \overline{MD} = \overline{MB} + \overline{BD} = \frac{1}{2} c + \frac{3}{4} c = \frac{5}{4} c.$$

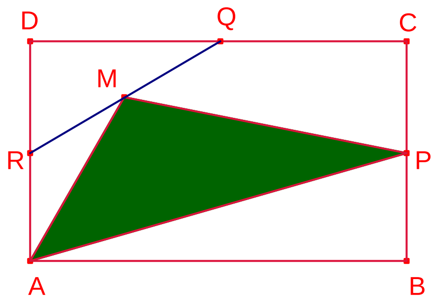
$$\overline{CP} = \overline{CM} - \overline{BF} = \frac{\sqrt{3}}{2} c - \frac{3}{4} c = \frac{2\sqrt{3} - 3}{4} c.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EPC}$:

$$\overline{CE}^2 = \overline{PE}^2 + \overline{CP}^2 = \left(\frac{5}{4} c\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{3} - 3}{4} c\right)^2 = \frac{46 - 12\sqrt{3}}{16} c^2.$$

$$\overline{CE} = \frac{\sqrt{46 - 12\sqrt{3}}}{4} c.$$

710.- En el rectangle ABCD, siguen P, Q i R els punts migs dels costats $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ i $\overline{AD}$, respectivament. Siga M el punt mig del segment $\overline{QR}$. Determineu la raó de proporcionalitat entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{AMP}$ i el rectangle ABCD.



Solució:

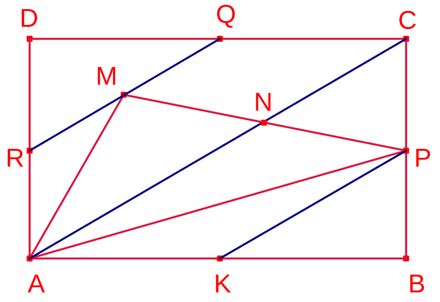
Siga K el punt mig del costat $\overline{AB}$ del rectangle.

Siga N la intersecció dels segments $\overline{AC}$, $\overline{PM}$.

Els segments $\overline{QR}$, $\overline{KP}$ són paral·lels i $\overline{AC}$ és la paral·lela mitjana.

Aleshores N és el punt mig del segment $\overline{PM}$.

Siga S l'àrea del rectangle ABCD.



$S_{PCQ} = S_{RDQ} = \frac{1}{8}S$. $S_{ABP} = \frac{1}{4}S$.

Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

$$S_{RDM} = \frac{1}{2}S_{RDQ} = \frac{1}{16}S.$$

$$S_{ARM} = S_{RDM} = \frac{1}{16}S.$$

$$S_{MNQ} = S_{ARM} = \frac{1}{16}S.$$

$$S_{MPQ} = S_{NMQ} = \frac{1}{16}S.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AMP}$ és:

$$S_{AMP} = S_{ABCD} - (S_{PCQ} + S_{RDQ} + S_{ABP} + S_{ARM} + S_{MNQ} + S_{MPQ}).$$

$$S_{AMP} = S - \left(\frac{1}{8}S + \frac{1}{8}S + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}S + \frac{1}{16}S + \frac{1}{16}S\right) = \frac{5}{16}S.$$

$$\frac{S_{AMP}}{S_{ABCD}} = \frac{5}{16}.$$