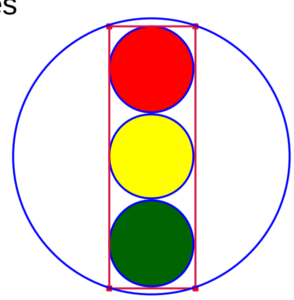
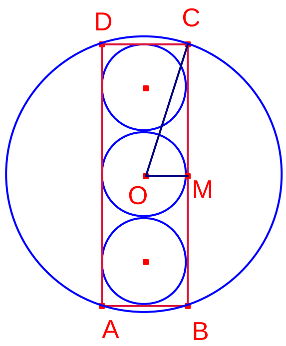
Problemes de Geometria per a l'ESO 72

711.- Tres circumferències tangents d'igual radi estan inscrites en un rectangle.
Calculeu la proporció entre les àrees de la suma dels tres cercles inscrita al rectangle i l'àrea del cercle circumscrit al rectangle.



Solució:
Siga r el radi de les tres circumferències.
Siga ABCD el rectangle circumscrit a les tres circumferències.
Siga O en centre de la circumferència central, centre també, de la circumferència circumscrita al rectangle ABCD.



Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.
$\overline{OM} = r$, $\overline{MC} = 3r$.

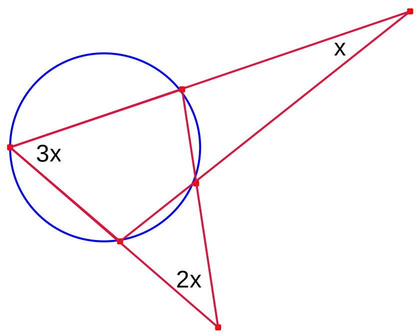
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMC}$, el radi de la circumferència circumscrita al rectangle és:

$$\overline{OC} = \sqrt{\overline{OM}^2 + \overline{MC}^2} = \sqrt{r^2 + (3r)^2} = r\sqrt{10}\,.$$

La proporció entre les àrees de la suma dels tres cercles inscrita al rectangle i l'àrea del cercle circumscrit al rectangle és:

$$\frac{3 \cdot S_m}{S_G} = \frac{3\pi \cdot r^2}{\pi\left(r\sqrt{10}\right)^2} = \frac{3}{10}\,.$$

712.- Determineu el valor de x.



Solució:

Siguen els arcs menors de 180º $a = \overset{\frown}{AB}$, $b = \overset{\frown}{AD}$, $c = \overset{\frown}{DC}$, $d = \overset{\frown}{CB}$.

Per ser $\angle BAD$ angle inscrit de la circumferència:

$c + d = 2 \cdot 3x$ (1)

Per ser $\angle APD$ angle exterior de la circumferència:

$b - d = 2 \cdot x$ (2)

Per ser $\angle AQB$ angle exterior de la circumferència:

$a - c = 2 \cdot 2x$ (3)

Sumant les expressions (1) (2) (3):

$a + b = 12x$ (4)

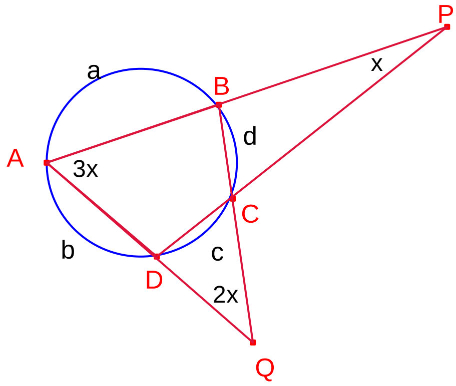
$a + b + c + d = 360^o$ (5)

Substituint les expressions (1) (4) en l'expressió (5):

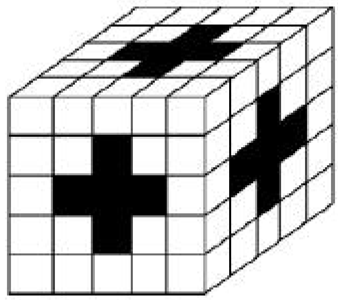
$12x + 6x = 360^o$.

Resolent l'equació:

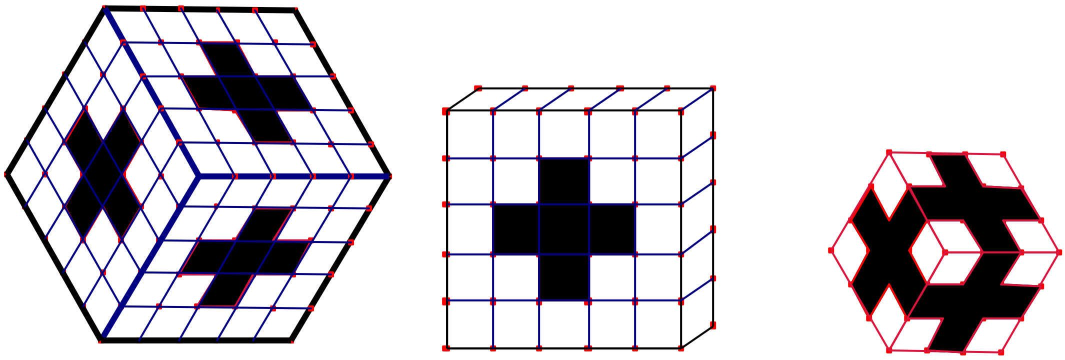
$x = 20^o$.



713.- En el dibuix, un cub 5 per 5 per 5 es compon de cubs d'1 per 1 per 1.
Les caselles centrals s'eliminen mitjançant encunyació de les 15 columnes designades d'endavant cap enrere, de dalt a baix i de costat a costat. Quants cubs menuts queden?.

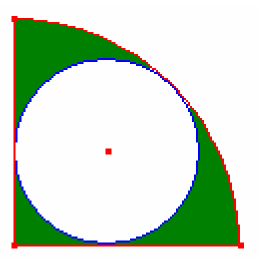


Solució:



Vegem quants cubs eliminem amb l'encunyació.
Si tallem una cara del cub a una distància d'un cub unitat es forma un ortoedre al qual s'eliminen 5 cubs.
Aquests 5 cubs no coincideixen amb cap de les cares laterals.
Si tallem el cub per les sis cares a una unitat, la part interior està formada per un cub tres per tres, en el qual s'eliminen tots els cubs excepte els cubs que formen els vèrtexs del cub tres per tres.

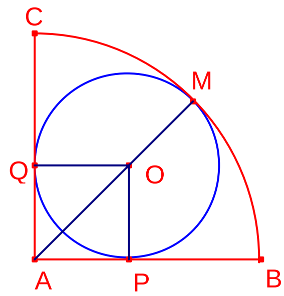
Aleshores eliminem per cada cara del cub inicial 5 cubs i del cub interior 3^3-8 cubs.
Aleshores eliminaríem:
$5\cdot 6+27-8=49$ cubs.
Si en el cub inicial hi ha 5^3 cubs d'una unitat ens quedarien:
$5^3-49=76$ cubs.



714.- Una circumferència està inscrita en un quadrant de circumferència.
Determineu la proporció entre les àrees de la regió del quadrat exterior a la circumferència i l'àrea del cercle inscrit en el quadrant.

Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi r.

Siga M el punt mig del quadrant $\overset{\frown}{BC}$.
Siga A el centre del quadrant.
Notem que M és el punt de tangència de la circumferència i el quadrant, $\overline{OM} = r$
Siguen P i Q els punts de tangència de la circumferència i els radis del quadrant, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, respectivament.
$\overline{OP} = \overline{OQ} = r$.
APOQ és un quadrat.



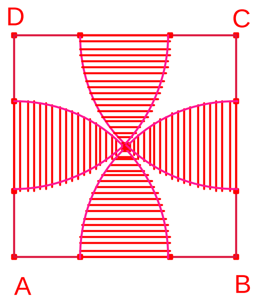
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APO}$:
$\overline{AO} = r\sqrt{2}$.
El radi del quadrant és:
$\overline{AM} = \overline{AO} + \overline{OM} = \left(1+\sqrt{2}\right)r$.
L'àrea del cercle de radi r és:
$S_c = \pi r^2$.
L'àrea de la regió del quadrat exterior a la circumferència és igual a l'àrea del quadrant de radi $\overline{AM}$ menys l'àrea del cercle de radi r.

$$S_e = \frac{1}{4}\pi\left(\left(1+\sqrt{2}\right)r\right)^2 - \pi r^2 = \frac{-1+2\sqrt{2}}{4}\pi r^2.$$

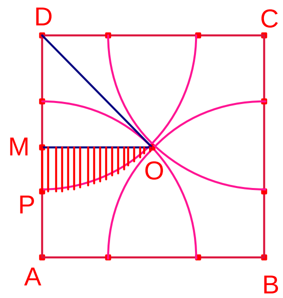
La proporció entre les àrees de la regió del quadrat exterior a la circumferència i l'àrea del cercle inscrit en el quadrant és:

$$\frac{S_e}{S_c} = \frac{\frac{-1+2\sqrt{2}}{4}\pi r^2}{\pi r^2} = \frac{-1+2\sqrt{2}}{4}.$$

715.- En un quadrat ABCD de costat $4\sqrt{2}$, la regió ombrejada està limitada per arcs de circumferència amb centres els vèrtexs i tots quatre passen pel centre del quadrat. Determineu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:
Siga O el centre del quadrat ABCD.
Siga P el punt de l'arc de centre D que talla el costat $\overline{AD}$.
$\angle PDO = 45^o$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AD}$.



$\overline{DM} = \frac{1}{2}\overline{AD} = 2\sqrt{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMD}$:
$\overline{OD} = 4$.
L'àrea ombrejada és igual a 8 vegades la diferència de les àrees del sector de 45º i radi 4 i el triangle $\overset{\Delta}{OMD}$.
L'àrea del sector de 45º i radi 4 és:

$$S_{sec\,tor} = \frac{1}{8}\pi 4^2 = 2\pi.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OMD}$ és:

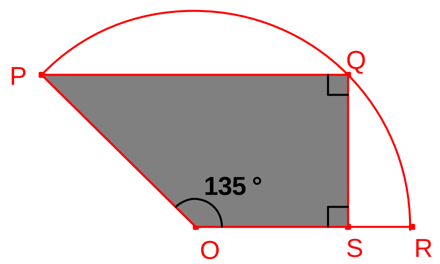
$$S_{OMD} = \frac{\overline{DM}^2}{2} = \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{2} = 4.$$

L'àrea que cerquem és:

$$S = 8\left(S_{sec\,tor} - S_{OMD}\right) = 8(2\pi - 4) = 16(\pi - 2).$$

716.- En el dibuix P, Q, R són punts de la circumferència de centre O i radi 12.

S és un punt del segment $\overline{OS}$ Si $\angle POR = 135^o$ calculeu l'àrea del trapezi rectangle OPQS.



Solució:

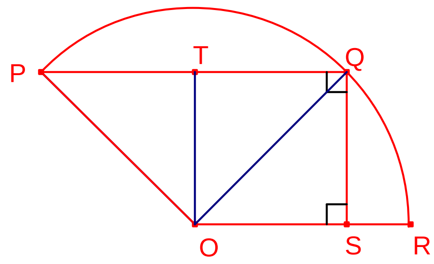
Siga T la projecció de O sobre $\overline{PQ}$.

$\overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OR} = 12$.

$\angle POT = 45^o$.

El triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTP}$ és isòsceles. Aplicant el teorema de Pitàgores:

$\overline{OT} = \overline{PT} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}12 = 6\sqrt{2}$.



El triangle $\overset{\Delta}{OPQ}$ és isòsceles i $\overline{OT}$ és l'altura. Aleshores:

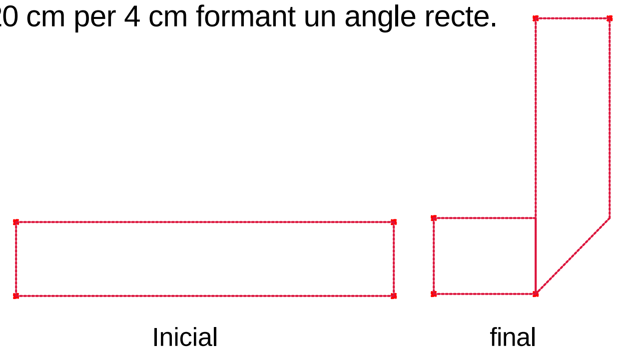
$\overline{QT} = \overline{PT} = \overline{OS} = 6\sqrt{2}$.

$\overline{PQ} = 2 \cdot \overline{PT} = 12\sqrt{2}$.

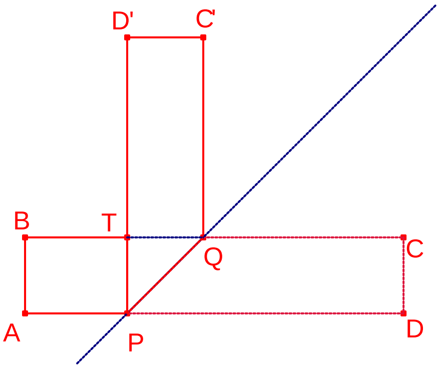
L'àrea del trapezi OPQS és:

$S_{OPQS} = \dfrac{\overline{PQ} + \overline{OS}}{2}\overline{OT} = \dfrac{12\sqrt{2} + 6\sqrt{2}}{2}6\sqrt{2} = 108$.

717.- Doblem una tira de paper de 20 cm per 4 cm formant un angle recte. Quina és l'àrea de la nova figura.



Solució:



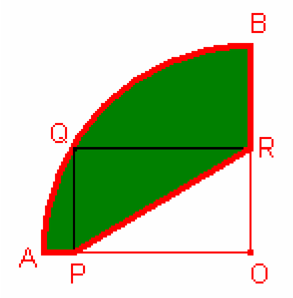
Siga ABCD la tira inicial.
Al fer un plec de paper, la línia del plec és mediatriu de la part de la figura inicial que es dobla.

L'àrea de la figura final és igual a l'àrea de la tira menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PTQ}$.

Notem que el triangle $\overset{\Delta}{PTQ}$ és rectangle i isòsceles ja que per ser PQ bisectriu i la tira al plegar forma un angle recte, $\angle TPQ = 45^o$, $\overline{PT} = \overline{TQ} = 4$.
Aleshores l'àrea de la figura final és:

$$S = 4 \cdot 20 - \frac{4 \cdot 4}{2} = 72cm^2.$$

718.- En la figura AOB és un quadrant de cercle de radi 10 i PQRO és un rectangle de perímetre 26.
Determineu el perímetre de la figura ombrejada.

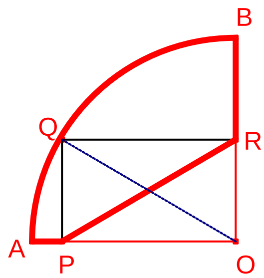


Solució:

El perímetre de la figura ombrejada és igual a la suma de l'arc $\overset{\frown}{AB}$, $\overline{AP}$, $\overline{PR}$, $\overline{BR}$.

Les diagonals d'un rectangle són iguals:
$\overline{PR} = \overline{OQ} = 10$.
L'arc mesura:

$$\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{4} 2\pi \cdot 10 = 5\pi .$$

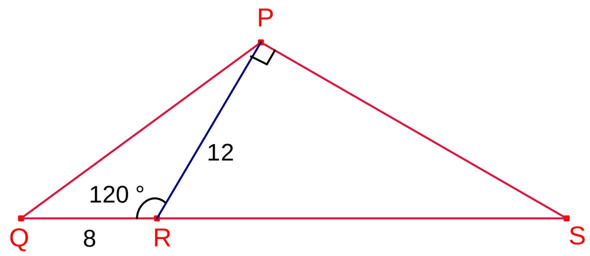


Siga $\overline{OP} = x$, $\overline{OQ} = y$, $2x + 2y = 26$. Aleshores, $x + y = 13$.
$\overline{AP} = 10 - x$, $\overline{BR} = 10 - y$.
El perímetre de la figura ombrejada és:

$$p = \overset{\frown}{AB} + \overline{PR} + \overline{AP} + \overline{BR} = 5\pi + 10 + 10 - x + 10 - y = 5\pi + 30 - (x + y) =$$
$$= 5\pi + 30 - 13 = 5\pi + 17 .$$

719.- En la figura $\overline{QR}=8$, $\overline{PR}=12$, $\angle PRQ=120^{o}$, $\angle RPS=90^{o}$.

Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PQS}$.



Solució:

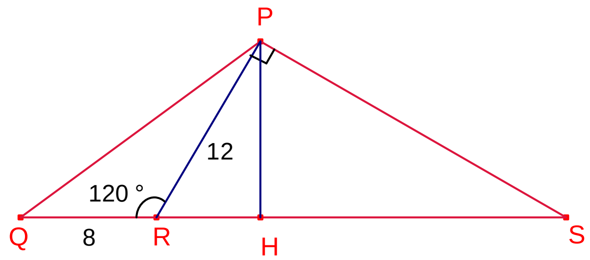
Siga $\overline{PH}$ l'altura del triangle $\overset{\Delta}{PQS}$.

$\angle PRS=60^{o}$, $\angle RPS=90^{o}$, aleshores:

$\overline{RS}=2\cdot\overline{PR}=24$.

$\overline{PH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{PR}=6\sqrt{3}$.

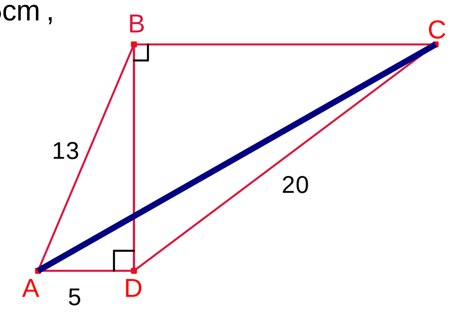
$\overline{QS}=8+24=32$.



L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PQS}$ és:

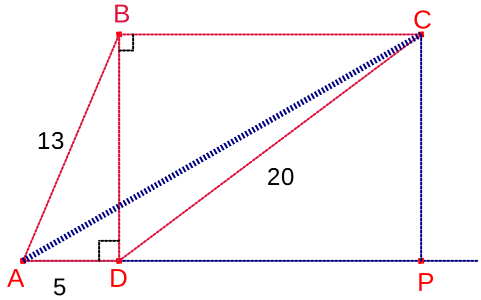
$$S_{PQS}=\frac{\overline{QS}\cdot\overline{PH}}{2}=\frac{32\cdot 6\sqrt{3}}{2}=96\sqrt{3}.$$

720.- En la figura $\overline{AB} = 13cm$, $\overline{DC} = 20cm$ i $\overline{AD} = 5cm$, $\angle ADB = 90º$, $\angle DBC = 90º$.
Calculeu la mesura del segment $\overline{AC}$.



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADB}$:
$\overline{BD} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.
Siga P la projecció de C sobre la recta AD.
$\overline{CP} = \overline{BD} = 12$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DPC}$:
$\overline{DP} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$.
$\overline{AP} = 5 + 16 = 21$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APC}$:
$\overline{AC} = \sqrt{12^2 + 21^2} = \sqrt{585}$.