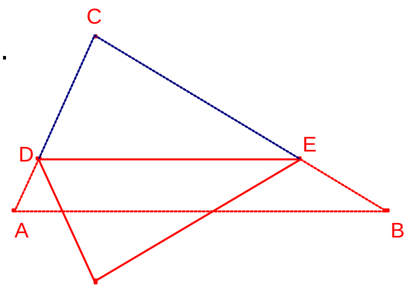
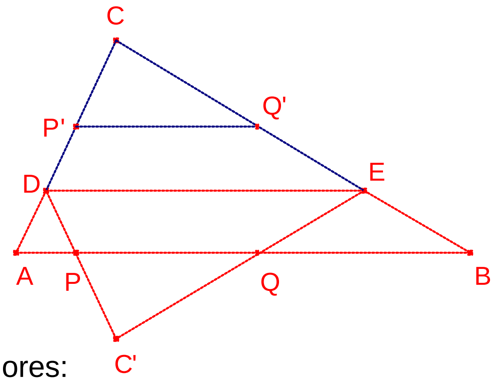
Problemes de Geometria per a l'ESO 73

721.- La base $\overline{AB}$ d'un paper triangular $\overset{\Delta}{ABC}$ mesura 12cm.
Doblem el paper per la línia $\overline{DE}$ paral·lela a la base.
L'àrea del triangle exterior al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ ocupa el 16% de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Determineu la mesura del segment $\overline{DE}$.



Solució:
Al fer un plec de paper, la línia del plec és mediatriu de la part de la figura inicial que es dobla.
C' és el simètric de C respecte de $\overline{DE}$.
$\overline{DC'}$ talla la base $\overline{AB}$ en el punt P.
$\overline{EC'}$ talla la base $\overline{AB}$ en el punt Q.
Siga P' el simètric de P respecte de $\overline{DE}$.
Siga Q' el simètric de Q respecte de $\overline{DE}$.
$\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$



Notem que $\overline{DE}$ és la paral·lela mitjana de $\overline{AB}$ i $\overline{P'Q'}$, aleshores:

$$\overline{DE} = \frac{\overline{AB} + \overline{P'Q'}}{2} = \frac{\overline{AB} + \overline{PQ}}{2}.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$ $\overset{\Delta}{PQC'}$ són semblants i la raó de les àrees és $\frac{16}{100}$.

Aplicant el teorema de Tales:

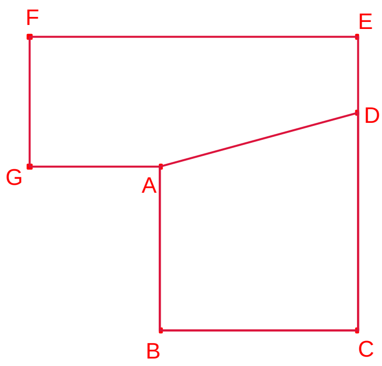
$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} = \sqrt{\frac{16}{100}} = \frac{2}{5}.$$

$$\frac{\overline{PQ}}{12} = \frac{2}{5}.$$

$\overline{PQ} = \frac{24}{5}$. Aleshores:

$$\overline{DE} = \frac{\overline{AB} + \overline{PQ}}{2} = \frac{12 + \frac{24}{5}}{2} = \frac{42}{5}.$$

722.- En la figura ABCEFG és una habitació amb els cantons perpendiculars tal que $\overline{EF} = 20m$, $\overline{AB} = 10m$, $\overline{AG} = \overline{GF}$.
L'àrea total és $280m^2$.
Volem crear en aquest habitació dos espais d'igual àrea mitjançant una paret $\overline{AD}$.
Calculeu la distància de C a D.

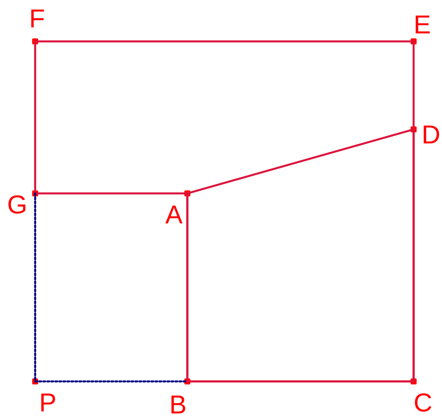


Solució:
Siga $x = \overline{AG} = \overline{GF}$.
$\overline{BC} = 20 - x$.
L'àrea de total de l'habitació és:
$S_{PCEF} - S_{PBAG}$.
$280 = 20 \cdot (1 + x) - 10x$. Resolent l'equació:
$x = 8$.
Aleshores, $\overline{BC} = 12$.
L'àrea del trapezi ABCD és la meitat de l'àrea de l'habitació:

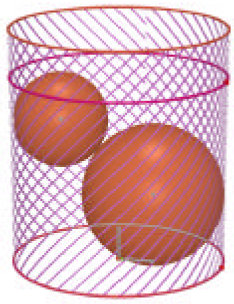
$$S_{ABCD} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}\overline{BC} = \frac{280}{2}.$$

$$\frac{10 + \overline{CD}}{2} 12 = 140.$$

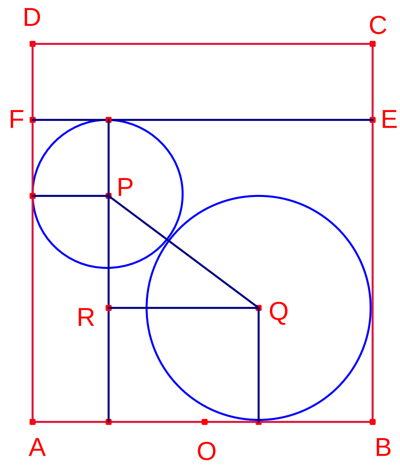
$$\overline{CD} = \frac{40}{3} \approx 13'33m.$$



723.- En un cilindre de diàmetre 27cm i altura 30cm s'ha introduït dues esferes de radis 9cm i 6cm.
S'ompli d'aigua fins cobrir les dues esferes.
Quin és el volum de l'aigua introduïda.



Solució:
Considerem ABCD la secció plana del cilindre que passa pels centres de les dues esferes i és perpendicular a la base del cilindre.

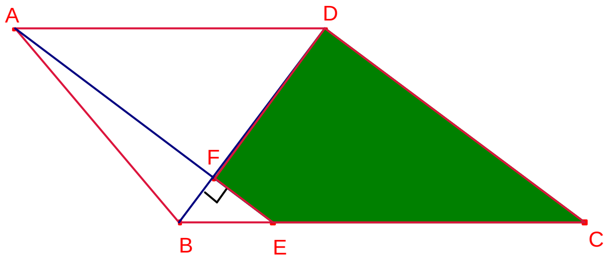


$\overline{AB} = 27$, $\overline{AD} = 30$.
Siga O el centre de la base del cilindre.
$\overline{OA} = \dfrac{27}{2}$.
Siga $\overline{FE}$ el nivell on arriba l'aigua.
Siguen P i Q els centres de les dues esferes.
$\overline{PQ} = 15$.
Siga R la intersecció de les projecció de P i Q sobre la base i el costat del cilindre, respectivament.
$\overline{RQ} = 27 - (6 + 9) = 12$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PQR}$.
$\overline{PR} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$.
$\overline{AF} = 9 + 6 + 9 = 24 \leq 30$.
El volum de l'aigua que cobreix les dues esferes és igual al volum del cilindre de radi $\overline{OA} = \dfrac{27}{2}$ i altura $\overline{AF} = 24$ menys el volum de les dues esferes.

$$V = \pi\left(\frac{27}{2}\right)^2 24 - \left(\frac{4}{3}\pi \cdot 9^3 + \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3\right) = 3114\pi \approx 415'59\text{cm}^3$$

724.- Siga el trapezi ABCD de costats paral·lels $\overline{BC}$, $\overline{AD}$. A més a més, $\overline{BD}$ és perpendicular a $\overline{DC}$.
Siga E un punt del costat $\overline{BC}$ tal que $\overline{BD}$, $\overline{AE}$ són perpendiculars.
Siga F la intersecció dels segments $\overline{BD}$, $\overline{AE}$.
Si $\overline{AB}=41$, $\overline{AD}=50$ i $\overline{BF}=9$ calculeu l'àrea del quadrilàter FECD.



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABF}$:

$\overline{AF}=\sqrt{41^2-9^2}=40$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AFD}$:

$\overline{FD}=\sqrt{50^2-40^2}=30$.

Els triangles $\overset{\Delta}{BEF}$, $\overset{\Delta}{DAF}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\dfrac{\overline{DF}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{BF}}{\overline{BE}}$.

$\dfrac{30}{50}=\dfrac{9}{\overline{BE}}$. Aleshores:

$\overline{BE}=15$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BEF}$:

$\overline{FE}=\sqrt{15^2-9^2}=12$.

Els triangles $\overset{\Delta}{BEF}$, $\overset{\Delta}{BCD}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\dfrac{\overline{FE}}{\overline{BF}}=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}}$.

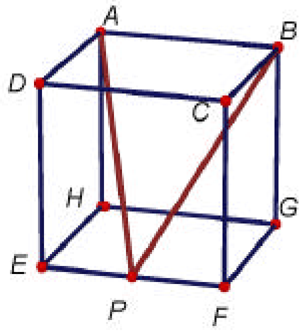
$\dfrac{12}{9}=\dfrac{\overline{CD}}{9+30}$. Aleshores:

$\overline{CD}=52$.

El quadrilàter FECD és un trapezi rectangle la seua àrea és:

$S_{FECD}=\dfrac{\overline{CD}+\overline{FE}}{2}\overline{FD}=\dfrac{52+12}{2}30=960$.

725.- Siga ABCDEFGH un cub d'aresta 2.
Siga P el punt mig de l'aresta $\overline{EF}$.
Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APB}$.



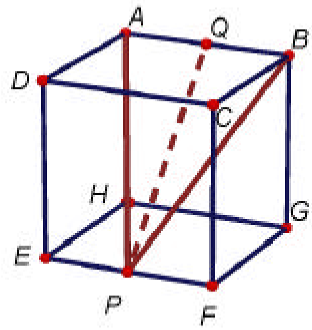
Solució.

El triangle $\overset{\Delta}{APB}$ és isòsceles
Siga Q el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.
$\overline{PQ} = \overline{FB}$.

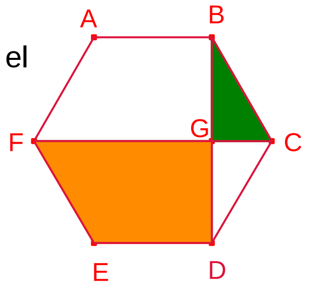
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FGB}$:
$\overline{PQ} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APB}$ és:

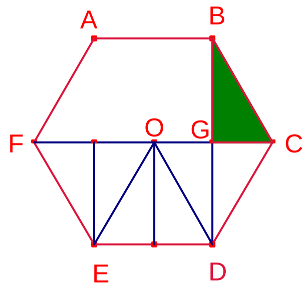
$$S_{APB} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{PQ}}{2} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$



726.- En l'hexàgon regular ABCDEF les diagonals $\overline{BD}$, $\overline{FC}$ s'intersecten en el punt G.
Determineu la proporció entre les àrees del quadrilàter FEDG i el triangle $\overset{\Delta}{BCG}$.

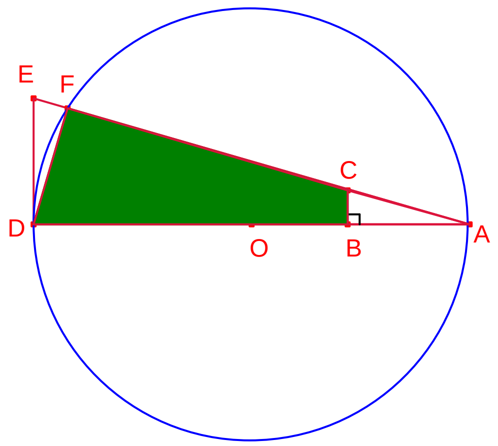


Solució:



La raó de proporcionalitat de les àrees és 5:1.

727.- En la figura $\angle ABC = 90^{o}$, $\overline{BC}$ i $\overline{DE}$ són paral·lels.
$\overline{DF} = \overline{AB}$, $\overline{AD} = 24$, $\overline{AE} = 25$. O és el centre del cercle.
Determineu el perímetre del quadrilàter CBDF.



Solució:

Per ser angle inscrit en la circumferència i abraçar el diàmetre $\overline{AD}$, $\angle DFA = 90^{o}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADE}$:

$\overline{DE} = \sqrt{25^2 - 24^2} = 7$.

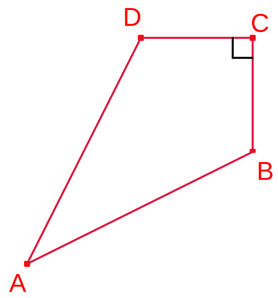
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DFE}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ són iguals.

$\overline{EF} = \overline{BC}$. $\overline{AC} = \overline{DE} = 7$.

El perímetre del quadrilàter CBDF és:

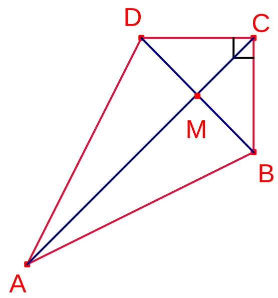
$p = \overline{CB} + \overline{BD} + \overline{DF} + \overline{FC} = \overline{EF} + \overline{BD} + \overline{AB} + \overline{FC} = \overline{AD} + \overline{AE} - \overline{AC} = 24 + 25 - 7 = 42$.

728.- Siga el quadrilàter ABCD $\overline{BC}=\overline{CD}=1$, $\overline{AB}=\overline{AD}=\sqrt{5}$, $C=90^{o}$.
Calculeu l'àrea del quadrilàter ABCD.



Solució:
El quadrilàter és un estel, les seues diagonals són perpendiculars.
La seua àrea és:

$$S_{ABCD}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}{2}.$$



Siga M la intersecció de les diagonals.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCD}$:

$$\overline{BD}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

$$\overline{BM}=\overline{CM}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABM}$:

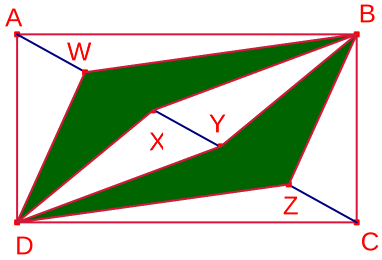
$$\overline{AM}=\sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

$$\overline{AC}=\overline{AM}+\overline{CM}=\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}.$$

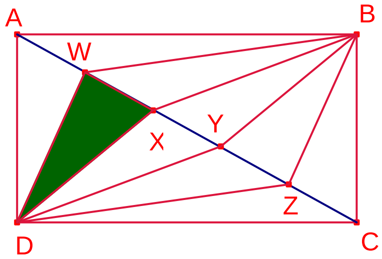
L'àrea de l'estel ABCD és:

$$S_{ABCD}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BD}}{2}=\frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2}=2.$$

729.- Siga el rectangle ABCD de costats $\overline{AB}=9$, $\overline{AD}=5$.
La diagonal $\overline{AC}$ és divideix en 5 parts iguals pels punts, W, X, Y, Z.
Determineu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:
Dos triangles que tenen la mateixa base i la mateixa altura tenen la mateixa àrea, aleshores els triangles $\overset{\Delta}{DXW}$, $\overset{\Delta}{DYZ}$, $\overset{\Delta}{BXW}$, $\overset{\Delta}{BYZ}$ tenen la mateixa àrea.



Els triangles $\overset{\Delta}{DXW}$ $\overset{\Delta}{DAC}$ que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases. Aleshores:

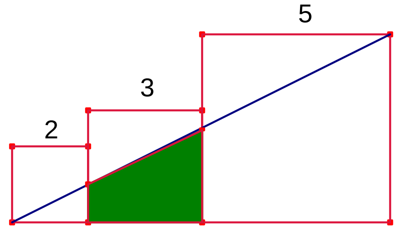
$$\frac{S_{DXW}}{S_{DAC}}=\frac{\overline{XW}}{\overline{AC}}=\frac{1}{5}.$$

$$S_{DXW}=\frac{1}{5}S_{DAC}=\frac{1}{5}\frac{9\cdot 5}{2}=\frac{9}{2}.$$

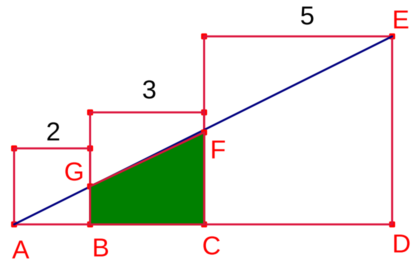
L'àrea de la zona ombrejada és igual a quatre vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DXW}$:

$$S=4\cdot S_{DXW}=4\cdot\frac{9}{2}=18.$$

730.- En la figura hi ha 3 quadrats de dimensions 2, 3, 5.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:
La zona ombrejada és un trapezi rectangle BCFG.



$\overline{AD} = 10$, $\overline{DE} = 5$.

$\overline{AC} = 5$, $\overline{AB} = 2$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADE}$, $\overset{\Delta}{ACF}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}.$$

$$\frac{\overline{CF}}{5} = \frac{5}{10}.$$ Aleshores, $\overline{CF} = \frac{5}{2}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADE}$, $\overset{\Delta}{ABG}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{BGF}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}.$$

$$\frac{\overline{BG}}{2} = \frac{5}{10}.$$ Aleshores, $\overline{BG} = 1$.

L'àrea del trapezi BCFG és:

$$S_{BCFG} = \frac{\overline{CF} + \overline{BG}}{2}\overline{BC} = \frac{\frac{5}{2} + 1}{2} 3 = \frac{21}{4}.$$