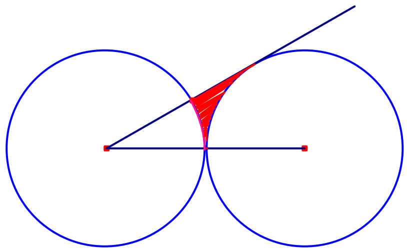
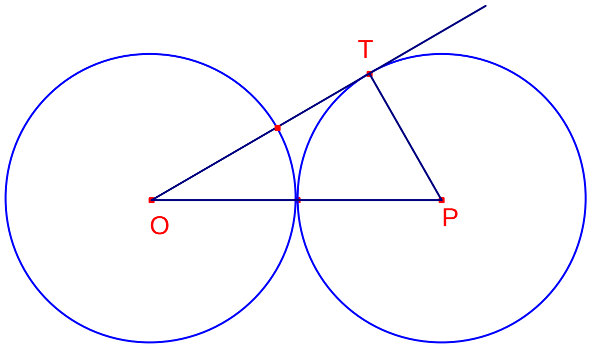
Problemes de Geometria per a l'ESO 74

731.- Dues circumferències de radi 10 són tangents exteriors.
Pel centre d'una circumferència tracem una tangent a l'altra.
Determineu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:
Siguen O i P els centre de les circumferències.
Siga T el punt de tangència.
$\angle OTP = 90^{\circ}$.
$\overline{PT} = 10$, $\overline{OP} = 20$.
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTP}$, menys l'àrea de dos sectors circulars de radi 10 i que la suma dels angles és 90º. Aleshores, l'àrea ombrejada és igual a l'àrea l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTP}$ menys l'àrea d'un quadrat de cercle de radi 10.



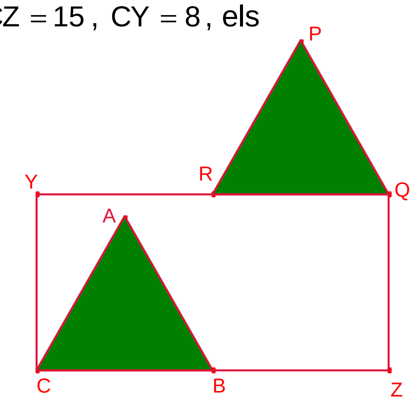
Notem que encara que no és necessari per al problema els angles dels sectors són 30º i 60º.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTP}$:
$\overline{OT} = 10\sqrt{3}$.
L'àrea de la zona ombrejada és:

$$S = \frac{\overline{PT} \cdot \overline{OT}}{2} - \frac{1}{4}\pi\overline{OT}^2.$$

$$S = \frac{10 \cdot 10\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{4}\pi 10^2 = 25\left(2\sqrt{3} - \pi\right) \approx 8'06.$$

732.- En la figura, YQZC és un rectangle de costats $\overline{CZ} = 15$, $\overline{CY} = 8$, els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{PQR}$ tenen costat 9.
Calculeu la longitud del segment $\overline{AP}$.



Solució 1:
Siga L la projecció de A sobre el costat $\overline{CZ}$.
Siga M la projecció de A sobre el costat $\overline{YQ}$.
Siga N la projecció de P sobre el costat $\overline{YQ}$.
Siga K la projecció de A sobre la recta PN.

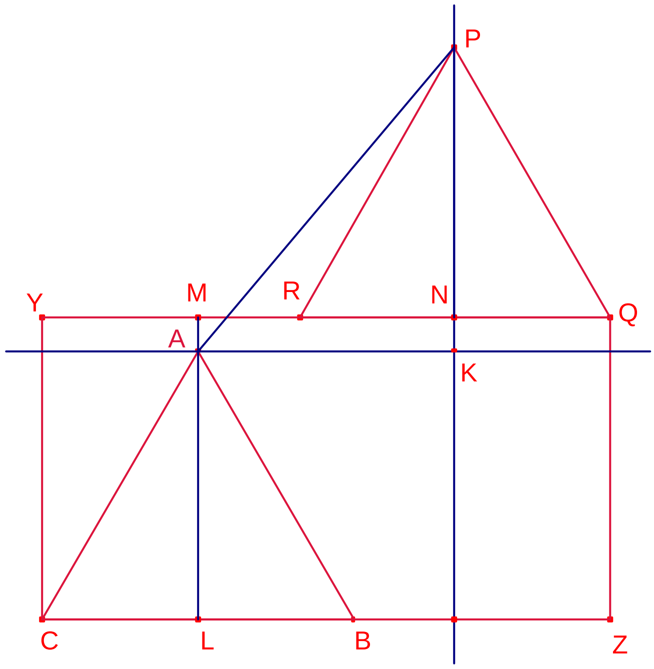
$\overline{CL} = \frac{9}{2}$, $\overline{QN} = \frac{9}{2}$.

$\overline{MN} = \overline{CZ} - \left(\overline{CL} + \overline{QN}\right) = 15 - 9 = 6$.

$\overline{PK} = \overline{AL} + \overline{AM} = \overline{CY} = 8$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKP}$:

$\overline{AP} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.



Solució 2:

El triangle $\overset{\Delta}{PQR}$ és traslladat del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ mitjançant el vector $\overrightarrow{CR}$. Aleshores:

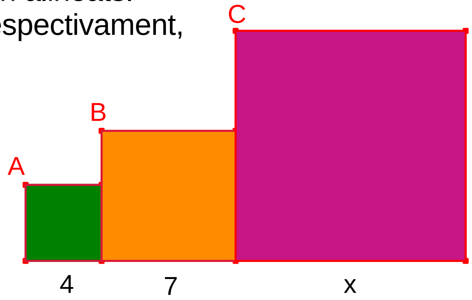
$\overline{AP} = \overline{CR}$.

$\overline{YR} = \overline{CZ} - \overline{RQ} = 15 - 9 = 6$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AYR}$:

$\overline{AP} = \overline{CR} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

733.- En els quadrats adjacents, els vèrtex A, B i C estan alineats.
Si els costs dels dos quadrats menuts mesuren 4, i 7, respectivament, calculeu la mesura del costat del quadrat gran.

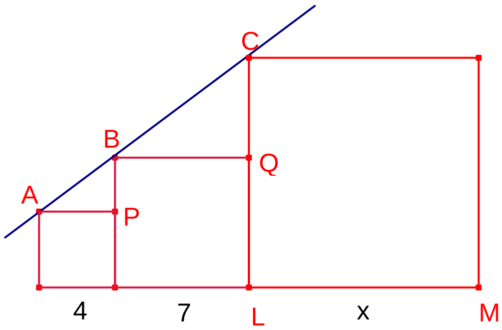


Solució:

Siga $x = \overline{LM} = \overline{CL}$ costats del quadrat gran.

$\overline{AP} = 4$, $\overline{BP} = 3$.

$\overline{BQ} = 7$, $\overline{CQ} = x - 7$.



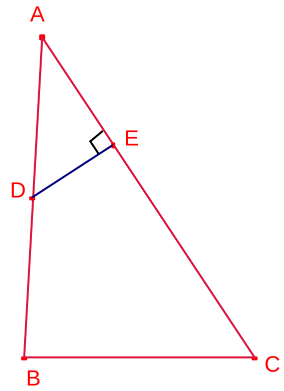
Els triangles $\overset{\Delta}{APB}$, $\overset{\Delta}{BQC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{CQ}}{\overline{BQ}}.$$

$\frac{3}{4} = \frac{x-7}{7}$. Resolent l'equació:

$$x = \frac{49}{4} = 7'25,$$

734.- En la figura, $\overline{AD} = \overline{BD} = 5$, $\overline{EC} = 8$ i $\overline{AE} = 4$, $\angle DEA = 90º$.
Determineu la longitud del segment $\overline{BC}$.

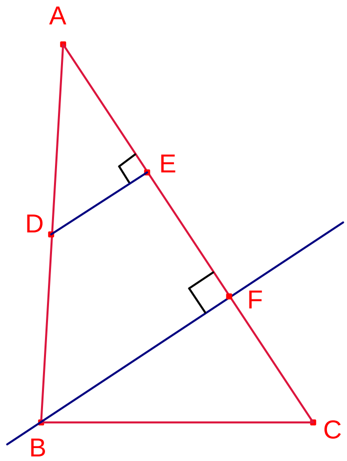


Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AED}$:

$\overline{DE} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$.

Tracem la perpendicular al costat $\overline{AC}$ que passa per B que talla el costat $\overline{AC}$ en el punt F.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AED}$, $\overset{\Delta}{AFB}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{DB}}$, $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AD}} = \dfrac{\overline{BF}}{\overline{AB}}$.

$\dfrac{4}{5} = \dfrac{\overline{EF}}{5}$, aleshores, $\overline{EF} = 4$.

$\dfrac{3}{5} = \dfrac{\overline{BF}}{10}$, aleshores, $\overline{BF} = 6$.

$\overline{CF} = \overline{EC} - \overline{EF} = 8 - 4 = 4$.

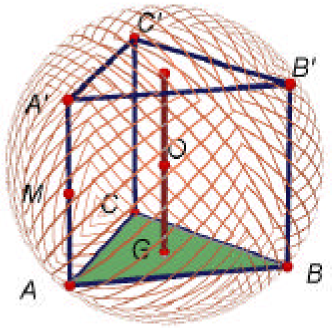
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BFC}$:

$\overline{BC} = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13}$.

735.- En un prima regular triangular l'aresta lateral mesura 2 i el volum és igual a $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
Determineu el radi de l'esfera circumscrita al prisma.
Selectivitat russa 2000 2.6.

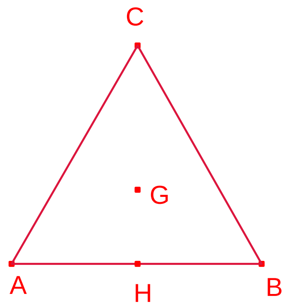
Solució:

Siga ABCA'B'C' el prisma de base $\overset{\Delta}{ABC}$ triangle equilàter i recte.
$\overline{AA'} = 2$.
Siga $a = \overline{AB}$ arestes de la base.
L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ és:



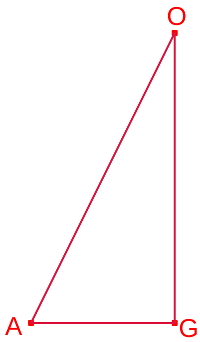
$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
El volum del prisma és: $V = S_b \cdot h$.
$\frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}2$. Resolent l'equació:
$a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.
El centre de l'esfera circumscrita es troba en la perpendicular a la base que passa pel baricentre del triangle i a la meitat de l'altura del prisma.

Siga G el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga O el centre de l'esfera circumscrita.
Siga $r = \overline{OA}$ el seu radi.
Siga H el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.



$\overline{AH} = \frac{1}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
$\overline{CH} = \sqrt{3} \cdot \overline{AH} = 1$.
Aplicant la propietat del baricentre:
$\overline{AG} = \overline{CG} = \frac{2}{3}\overline{CH} = \frac{2}{3}$.

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{AGO}$:

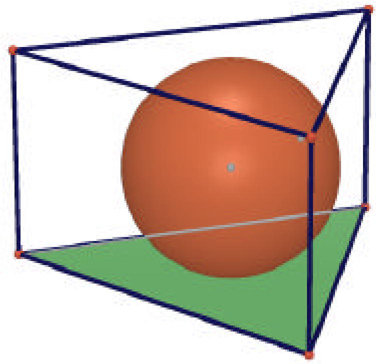


$\overline{GO} = \frac{1}{2}\overline{AA'} = 1$.
Aplicant el teorema de Pitàgores:
$r^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 1^2$. Resolent l'equació:
$r = \frac{\sqrt{13}}{3}$.

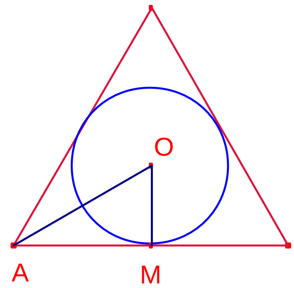
736.- En un prisma triangular regular hi ha inscrita una esfera. Determineu la proporció entre el volum de l'esfera i el del prisma.

Solució:

Un prisma triangular regular és aquell que té la base un triangle equilàter i és recte.
Siga r el radi de l'esfera de centre O.
Aleshores, l'altura del prisma és 2r.
Siga a l'aresta de la base del prisma.



Siga la secció de l'esfera que passa pel centre.
La circumferència màxima de l'esfera paral·lela a les bases del prisma és tangent interior al triangle equilàter que forma la secció en el prisma.
Siga M el punt de tangència de l'esfera en una cara lateral:



$\overline{OM} = r$, $\overline{AM} = \frac{a}{2}$:

$\frac{r}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Aleshores:

$a = 2r\sqrt{3}$.

El volum de l'esfera és:

$V_e = \frac{4}{3}\pi r^3$.

El volum del prisma és:

$V_p = S_b \cdot h = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} 2r$.

$V_p = \frac{\left(2r\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} 2r$.

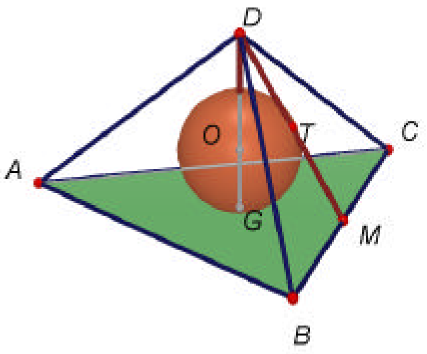
$V_p = 6\sqrt{3} \cdot r^3$.

La proporció entre els volums de l'esfera i el prisma és:

$\frac{V_e}{V_p} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{6\sqrt{3} \cdot r^3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27} \approx 0'403$.

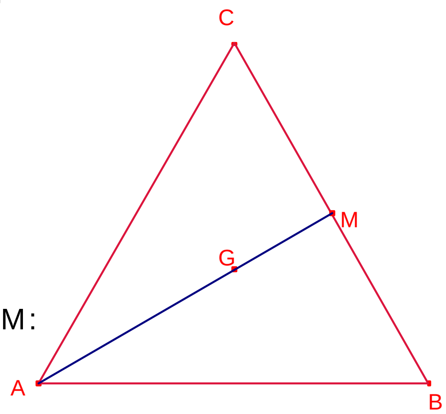
737.- Una piràmide regular de base triangular té altura 6 i volum $72\sqrt{3}$.
Determineu el radi de l'esfera inscrita a la piràmide.
Selectivitat russa 2000 1.6.

Solució:
La piràmide regular aleshores, és recta i la base un triangle equilàter.



Siga la piràmide ABCD de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.
L'altura de la piràmide s'intersecta en el baricentre G del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
El centre de O l'esfera pertany a l'altura $\overline{DG}$
El punt de tangència T de l'esfera i la cara $\overset{\Delta}{BCD}$ pertany a l'apotema $\overline{DM}$.
$\overline{OT}$ és perpendicular a l'apotema $\overline{DM}$.
Siga $\overline{OT} = \overline{OG} = r$ radis de l'esfera.

Siga la secció $\overset{\Delta}{GMD}$ de la piràmide que conté l'altura i l'apotema de la cara $\overset{\Delta}{BCD}$.



Siga $a = \overline{AB}$, aresta de la base.

$V_p = \frac{1}{3}S_b h$.

$V_p = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}6 = 72\sqrt{3}$. Resolent l'equació:

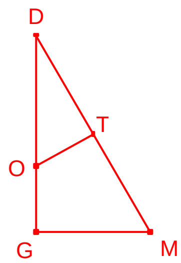
$a = 12$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABM}$:

$\overline{AM} = 6\sqrt{3}$.

Per la propietat del baricentre:

$\overline{GM} = \frac{1}{3}\overline{AM} = 2\sqrt{3}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DGM}$:

$\overline{DM} = 6^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2$.

$\overline{DM} = 4\sqrt{3}$.

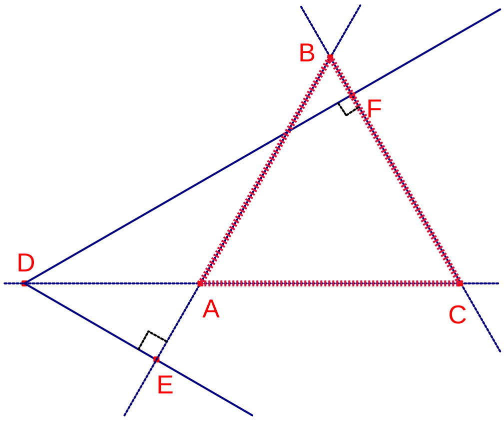
Els triangles $\overset{\Delta}{DGM}$, $\overset{\Delta}{DTO}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{2\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{r}{6-r}$. Resolent l'equació:

$r = 2$.

738.- El punt D és un punt en l'extensió del costat $\overline{AC}$ d'un triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ més a prop del vèrtex A.
La distància de D a la recta AB és 4, i la distància a la recta BC és 10.

Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
KöMaL, gener 2013, K365.



Solució:
Siga E la projecció de D sobre la recta AB. $\overline{DE} = 4$.
Siga F la projecció de D sobre la recta BC. $\overline{DF} = 10$.

En el triangle rectangle $\overset{\Delta}{DEA}$: $\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{AD}$, $\overline{DE} = 4$.

Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$\overline{AD} = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

Siga $a = \overline{AB}$ costat del triangle equilàter.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DEA}$, $\overset{\Delta}{DFC}$ són semblants. Aplicant el teorema de tales:

$$\frac{\overline{DF}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}:$$

$$\frac{10}{\frac{8\sqrt{3}}{3} + a} = \frac{4}{a}.$$ Resolent l'equació:

$$a = 4\sqrt{3}.$$

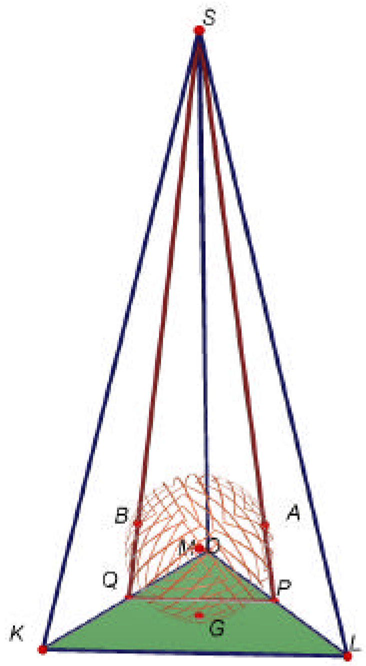
L'àrea del triangle equilàter és:

$$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\left(a^2\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}.$$

739.- Una piràmide triangular regular KLMS, l'altura sobre la base $\overset{\Delta}{KLM}$ és igual a 6 i les arestes de la base 3.

L'esfera inscrita en la piràmide és tangent a les cares $\overset{\Delta}{LSM}$ i $\overset{\Delta}{MSK}$ en els punts A i B, respectivament. Determineu la longitud del segment $\overline{AB}$

Selectivitat russa 2000 3.6.



Solució:

La piràmide és triangular regular aleshores, és recta i la base $\overset{\Delta}{KLM}$ un triangle equilàter.

Siga P el punt mig de l'aresta $\overline{LM}$.

Siga Q el punt mig de l'aresta $\overline{KM}$.

L'altura de la piràmide s'intersecta en el baricentre G del triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$.

El centre de O l'esfera pertany a l'altura $\overline{SG}$

El punt de tangència A de l'esfera i la cara $\overset{\Delta}{LSM}$ pertany a l'apotema $\overline{SP}$.

$\overline{OA}$ és perpendicular a l'apotema $\overline{SP}$.

$\overline{OB}$ és perpendicular a l'apotema $\overline{SQ}$.

$\overline{SA} = \overline{SB}$.

Siga $\overline{OA} = \overline{OG} = r$ radis de l'esfera.

Siga la secció $\overset{\Delta}{GPS}$ de la piràmide que conté l'altura i l'apotema de la cara $\overset{\Delta}{LSM}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KPL}$: $\overline{KP} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Per la propietat del baricentre: $\overline{GP} = \frac{1}{3}\overline{KP} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{SGP}$:

$\overline{SP} = 6^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2$. $\overline{SP} = \frac{7}{2}\sqrt{3}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{SGP}$, $\overset{\Delta}{SAO}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{7}{2}\sqrt{3}} = \frac{r}{6-r}$. Resolent l'equació: $r = \frac{3}{4}$. $\frac{\overline{SA}}{\frac{3}{4}} = \frac{6}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$. Aleshores, $\overline{SA} = \overline{SB} = 3\sqrt{3}$.

$\overline{PQ}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{KLM}$, aleshores:

$\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{KL} = \frac{3}{2}$.

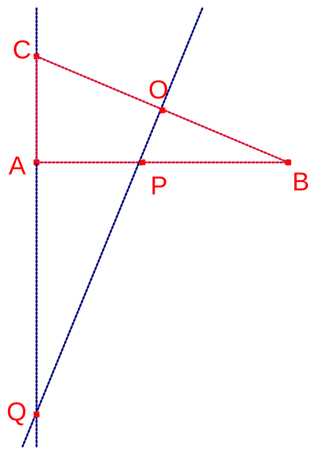
Els triangles $\overset{\Delta}{SPQ}$, $\overset{\Delta}{SAB}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{AB}}{3\sqrt{3}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{2}\sqrt{3}}$, aleshores, $\overline{AB} = \frac{9}{7}$.

740.- En un triangle rectangle la mediatriu sobre la hipotenusa talla les rectes que formen els catets en un segment que és igual a la hipotenusa.
Determineu la mesura dels angles.
KöMaL, gener 2013, B4504.

Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o$, $a > c \geq b$.
Siga O el punt mig de la hipotenusa $\overline{BC}$.
La mediatriu de la hipotenusa talla el costat $\overline{AB}$ en el punt P i a la prolongació del costat $\overline{CA}$ en el punt Q, tal que $\overline{PQ} = a$.
Siga $x = \overline{AQ}$.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{AQP}$ són iguals.
Aleshores, $x = c$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{OQC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{CQ}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.$$

$$\frac{\frac{a}{2}}{b+c} = \frac{b}{a}. \quad a^2 = 2b(b+c).$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$b^2 + c^2 = 2b^2 + 2cb.$$

$$b^2 + 2cb - c^2 = 0.$$

Dividint l'expressió per $c^2 \neq 0$.

$\left(\frac{b}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{b}{c}\right) - 1 = 0$. Resolent l'equació en la incògnita $\frac{b}{c}$:

$$\frac{b}{c} = -1 + \sqrt{2}.$$

$$\frac{b}{c} = \operatorname{tg}B, \ \operatorname{tg}\frac{45^o}{2} = -1 + \sqrt{2}.$$

Aleshores, $B = \frac{45^o}{2}$, $C = 90^o - B = \frac{135^o}{2}$.

Solució 2:

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{AQP}$ són iguals.
$\overline{AP} = \overline{AC}$.
Aleshores, $\angle ACP = 45^o$
La recta OP és la mediatriu de la hipotenusa, aleshores:
$\overline{BP} = \overline{CP}$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{CBP}$ és isòsceles, aleshores:
$B = \angle PCB$
$B + \angle PCB = 45^o$.
Aleshores:

$$B = \frac{45^o}{2}, \ C = 90^o - B = \frac{135^o}{2}.$$