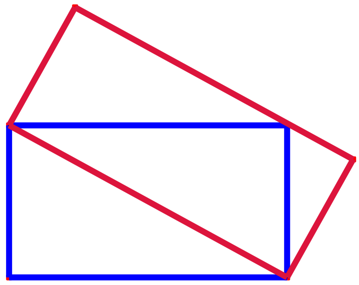
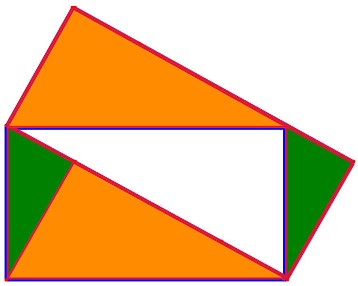
Ricard Peiró i Estruch

Problemes de Geometria per a l'ESO 75

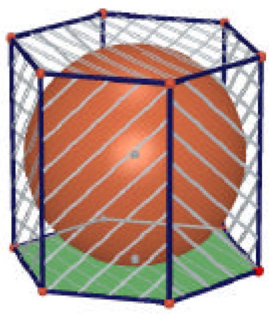
741.- Compareu les àrees dels dos rectangles.



Solució:
Són iguals.

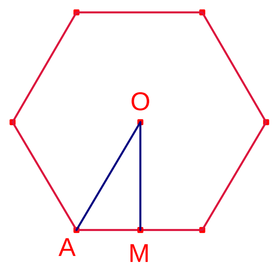


742.- En un prisma hexagonal regular hi ha inscrita una esfera. Determineu la proporció entre el volum de l'esfera i el del prisma.



Solució:
Un prisma hexagonal regular és aquell que té la base un hexàgon i és recte.
Siga r el radi de l'esfera de centre O.
Aleshores, l'altura del prisma és 2r.
Siga a l'aresta de la base del prisma.

Siga la secció de l'esfera que passa pel centre.
La circumferència màxima de l'esfera paral·lela a les bases del prisma és tangent interior l'hexàgon regular que forma la secció en el prisma.
Siga M el punt de tangència de l'esfera en una cara lateral:



$\overline{OM} = r$, $\overline{AM} = \frac{a}{2}$:

$\frac{r}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}$. Aleshores:

$a = \frac{2}{3} r\sqrt{3}$.

El volum de l'esfera és:

$V_e = \frac{4}{3}\pi r^3$.

El volum del prisma és:

$V_p = S_b \cdot h = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} 2r$.

$$V_p = \frac{6\left(\frac{2}{3}r\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4} 2r.$$

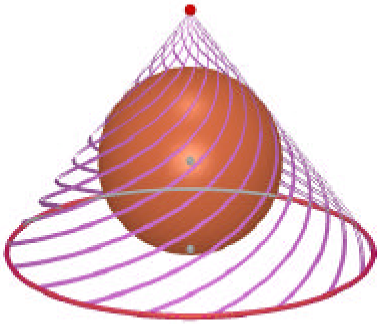
$V_p = 4\sqrt{3} \cdot r^3$.

La proporció entre els volums de l'esfera i el prisma és:

$$\frac{V_e}{V_p} = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{4\sqrt{3} \cdot r^3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{9} \approx 0'605.$$

743.- El radi d'un con recte és 3 i l'altura 4.
Calculeu la proporció entre els volums de l'esfera inscrita al con i el con.

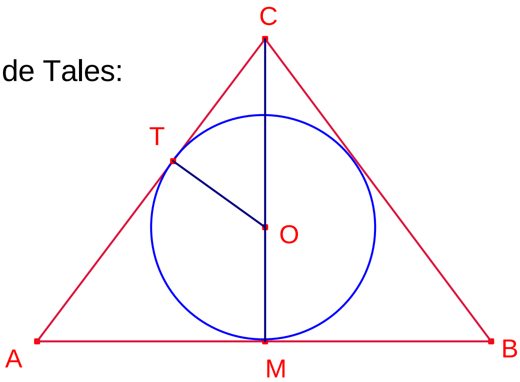
Solució:



Siga $\overline{AB}$ el diàmetre del cercle de la base.
Siga M el centre $\overline{MA} = 3$.
Siga C el vèrtex del con, $\overline{MC} = 4$.
El volum del con és:

$$V_c = \frac{1}{3}\pi 3^2 \cdot 4.$$

Siga O el centre de l'esfera.
Siga T el punt de tangència de l'esfera i la generatriu $\overline{AC}$.
Per ser el con recte el centre O es troba en l'altura $\overline{MC}$.
Siga $r = \overline{OM} = \overline{OT}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$:
$\overline{AC} = 5$.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AMC}$, $\overset{\Delta}{OTC}$. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{r}{4-r} = \frac{3}{5}$. Resolent l'equació:

$$r = \frac{3}{2}.$$

El volum de l'esfera tangent al con és:

$$V_e = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^3.$$

La proporció entre el volum de l'esfera i del con és:

$$\frac{V_e}{V_c} = \frac{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^3}{\frac{1}{3}\pi 3^2 \cdot 4} = \frac{3}{8}.$$

744.- En una piràmide triangular regular l'angle diedre de la base és igual a φ.
Determineu l'angle format per dues arestes laterals en el vèrtex de la piràmide.
Selectivitat russa 1995 1.6.

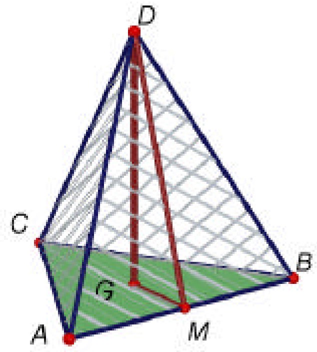
Solució:
La piràmide és triangular regular, és a dir, la base és un triangle equilàter i és recta.

Siga ABCD la piràmide triangular regular, de base $\overset{\Delta}{ABC}$ triangle equilàter.

Siga G el peu de l'altura. G és el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga $a = \overline{AB}$ aresta de la base

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$ de la base .



$\overline{AM} = \frac{a}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$:

$\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Aplicant la propietat de la bisectriu:

$\overline{GM} = \frac{1}{3}\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DGM}$:

$$\overline{DM} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}a}{\cos\varphi}.$$

Siga $\alpha = \angle ADM$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADM}$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\overline{AM}}{\overline{DM}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{6\cos\varphi}} = \sqrt{3}\cos\varphi.$$

$\alpha = \text{arctg}\left(\sqrt{3}\cos\varphi\right)$.

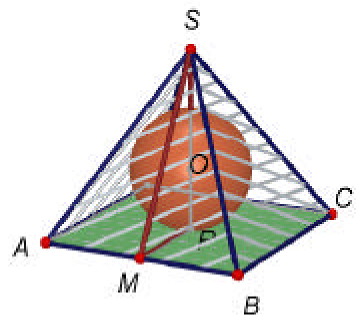
L'angle format per dues arestes laterals en el vèrtex de la piràmide és:

$2\alpha = 2\text{arctg}\left(\sqrt{3}\cos\varphi\right)$.

745.- En una piràmide quadrangular regular la raó entre l'aresta lateral i l'aresta de la base és igual a $\frac{\sqrt{5}}{2}$. El radi de l'esfera inscrita a la piràmide és 1.
Determineu el volum de la piràmide.
Selectivitat russa 1996 3.7.

Solució:
Siga la piràmide recta ABCDS de base un quadrat ABCD de costat $\overline{AB}=a$ i aresta lateral $\overline{SA}=\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.

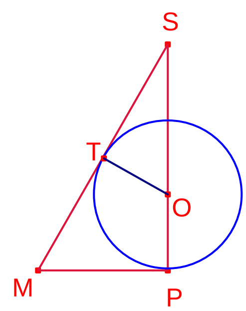


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMS}$:
$\overline{SM}=a$.
Siga P el centre del quadrat ABCD. L'altura de la piràmide és $\overline{SP}$.
$\overline{MP}=\frac{a}{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MPS}$

$$\overline{SP}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Siga O el centre de l'esfera inscrita a la piràmide.



Siga T el punt de tangència de l'esfera i la cara $\overset{\Delta}{ABS}$.
El punt T pertany a l'apotema $\overline{SM}$.
Siga $\overline{OP}=\overline{OT}=1$.

$$\overline{OS}=\frac{\sqrt{3}}{2}a-1.$$

Els triangles rectangle $\overset{\Delta}{MPS}$, $\overset{\Delta}{OTS}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\frac{a}{2}}{a}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}a-1}.$$ Resolent l'equació:

$a=2\sqrt{3}$.
El volum de la piràmide és:

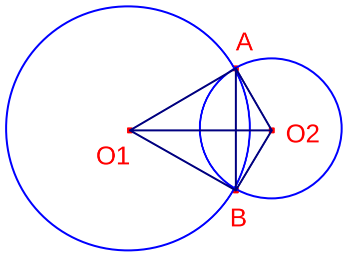
$$V_p=\frac{1}{3}a^2\cdot\overline{SP}=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{3}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}2\sqrt{3}=12.$$

746.- La raó entre les longituds de dues circumferències secants és igual a $\sqrt{3}$.
La corda comuna a aquestes circumferències abraça en la menor d'elles un arc de 120º.
Determineu l'arc que abraça aquesta corda en la circumferència major.
Selectivitat russa 1996 1.4.

Solució:

La raó entre els radis de les dues circumferències és el mateix que la longitud $\sqrt{3}$.

Siga $\overline{AB}$ la corda comuna a les dues circumferències.
Siga O_1 el centre de la circumferència gran.
Siga O_2 el centre de la circumferència menuda, $\angle AO_2B = 120^o$.



Siga $\overline{O_2A} = r$, $\overline{O_1A} = r\sqrt{3}$.
Siga $\angle AO_1B = \alpha$.

$\angle AO_1O_2 = \frac{\alpha}{2}$, $\angle AO_2O_1 = 60^o$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $O_1\overset{\Delta}{A}O_2$:

$\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{r\sqrt{3}}{\sin 60^o}$. Simplificant:

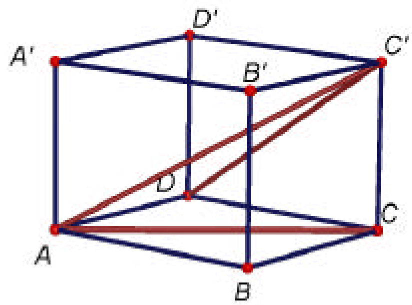
$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

$\frac{\alpha}{2} = 30^o$.

Aleshores: $\alpha = 60^o$.

747.- Els angles que formen la diagonal d'un ortoedre amb la base i una cara són β i γ si l'altura és h, determineu el seu volum.
Selectivitat russa 6.6

Solució:
Siga l'ortoedre ABCDA'B'C'D'.
Siga la diagonal $\overline{AC'}$.
L'angle que forma la diagonal i el plànol de la base és $\beta = \angle C'AC$.
L'angle que forma la diagonal i el plànol CDD'C' és $\gamma = \angle AC'D$.
Siga $h = \overline{CC'}$ altura de l'ortoedre.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACC'}$:

$$\overline{AC} = \frac{h}{tg\beta}, \quad \overline{AC'} = \frac{h}{\sin\beta}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADC'}$:

$$\overline{DC'} = \overline{AC'}\cos\gamma.$$

$$\overline{DC'} = \frac{h}{\sin\beta}\cos\gamma.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DCC'}$:

$$\overline{CD} = \frac{h}{\sin\beta}\sqrt{\cos^2\gamma - \sin^2\beta}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADC}$:

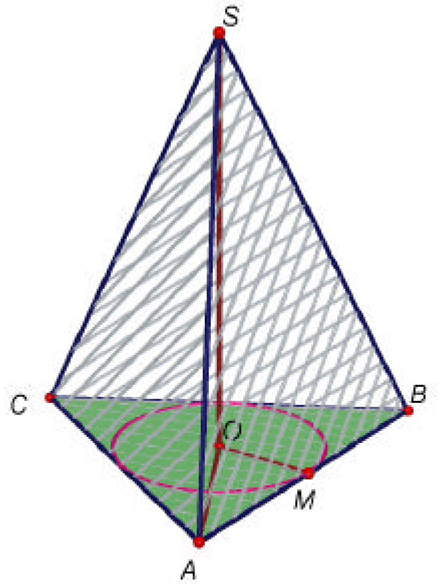
$$\overline{AD} = \sqrt{\left(\frac{h}{tg\beta}\right)^2 - \left(\frac{h}{\sin\beta}\sqrt{\cos^2\gamma - \sin^2\beta}\right)^2} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}h.$$

El volum de l'ortoedre és:

$$V = \overline{CD}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{CC'} = \frac{\sin\gamma\sqrt{\cos^2\gamma - \sin^2\beta}}{\sin^2\beta}h^3.$$

748.- L'altura d'una piràmide triangular regular és 4 vegades el radi de la circumferència inscrita a la base. El volum és 36.
Determineu la mesura de l'aresta de la base:
Selectivitat russa 1997 3.4.

Solució:

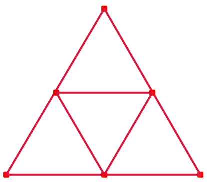


Siga ABCS la piràmide de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.
Siga O l'incentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga $r = \overline{OM}$ radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
L'altura de la piràmide és $\overline{OS} = 4r$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$:
$\overline{AM} = r\sqrt{3}$.
$\overline{AB} = 2r\sqrt{3}$.
El volum de la piràmide és:
$$V = \frac{1}{3}\frac{\overline{AB}^2\sqrt{3}}{4}\overline{OS}.$$
$$\frac{1}{3}\frac{\left(2r\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4}4r = 36.$$
$r^3 = 3\sqrt{3}$. Resolent l'equació:
$r = \sqrt{3}$.
L'aresta de la base mesura:
$\overline{AB} = 2r\sqrt{3} = 6$.

749.-
a) És possible dividir un triangle equilàter en 4 triangles equilàters?.
b) És possible dividir un triangle equilàter en 5 triangles equilàters?.
c) Demostreu que qualsevol triangle equilàter es pot dividir en n triangles equilàters, per a qualsevol $n > 5$.
Ricardo Barroso, problema 671.

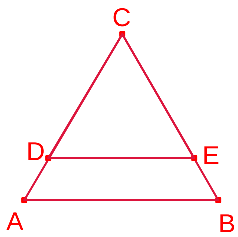
Solució:
a)
Si dibuixem els punts migs dels costats del triangle equilàter es formen 4 triangles equilàters iguals.



n=4

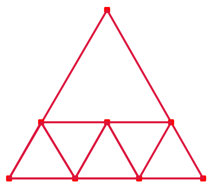
b)
Per dividir un triangle equilàter cada vèrtex ha de ser vèrtex d'un triangle equilàter. Aleshores, en menys de 4 triangles no es pot dividir un triangle equilàter.

Siga DE paral·lel al costat $\overline{AB}$ del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.

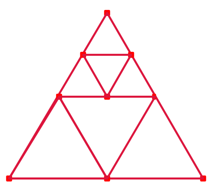


En el trapezi ABED que queda no es poden formar 4 triangles equilàter ja que $\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{k\overline{AD}}{(k+1)\overline{AD}}$, $k \in N$. Es forma un nombre imparell $k + k + 1$ de triangles equilàters.

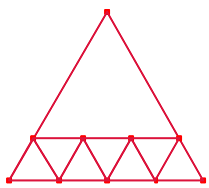
c)
Com que un triangle equilàter pel apartat a) es pot dividir en 4 triangles equilàters és suficient que es puga dividir en $n = 6, 7, 8$ triangles.



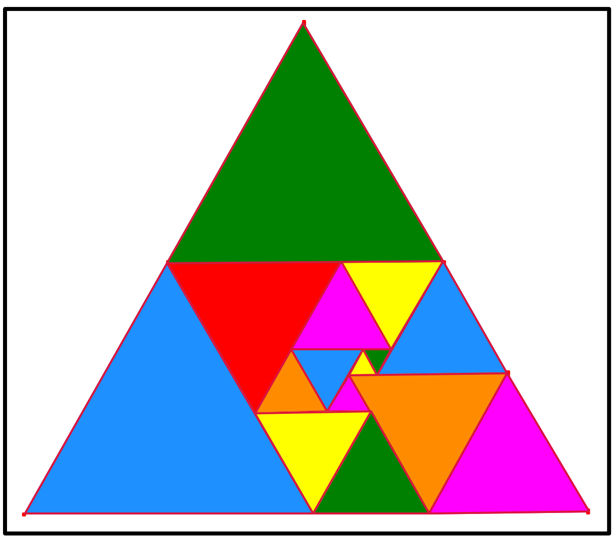
n=6

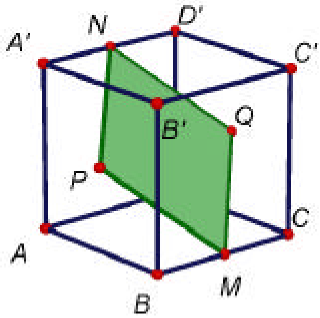


n=7



n=8





750.- Siga el cub ABCDA'B'C'D'.
Siga P el centre de la cara ABB'A'
Siga Q el centre de la cara CDD'C'.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.
Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{A'D'}$.
Calculeu la proporció entre l'àrea del quadrilàter PMQN i l'àrea del cub.

Solució:
Siga $a = \overline{AB}$ aresta del cub.
PMQN és un rombe.
$\overline{PQ} = \overline{BC} = a$.
$\overline{MN} = \overline{A'B} = a\sqrt{2}$.
Notem que no és un quadrat ja que les diagonals no són iguals.
L'àrea del rombe PMQN és:

$$S_{PMQN} = \frac{\overline{PQ} \cdot \overline{MN}}{2} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{2} = a^2 \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

L'àrea del cub és:

$$S_c = 6a^2.$$

La proporció entre les àrees del rombe i el cub és:

$$\frac{S_{PMQN}}{S_c} = \frac{a^2 \frac{\sqrt{2}}{2}}{6a^2} = \frac{\sqrt{2}}{12} \approx 0'1179.$$