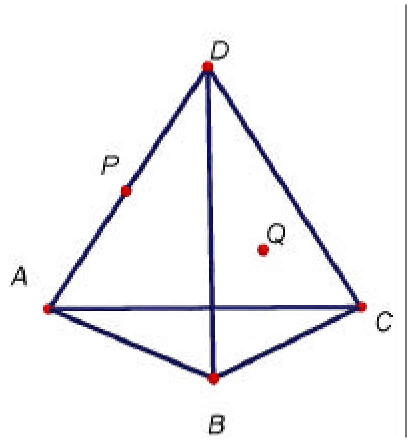
Problemes de Geometria per a l'ESO 76

751.- Siga el tetraedre regular ABCD.
Siga P el punt mig de l'aresta $\overline{AD}$.
Siga Q el centre de la cara $\overset{\Delta}{BCD}$.
Calculeu la proporció $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}$.



Solució:
Siga $a = \overline{AB}$ aresta del tetraedre regular.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.

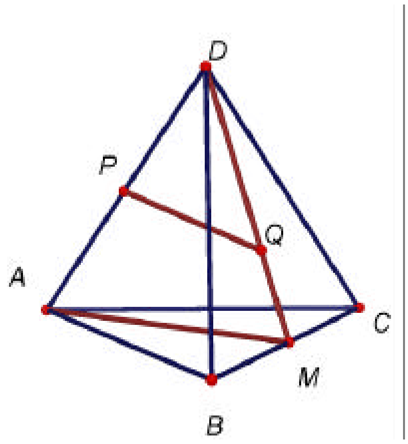
$\overline{AM} = \overline{DM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

Siga $\alpha = \angle ADM$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AMD}$:

$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + a^2 - 2\dfrac{\sqrt{3}}{2}a \cdot a \cdot \cos\alpha$. Simplificant:

$\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.



Aplicant la propietat del baricentre Q del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$:

$\overline{DQ} = \dfrac{2}{3}\overline{DM} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{PQD}$:

$$\overline{PQ}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 - 2\frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}a \cdot \cos\alpha$$

$$\overline{PQ}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 - 2\frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}a \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

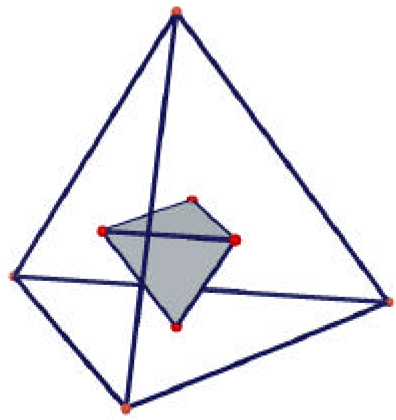
Simplificant:

$\overline{PQ} = \dfrac{1}{2}a$.

$\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{2}$.

Notem que el triangle $\overset{\Delta}{DPQ}$ és isòsceles, aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{DPQ}$, $\overset{\Delta}{AMD}$ són semblants i la raó de semblança és $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{AM}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

752.- Determineu la proporció entre els volums d'un tetraedre regular i el seu dual (dual és aquest que té per vèrtex els centres de les cares del primer).



Solució:

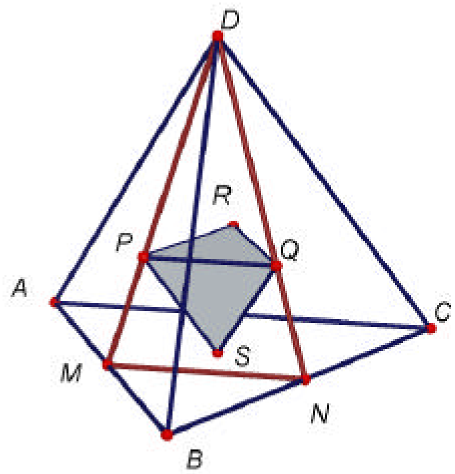
Siga el tetraedre regular ABCD d'aresta $a = \overline{AB}$.

Siga PQRS el tratraedre dual, P centre de la cara $\overset{\Delta}{ABD}$ i Q centre de la cara $\overset{\Delta}{BCD}$.

Els dos tetraedres regulars són semblants, la proporció entre els volums és el cub de la proporció de les seues arestes.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.

Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.



$\overline{MN}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, aleshores:

$\overline{MN} = \frac{a}{2}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{MDN}$, $\overset{\Delta}{PDQ}$ són semblants.

Per la propietat del baricentre P del triangle $\overset{\Delta}{ABD}$.

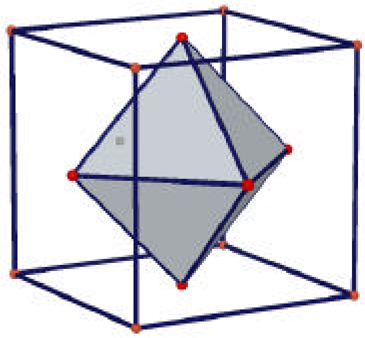
$\frac{\overline{DP}}{\overline{DM}} = \frac{2}{3}$, aleshores:

$\frac{\overline{PQ}}{\overline{MN}} = \frac{2}{3}$.

Per tant, $\overline{PQ} = \frac{2}{3}\frac{a}{2} = \frac{1}{3}a$.

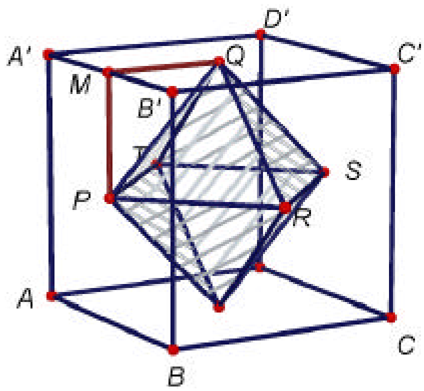
$$\frac{V_{PQRS}}{S_{ABCD}} = \left(\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}.$$

753.- Determineu la proporció entre els volums d'un cub i el seu octaedre dual (dual és l'octaedre que té per vèrtexs els centres de les cares del cub).



Solució:

Siga el cub ABCDA'B'C'D' d'aresta $a=\overline{AB}$.
Siga P el centre de la cara ABB'A'.
Siga Q el centre de la cara A'B'C'D'.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{A'B'}$.



$\overline{PM}=\overline{QM}=\frac{a}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{PMQ}$:

$\overline{PQ}=\sqrt{2}\frac{a}{2}$.

El volum de l'octaedre és igual a doble del volum de la piràmide de base quadrangular PRST i vèrtex Q.
Notem que la seua altura és la meitat de l'aresta del cub.

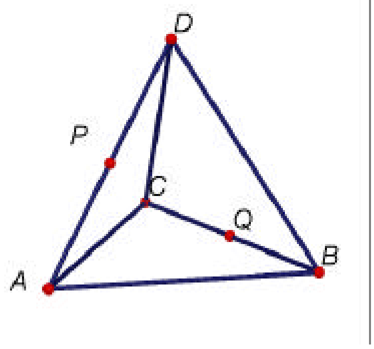
$$V_{oct}=2\left(\frac{1}{3}\overline{PQ}^2\cdot\frac{a}{2}\right).$$

$$V_{oct}=2\left(\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2\cdot\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{6}a^3.$$

La proporció entre els volums de l'octaedre regular i el cub és:

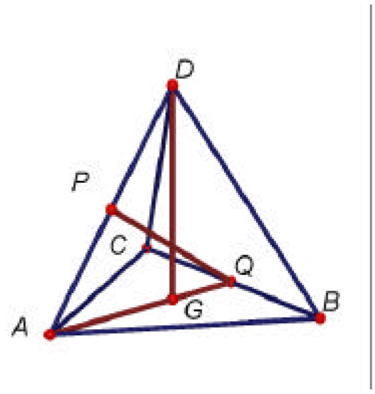
$$\frac{V_{oct}}{V_{cub}}=\frac{\frac{1}{6}a^3}{a^3}=\frac{1}{6}.$$

754.- Siga el tetraedre regular ABCD.
Siga P el punt mig de l'aresta $\overline{AD}$.
Siga Q el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.
Calculeu la proporció $\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}$.



Solució:
Siga $a=\overline{AB}$ aresta del tetraedre regular.

El peu de l'altura del tetraedre regular sobre la base $\overset{\Delta}{ABC}$ és el baricentre G del triangle equilàter.
Siga $\alpha=\angle DAQ$.



$\overline{AQ}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Aplicant la propietat del baricentre G:

$\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AQ}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AGD}$;

$\cos\alpha=\frac{\overline{AG}}{\overline{AD}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{APQ}$:

$$\overline{PQ}^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2-2\frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{3}a\cdot\cos\alpha$$

$$\overline{PQ}^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2-2\frac{a}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

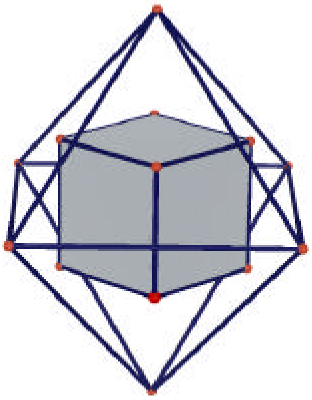
Simplificant:

$\overline{PQ}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Notem que el triangle $\overset{\Delta}{APQ}$ és rectangle ja que $\overline{AQ}^2=\overline{AP}^2+\overline{PQ}^2$.

755.- Determineu la proporció entre els volums d'un octaedre regular i el seu cub dual (dual és el cub que té per vèrtexs els centres de les cares de l'octaedre).



Solució:

Siga $a = \overline{AB}$ aresta de l'octaedre regular ABCDEF.

Siga P el centre de la cara $\overset{\Delta}{ABE}$.

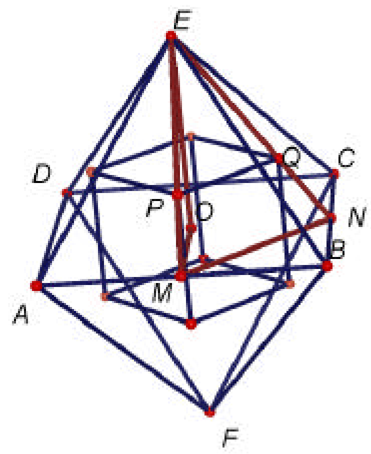
Siga Q el centre de la cara $\overset{\Delta}{BCE}$.

Hem de determina l'aresta $\overline{PQ}$ del cub.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.

Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.

$\overline{MB} = \overline{NB} = \dfrac{a}{2}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MBN}$:

$\overline{MN} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

Els triangles $\overset{\Delta}{MEN}$, $\overset{\Delta}{PEQ}$ són semblants.

Per la propietat del baricentre P del triangle $\overset{\Delta}{ABD}$.

$\dfrac{\overline{EP}}{\overline{EM}} = \dfrac{2}{3}$, aleshores: $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{MN}} = \dfrac{2}{3}$.

Per tant, $\overline{PQ} = \dfrac{2}{3}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}a$.

El volum del cub és: $V_{cub} = \overline{PQ}^3 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}a\right)^3 = \dfrac{2\sqrt{2}}{27}a^3$.

Siga O el centre del quadrat ABCD.

$\overline{OM} = \dfrac{a}{2}$, $\overline{EM} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MOE}$: $\overline{OE} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}a$.

El volum de l'octaedre és igual a dues vegades el volum de la piràmide ABCDE:

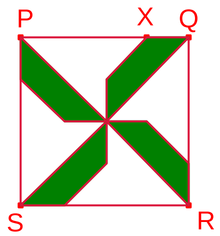
$$V_{oct} = 2\left(\frac{1}{3}a^2\frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3.$$

La proporció entre els volums és: $\dfrac{V_{cub}}{V_{oct}} = \dfrac{\dfrac{2\sqrt{2}}{27}a^3}{\dfrac{\sqrt{2}}{3}a^3} = \dfrac{2}{9}$.

Aprofitem aquest problema per calcular la distància entre dues cares oposades d'un octaedre. Aquesta distància és igual a la mesura de la diagonal del cub dual.

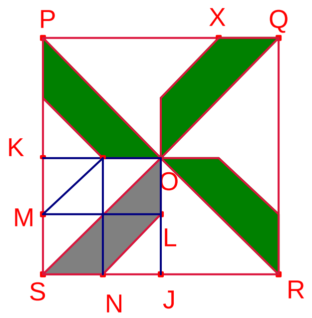
$d = \sqrt{3\overline{PQ}^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}a$.

756.- Quatre trapezis isòsceles iguals tenen el costat paral·lel més gran sobre la diagonal del quadrat PQRS (veure figura).



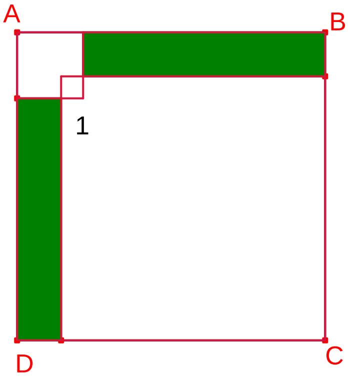
El punt X divideix el costat $\overline{PQ}$ en dos segments que estan en proporció 3:1.
Determineu la proporció entre l'àrea ombrejada i l'àrea del quadrat.
UKMT, intermediate 2013. problema 13.

Solució:



$\frac{3}{8}$.

757.- Siga el quadrat ABCD d'àrea 196.
Dos quadrats interiors s'intersecten formant un quadrat de costat 1.
Si el costat quadrat interior gran és 4 vegades el costat del quadrat menut, determineu l'àrea de la zona ombrejada.
UKMT, intermediate 2013. problema 21.



Solució:
Si L'àrea del quadrat ABCD és 196 el seu costat mesura:

$AB = \sqrt{196} = 14$.

Siga $\overline{AM} = x$ costat el quadrat AKLM.

El costat del quadrat CPQR és $\overline{PC} = 4x$.

$\overline{AM} + \overline{PC} = \overline{AB} + 1$

$x + 4x = 14 + 1$. Resolent l'equació:

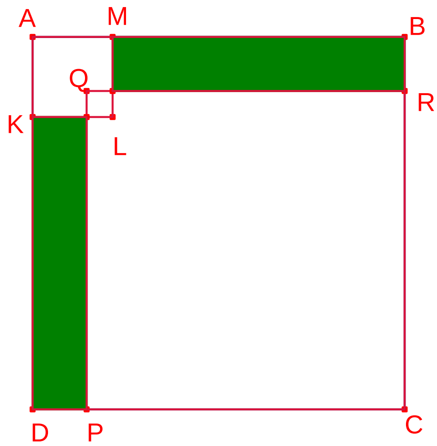
$x = 3$.

$\overline{DP} = x - 1 = 2$.

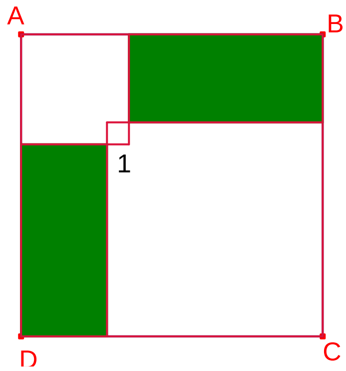
$\overline{DK} = 14 - x = 11$.

L'àrea ombrejada és:

$S = 2 \cdot \overline{DP} \cdot \overline{DK} = 2 \cdot 2 \cdot 11 = 44$.



758.- Siga el quadrat ABCD d'àrea 196.
Dos quadrats interior s'intersecten formant un quadrat de costat 1.
Si l'àrea del quadrat interior gran és 4 vegades l'àrea del quadrat menut, determineu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:
Si L'àrea del quadrat ABCD és 196 el seu costat mesura:

$AB = \sqrt{196} = 14$.

Siga $\overline{AM} = x$ costat el quadrat AKLM.
L'àrea del quadrat AKLM és:.

$S_{AKLM} = x^2$.

L'àrea del quadrat CPQR és:

$SCPQR = 4x^2$

El costat del quadrat CPQR és $\overline{PC} = \sqrt{4x^2} = 2x$.

$\overline{AM} + \overline{PC} = \overline{AB} + 1$

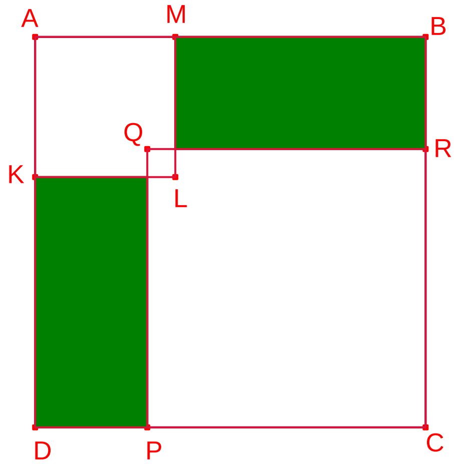
$x + 2x = 14 + 1$. Resolent l'equació:
$x = 5$.

$\overline{DP} = x - 1 = 4$.

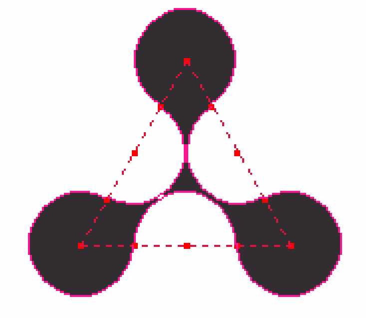
$\overline{DK} = 14 - x = 9$.

L'àrea ombrejada és:

$S = 2 \cdot \overline{DP} \cdot \overline{DK} = 2 \cdot 4 \cdot 9 = 72$.



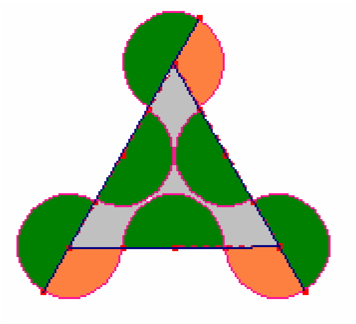
759.- En la figura la zona ombrejada està formada per arcs de circumferència.
Els centres de 3 arcs són els vèrtexs d'un triangle equilàter, els altres centres són els punts migs dels costats del triangle.
Els costats del triangle equilàter mesuren 2.
Determineu la diferència entre l'àrea de la regió ombrejada i l'àrea del triangle.
UKMT, intermediate 2013. problema 24.



Solució:

El radi de tots els arcs és $r = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

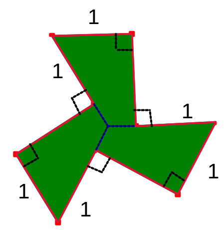
Si dividim els arcs exteriors al triangle en semicercles.
La diferència de la zona ombrejada i la del triangle és igual a tres sectors que formen un cercle de radi $r = \frac{1}{2}$.

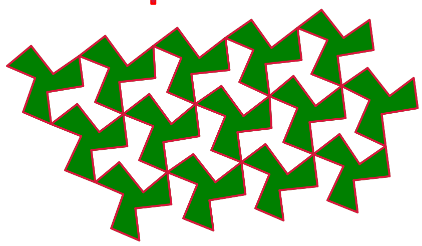


L'àrea que cerquem és:

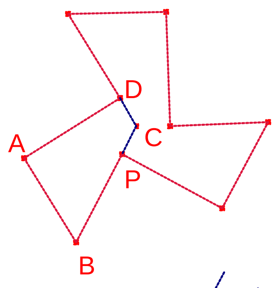
$$S = \pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

760.- El dibuix de dalt a la dreta mostra la tesela del mosaic, com mostra en el diagrama inferior. La tesela té nou costats, sis dels quals tenen longitud 1. La tesela es pot dividir en tres quadrilàters iguals com es mostra en la figura.
Determineu l'àrea de la tesela.
UKMT, senior 2012. problema 24.

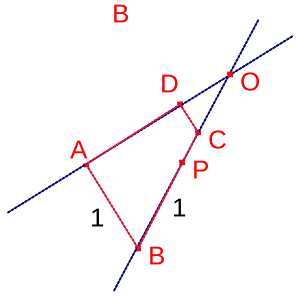




Solució:
Considerem el quadrilàter ABCD.



Notem que $\angle DCB = 120^\circ$, $\angle DAB = 90^\circ$, $\angle ADC = 90^\circ$.
Aleshores, el quadrilàter és un trapezi rectangular.
$\angle ABC = 180^\circ - \angle DCB = 60^\circ$.
Notem que $\overline{DC} = \overline{CP} = x$.
Prolonguem els costats $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$ que es tallen en el punt O.



$\overline{BO} = 2\overline{AB} = 2$. $\overline{AO} = \sqrt{3}$.
$\overline{BC} = 1 + x$.
$\overline{OC} = 1 - x$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABO}$, $\overset{\Delta}{DCO}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{2}.$$

Resolent l'equació:

$$x = \frac{1}{3}.$$

$$\overline{OD} = \frac{1}{3}\overline{AO} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\overline{AD} = \overline{AO} - \overline{OD} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

L'àrea del trapezi ABCD és:

$$S_{ABCD} = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2}\overline{AD} = \frac{1 + \frac{1}{3}}{2}\frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{4}{9}\sqrt{3}.$$

L'àrea de la tesela és:

$$S = 3S_{ABCD} = 3\frac{4}{9}\sqrt{3} = \frac{4}{3}\sqrt{3}.$$