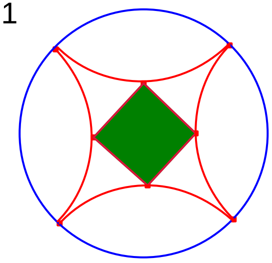
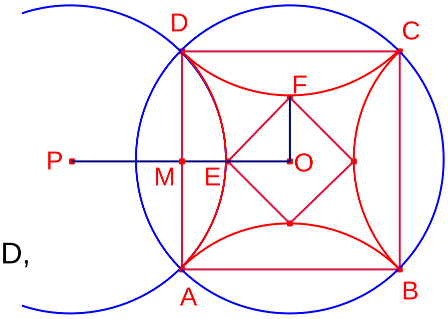
Problemes de Geometria per a l'ESO 77

761.- En una circumferència de radi 1 s'han dibuixar 4 arcs de radi 1 (veure figura).
En els centres d'aquests arcs s'ha formant un quadrat.
Determineu l'àrea d'aquest quadrat.



Solució:
Siga ABCD el quadrat que formen els 4 arcs a l'intersectar amb la circumferència de radi 1. Siga O el centre de la circumferència.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOD}$.



$\overline{AD} = \sqrt{2}$.

Siga M el punt mig del segment $\overline{AD}$, $\overline{DM} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Els quatre arcs són de radi 1. Siga P el centre de l'arc AED,
$\overline{PD} = 1$.
$\angle DOA = \angle DPA = 90º$.

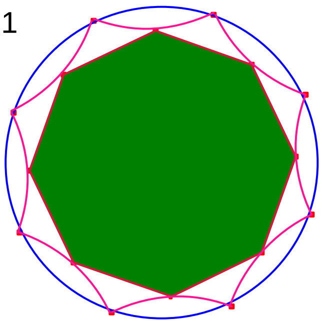
$\overline{PM} = \overline{DM} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\overline{ME} = \overline{PE} - \overline{PM} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$\overline{OE} = 1 - 2 \cdot \overline{ME} = 1 - \left(2 - \sqrt{2}\right) = \sqrt{2} - 1$.

L'àrea del quadrat ombrejat és:

$$S = 4 \cdot S_{EOF}\ 4 = 4\frac{\overline{OE}^2}{2} = 2\left(\sqrt{2} - 1\right)^2 = 6 - 4\sqrt{2}.$$



762.- En una circumferència de radi 1 s'han dibuixar 8 arcs de radi 1 (veure figura).
En els centres d'aquests arcs s'ha formant un octògon regular.
Determineu l'àrea d'aquest octògon.

Solució:
Siga $\overline{AB}$ el costat de l'octògon que formen els 8 arcs a l'intersectar amb la circumferència de radi 1. Siga O el centre de la circumferència.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOD}$.

$\overline{AD} = \sqrt{2}$.

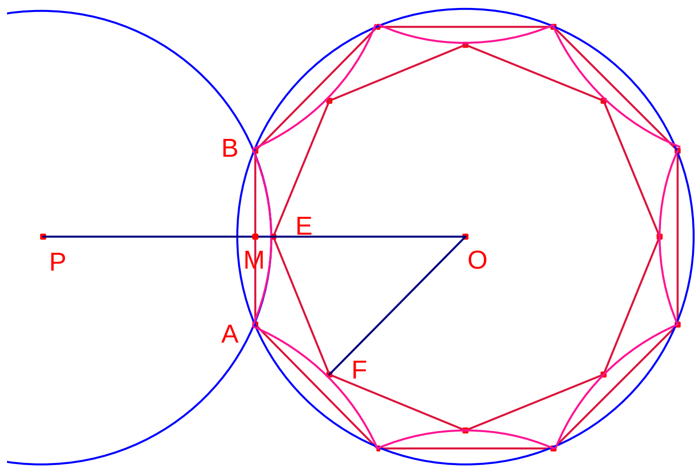
Siga P el centre de l'arc AEB, $\overline{PA} = 1$.

$\angle BOA = \angle BPA = 45^o$.

Siga M el punt mig del segment $\overline{AB}$.

$\angle BOM = \dfrac{45^o}{2}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMB}$:



$$\overline{OM} = \overline{PM} = \cos\frac{45^o}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

$$\overline{BM} = \sin\frac{45^o}{2} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \quad \overline{AB} = 2\overline{BM} = \sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

L'àrea de l'octògon regular de costat $\overline{AB}$ és:

$$S_G = \frac{8\overline{AB}\cdot\overline{OM}}{2} = 4\sqrt{2-\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

$$\overline{OE} = 2\overline{OM} - \overline{PE} = \sqrt{2+\sqrt{2}} - 1$$

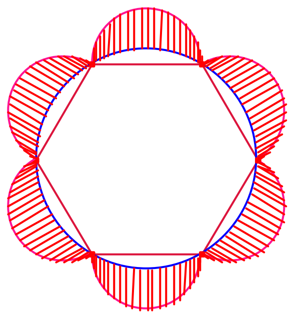
L'octògon regular de costat $\overline{EF}$ i l'octògon regular de costat $\overline{AB}$ són semblants i la raó de semblança és: $\dfrac{\overline{OE}}{\overline{OB}} = \sqrt{2+\sqrt{2}} - 1$.

Les àrees dels dos octògon són semblants i la raó és $\left(\dfrac{\overline{OE}}{\overline{OB}}\right)^2 = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} - 1\right)^2$.

$$\frac{S_{ombrejat}}{S_G} = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} - 1\right)^2.$$

$$S_{ombrejat} = \left(\sqrt{2+\sqrt{2}} - 1\right)^2 2\sqrt{2} \approx 2'0328.$$

763.- Sobre un hexàgon regular de costat c s'ha dibuixat la circumferència circumscrita i sis semicercles amb el costat com diàmetre.
Calculeu l'àrea ratllada (6 lúnules).

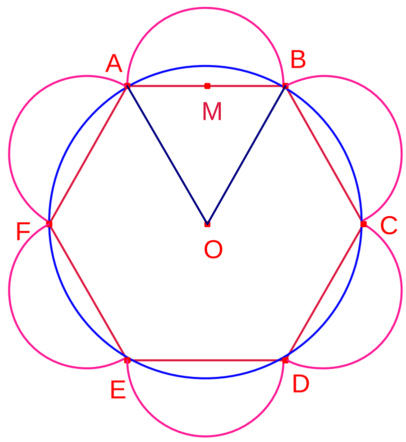


Solució:

Siga ABCDEF l'hexàgon regular de costat $\overline{AB} = c$ i centre O.

$\overline{OA} = \overline{AB} = c$

L'àrea d'una lúnula és igual a l'àrea d'un semicercle de radi $\frac{c}{2}$ menys l'àrea d'un sector circular de 60º i radi c.



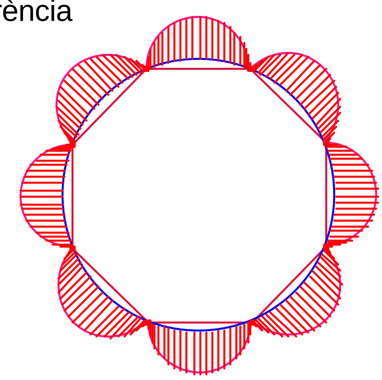
$$S_{\text{lúnula}} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \frac{1}{6}\pi c^2 + \frac{c^2\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{-\pi + 6\sqrt{3}}{24}\right)c^2.$$

L'àrea de la superfície ratllada és igual a sis vegades l'àrea de la lúnula:

$$S_{\text{ratllada}} = 6 \cdot S_{\text{lúnula}} = 6\left(\frac{-\pi + 6\sqrt{3}}{24}\right)c^2 = \left(\frac{-\pi + 6\sqrt{3}}{4}\right)c^2.$$

Problema:

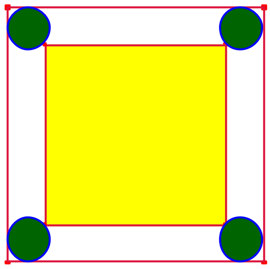
Sobre un octògon regular de costat c s'ha dibuixat la circumferència circumscrita i vuit semicercles amb el costat com diàmetre.
Calculeu l'àrea ratllada (8 lúnules).



Solució:

$$S = \frac{4 + 4\sqrt{2} - \pi\sqrt{2}}{2}c^2.$$

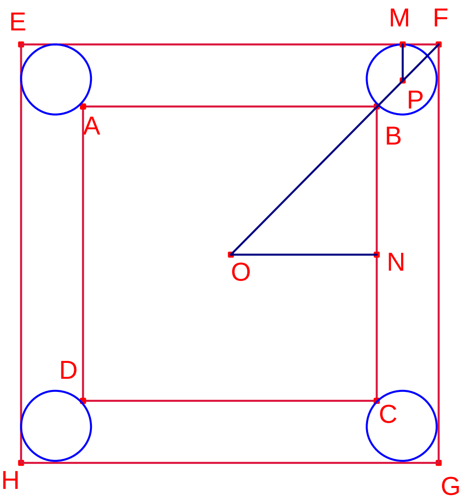
764.- En la figura el quadrat gran és d'àrea el doble que el quadrat menut. (Tots dos tenen el mateix centre).
S'han dibuixat 4 circumferències iguals que passen pels vèrtexs del quadrat menut i són tangents als costats del quadrat gran.
Si el costat del quadrat menut és c. Calculeu el radi de les circumferències.



Solució:

Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB}=c$ i centre O.

Siga N el punt mig del costat $\overline{BC}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ONB}$:

$\overline{OB}=\frac{\sqrt{2}}{2}c$.

Siga EFGH el quadrat d'àrea doble, aleshores, la proporció entre els costats és:

$\frac{\overline{EF}}{\overline{AB}}=\sqrt{2}$.

Aleshores, $\overline{OF}=\sqrt{2}\cdot\overline{OB}=\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}c=c$ (1)

Siga P el centre d'una circumferència i $r=\overline{PB}=\overline{PM}$, on M és el punt de tangència.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FMP}$:

$\overline{PF}=r\sqrt{2}$.

$\overline{OF}=\overline{OB}+\overline{PB}+\overline{PF}$:

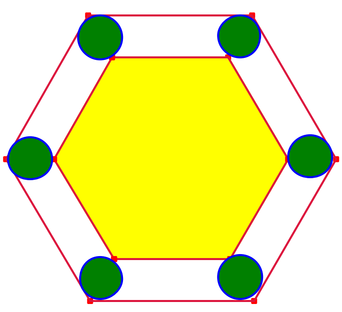
$\overline{OF}=\frac{\sqrt{2}}{2}c+r+r\sqrt{2}$ (2)

Igualant les expressions (1) (2):

$\frac{\sqrt{2}}{2}c+r+r\sqrt{2}=c$. Resolent l'equació en la incògnita r:

$r=\frac{3\sqrt{2}-4}{2}c$.

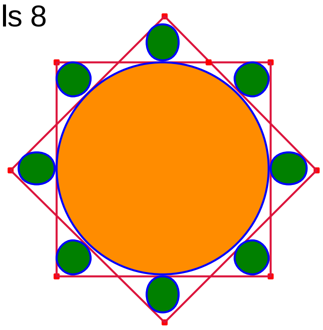
Problema:
En la figura l'hexagon regular gran és d'àrea el doble que l'hexàgon regular menut. (Tots dos tenen el mateix centre).
S'han dibuixat 6 circumferències iguals que passen pels vèrtexs de l'hexàgon menut i són tangents als costats del gran.
Si el costat de l'hexàgon menut és c. Calculeu el radi de les circumferències.



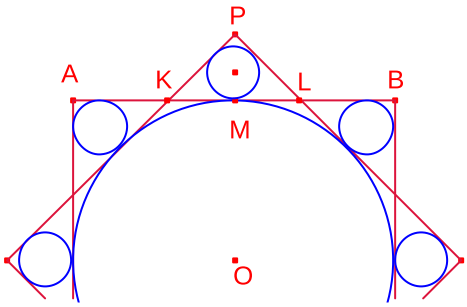
Solució:

$r=\left(3+2\sqrt{6}-3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)c$.

765.- Dos quadrats iguals, de centre comú, estan girats entre ells 45º.
En la intersecció dels dos quadrats s'ha inscrit una circumferència, i en els 8 triangles exteriors a la intersecció s'han inscrit 8 circumferències.
Determineu la proporció entre la suma de les àrees de les 8 cercles exteriors i l'àrea del cercle interior a la intersecció.



Solució:



Siga $\overline{AB} = c$ costat del quadrat. Siga O el seu centre.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
$\angle AOP = 45^{o}$.
El radi de la circumferència inscrita en la intersecció és:

$$R = \frac{c}{2}.$$

L'àrea del cercle inscrit en la intersecció és:

$$S_R = \pi\left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Siga $\overline{AK} = \overline{BL} = \overline{PK} = \overline{PL} = x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PKL}$:

$\overline{KL} = x\sqrt{2}$.

$\overline{AB} = 2\overline{AK} + \overline{KL}$.

$c = 2x + x\sqrt{2}$. Resolent l'equació:

$$x = \frac{2-\sqrt{2}}{2}c.$$

El radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PKL}$ és:

$$r = \frac{\overline{PK} + \overline{PL} - \overline{KL}}{2} = \frac{2x - x\sqrt{2}}{2} = \frac{3-2\sqrt{2}}{2}c.$$

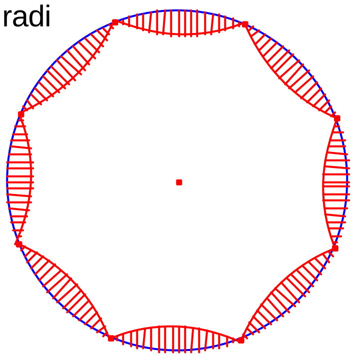
L'àrea d'un cercle menut és:

$$S_r = \pi\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{2}c\right)^2.$$

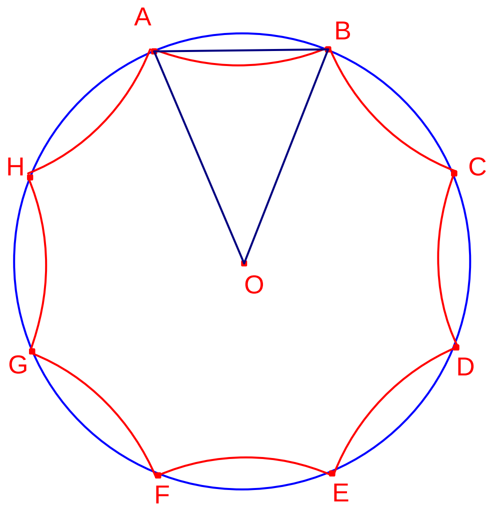
La proporció entre les àrees de les 8 cercles exteriors i l'àrea del cercle interior a la intersecció és:

$$\frac{8 \cdot S_r}{S_R} = \frac{8\pi\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{2}c\right)^2}{\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2} = 8\left(17 - 12\sqrt{2}\right) \approx 0'2355.$$

766.- En una circumferència de radi 1 s'han dibuixar 8 arcs de radi 1 que s'intersecten en la circumferència formant un octògon regular (veure figura).
Determineu l'àrea de la zona ratllada.



Solució:
Els 8 arcs de la circumferència i els altres 8 arcs són iguals ja que tenen el mateix radi.
L'àrea ratllada és igual a 16 vegades l'àrea del segment circular AB.
El segment abraça un arc de 45º, la seua àrea és igual a l'àrea del sector circular menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AOB}$.



L'àrea del sector circular de radi 1 i 45º és:

$$S_{sec\,tor} = \frac{1}{8}\pi 1^2 = \frac{\pi}{8}.$$

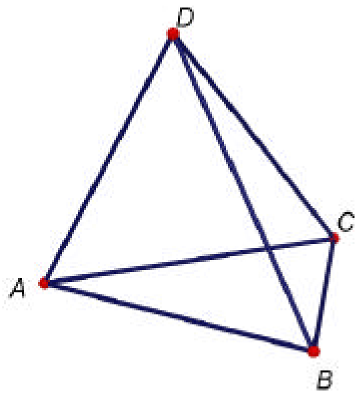
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AOB}$ és:

$$S_{AOB} = \frac{1 \cdot 1 \cdot \sin 45^{o}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

L'àrea de la regió ratllada és:

$$S = 16\left(S_{sec\,tor} - S_{AOB}\right) = 16\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = 2\pi - 4\sqrt{2} \approx 0.6263.$$

767.- La base d'una piràmide és un triangle equilàter de costat a. Una de les cares laterals, perpendicular al plànol de la base, també és un triangle equilàter. Determineu l'àrea i el volum de la piràmide.



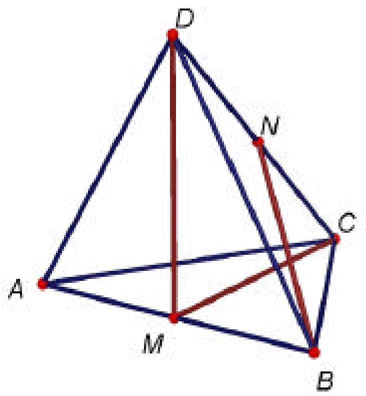
Solució:

Siga la piràmide ABCD de base $\overset{\Delta}{ABC}$ triangle equilàter, $\overline{AB} = a$.

Siga $\overset{\Delta}{ABD}$ la cara lateral perpendicular a la base i triangle equilàter.

L'àrea dels triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ABD}$ és:

$$S_{ABC} = S_{ABD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$



Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMD}$:

$$\overline{DM} = \overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

$\overline{DM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ és altura de la piràmide.

El volum és:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot \overline{DM} = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{1}{8}a^3.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{DMC}$:

$$\overline{CD} = \overline{CM} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}a.$$

Els triangle $\overset{\Delta}{BCD}$, $\overset{\Delta}{ACD}$ són iguals i isòsceles.

Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{CD}$.

$\overline{CN} = \frac{\sqrt{6}}{4}a$. $\angle BNC = 90^o$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BNC}$:

$$\overline{BN} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{4}a\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{4}a.$$

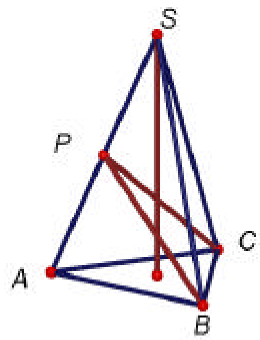
L'àrea dels triangles $\overset{\Delta}{BCD}$, $\overset{\Delta}{ACD}$ és:

$$S_{BCD} = S_{ACD} = \frac{\overline{CD} \cdot \overline{BN}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}a\frac{\sqrt{10}}{4}a}{2} = \frac{\sqrt{15}}{8}a^2.$$

L'àrea de la piràmide és:

$$S_{ABCD} = 2S_{ABC} + 2S_{BCD} = 2\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 2\frac{\sqrt{15}}{8}a^2 = \frac{a^2}{4}\left(2\sqrt{3} + \sqrt{15}\right).$$

768.- Una piràmide ABCS (S el vèrtex) triangular regular l'aresta de la base és 3 i l'altura 4.
Siga P el punt mig de l'aresta $\overline{AS}$.
Calculeu la mesura de l'angle $\angle BPC$.



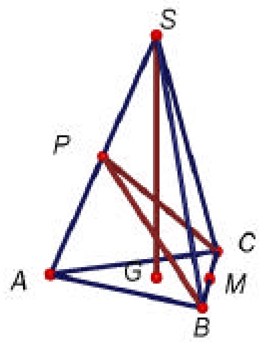
Solució:

La base $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle equilàter de costat $\overline{AB} = 3$.

Siga G el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

L'altura de la piràmide és $\overline{SG} = 4$.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMB}$:

$\overline{AM} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Aplicant la propietat del baricentre G:

$\overline{AG} = \frac{2}{3}\overline{AM} = \sqrt{3}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AGS}$:

$\overline{AS} = \sqrt{4^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{19}$.

$\overline{AS} = \overline{BS}$

La mitjana $\overline{BP}$ del triangle $\overset{\Delta}{ABS}$ mesura: $\overline{BP} = \frac{\sqrt{2\overline{BS}^2 + 2\overline{AB}^2 - \overline{AS}^2}}{2}$:

$\overline{BS} = \frac{\sqrt{2 \cdot 19 + 2 \cdot 9 - 19}}{2} = \frac{\sqrt{37}}{2}$.

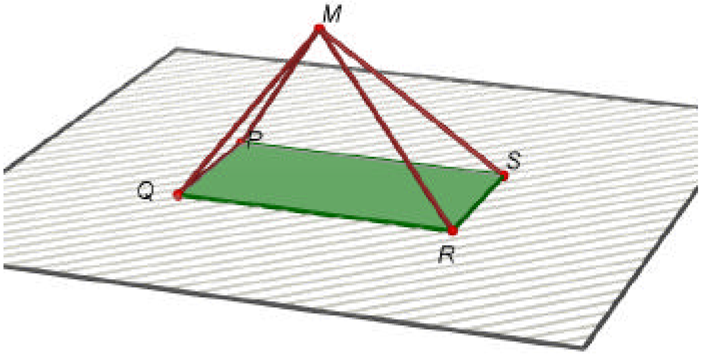
Siga $\alpha = \angle BPC$, aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BPC}$:

$3^2 = \left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2 - 2\frac{\sqrt{37}}{2}\frac{\sqrt{37}}{2}\cos\alpha$. Simplificant:

$\cos\alpha = \frac{19}{37}$.

$\alpha = \arccos\frac{19}{37} \approx 59^{o}6'7''$.

769.- Un punt M que no pertany al plànol del rectangle PQRS està a una distància $\overline{MP}=3$, $\overline{MQ}=4$, $\overline{MR}=5$, dels vèrtexs P, Q, R, respectivament.
Determineu la distància $\overline{MS}$.



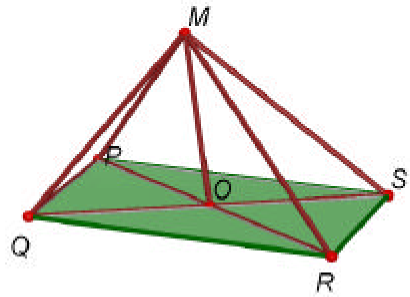
Solució:
Siga O el centre del rectangle PQRS, intersecció de les diagonals.
Les diagonals d'un rectangle són iguals.
Siga $\overline{PR}=\overline{QS}=x$.
$\overline{MO}$ és mitjana dels triangles $\overset{\Delta}{PMR}$, $\overset{\Delta}{QMS}$.

$$\overline{MO}=\frac{\sqrt{2\overline{MP}^2+2\overline{MR}^2-\overline{PR}^2}}{2}=\frac{\sqrt{2\overline{MS}^2+2\overline{MQ}^2-\overline{QS}^2}}{2}$$

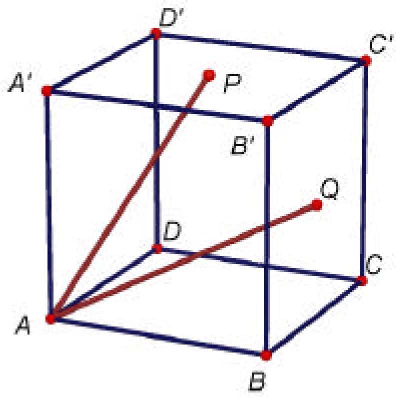
$\sqrt{2\cdot 3^2+2\cdot 5^2-x^2}=\sqrt{2\overline{MS}^2+2\cdot 4^2-x^2}$. Simplificant:

$2\overline{MS}^2=36$.

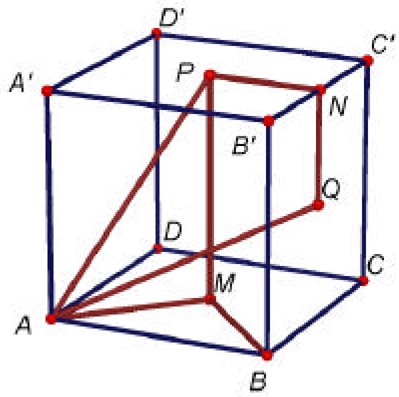
$\overline{MS}=3\sqrt{2}$.



770.- Siga el cub ABCDA'B'C'D'.
Siga P el centre de la cara A'B'C'D'.
Siga Q el centre de la cara BCC'B'.
Calculeu la mesura de l'angle $\angle PAQ$.



Solució:
Siga $\overline{AB} = a$ aresta del cub.
Notem que $\overline{AP} = \overline{AQ}$.
Siga M el centre de la cara ABCD.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMB}$:



$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMP}$:

$$\overline{AP} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot a.$$

Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{B'C'}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{PNQ}$

$$\overline{PQ} = \sqrt{2} \cdot \overline{PN} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Siga $\alpha = \angle PAQ$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{APQ}$.

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot a\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot a\right)^2 - 2\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot a\right)\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \cdot a\right)\cos\alpha.$$

Simplificant:

$$\cos\alpha = \frac{5}{6}.$$

$$\alpha = \arccos\frac{5}{6} \approx 33º33'26''.$$