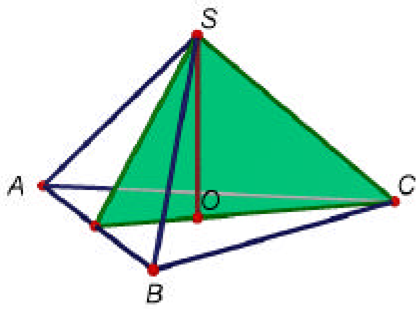
Problemes de Geometria per a l'ESO 78

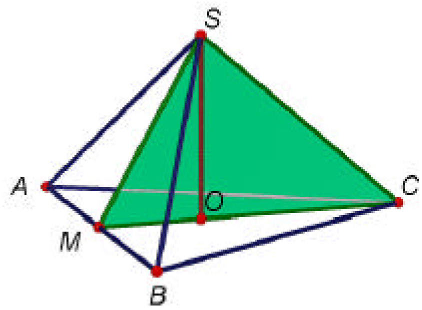
771.- En la piràmide triangular regular ABCD l'àrea de la secció que passa per l'aresta lateral $\overline{SC}$ i l'altura $\overline{SO}$ és la meitat de l'àrea de la base $\overset{\Delta}{ABC}$ de la piràmide.
L'aresta lateral és igual $\sqrt{21}$. Determineu el volum de la piràmide i la seua àrea.



Solució:

Siga $a=\overline{AB}$ aresta de la base $\overset{\Delta}{ABC}$ (triangle equilàter).
Per ser la piràmide regular el peu de l'altura $\overline{SO}$, és el baricentre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$. Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMC}$:



$\overline{CM}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. Aplicant la propietat del baricentre O:

$\overline{CO}=\frac{2}{3}\overline{CM}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{COS}$:

$$\overline{SO}=\sqrt{\left(\sqrt{21}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}=\sqrt{21-\frac{1}{3}a^2}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CMS}$ (secció del plànol que formen $\overline{SC}$ i l'altura $\overline{SO}$ és:

$$S_{CMS}=\frac{1}{2}\overline{CM}\cdot\overline{SO}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}a\sqrt{21-\frac{1}{3}a^2}=\frac{1}{4}a\sqrt{63-a^2}.$$

L'àrea de la base $\overset{\Delta}{ABC}$ és: $S_{ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Com que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CMS}$ és la meitat de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\frac{1}{4}a\sqrt{63-a^2}=\frac{1}{2}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Resolent l'equació:

$a=6$. $\overline{SO}=3$.

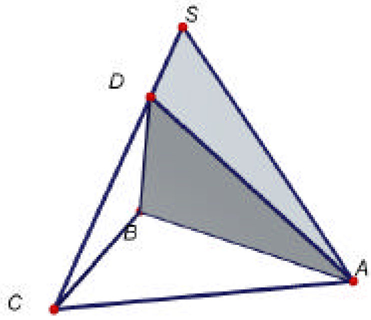
El volum de la piràmide ABCS és: $V=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot\overline{SO}=\frac{1}{3}\frac{6^2\sqrt{3}}{4}3=9\sqrt{3}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMS}$:

$$\overline{SM}=\sqrt{\left(\sqrt{21}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{21-3^2}=2\sqrt{3}.$$

L'àrea de la piràmide ABCS és: $S_{ABCS}=S_{ABC}+3\cdot S_{ABS}=\frac{6^2\sqrt{3}}{4}+3\frac{6\cdot2\sqrt{3}}{2}=27\sqrt{3}$.

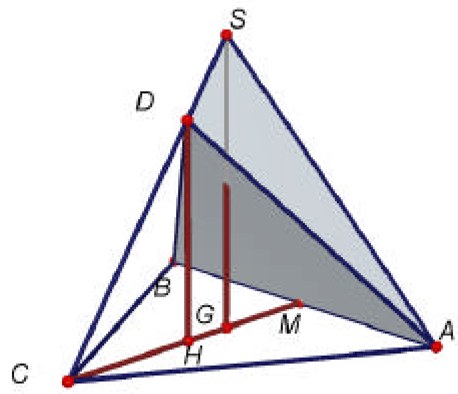
772.- Siga ABCS un tetraedre regular d'aresta 4.
Siga D un punt de l'aresta $\overline{SC}$ tal que $\overline{SD}:\overline{DC}=1:3$.
Determineu el volum del tetraedre ABDS.



Solució:
$\overline{SD}:\overline{DC}=1:3$, $\overline{SC}=4$, Aleshores:
$\overline{DC}=3$.
El volum del tetraedre ABDS és igual al volum del tetraedre regular ABCS menys el volum del tetraedre ABCD.
Siga $\overline{SG}$ l'altura del tetraedre regular ABCS. G és el baricentre de la cara base.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$:
$\overline{CM}=2\sqrt{3}$.
Aplicant la propietat del baricentre G.
$\overline{CG}=\frac{2}{3}\overline{CM}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CGS}$:

$$\overline{SG}=\sqrt{4^2-\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{4}{3}\sqrt{6}.$$



El volum del tetraedre regular ABCS és:

$$V_{ABCS}=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot\overline{SG}=\frac{1}{3}\frac{4^2\sqrt{3}}{4}\frac{4\sqrt{6}}{3}=\frac{16}{3}\sqrt{2}.$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CGS}$, $\overset{\Delta}{CHD}$ són semblants i la raó de semblança és $4:3$, aleshores:

$$\overline{DH}=\frac{3}{4}\overline{SG}=\sqrt{6}.$$

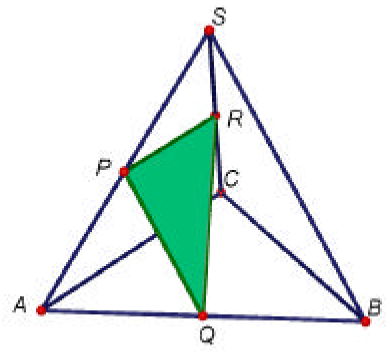
El volum del tetraedre ABCD és:

$$V_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot\overline{DH}=\frac{1}{3}\frac{4^2\sqrt{3}}{4}\sqrt{6}=4\sqrt{2}.$$

El volum del tetraedre ABDS és:

$$V_{ABCD}=V_{ABCS}-V_{ABCD}=\frac{16}{3}\sqrt{2}-4\sqrt{2}=\frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

773.- Siga el tetraedre regular ABCS d'aresta 6.
Siga P el punt mig de l'aresta $\overline{SA}$.
Siga Q el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.
Siga R el punt mig de l'aresta $\overline{SC}$.
Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PQR}$.



Solució:

$\overline{PQ}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABS}$, $\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{SB} = 3$.

$\overline{PR}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ACS}$. $\overline{PR} = \frac{1}{2}\overline{AC} = 3$.

L'angle $\angle RPQ$ és igual a l'angle que formen $\overline{AC}$ i $\overline{SB}$ que és recte.

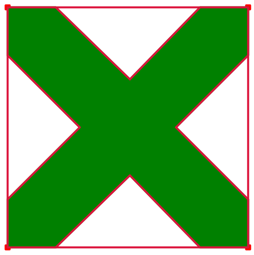
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{PQR}$ és rectangle i isòsceles.

$S_{PQR} = \frac{1}{2}\overline{PQ}^2 = \frac{9}{2}$.

774.- En un quadrat de costat 10cm, amb línies paral·leles a les diagonals s'ha dibuixat una creu (veure figura).

Si l'àrea de la creu és $64\,\text{cm}^2$, determineu l'amplària entre els braços de la creu.

KöMaL, K372, febrer 2013.

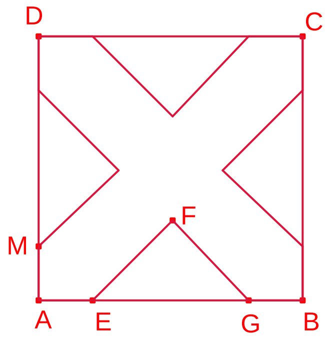


Solució:

Siga ABCD el quadrat de costat 10.

Siga $x = \overline{EF}$.

L'àrea de la creu és igual a l'àrea del quadrat menys quatre vegades l'àrea del triangle rectangle i isòsceles $\overset{\Delta}{EFG}$.



$64 = 10^2 - 4\dfrac{x^2}{2}$. Resolent l'equació:

$x = 3\sqrt{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{EFG}$:

$\overline{EG} = \overline{EF}\sqrt{2} = 6$.

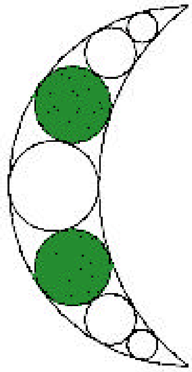
$\overline{AE} = \dfrac{\overline{AB} - \overline{EG}}{2} = \dfrac{10-6}{2} = 2$.

La distància entre el braços de la creu és igual a la mesura del segment $\overline{EM}$:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{AEM}$:

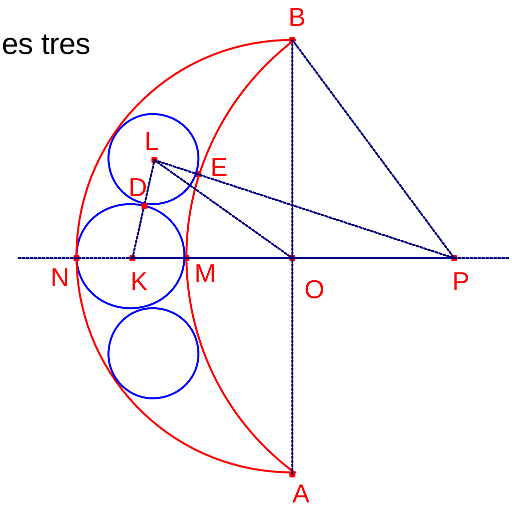
$\overline{ME} = \overline{AE}\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

775.- La figura és el disseny per a una arracada amb una línia de simetria.
La mitja lluna està formada per una semicircumferència de radi 20mm i un arc de 25mm. Determineu el radi de les dues circumferències ombrejades.
KöMaL, C1156, febrer 2013



Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{ON} = 20$.
Siga la circumferència de centre P i radi $\overline{PM} = 25$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPB}$:
$\overline{OP} = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$.
Aleshores, $\overline{OM} = \overline{PM} - \overline{OP} = 10$.
Siga K el centre de la circumferència de diàmetre $\overline{MN} = 10$.
Siga L el centre de la circumferència ombrejada, tangent a les tres circumferències anteriors.
Siga $r = \overline{LD} = \overline{LE}$ el seu radi.
$\overline{OK} = 15$, $\overline{PK} = 30$.
$\overline{KL} = 5 + r$, $\overline{OL} = 20 - r$, $\overline{PL} = 25 - r$.
Siga $\alpha = \angle LKP$.



Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{OKL}$:

$$\cos\alpha = \frac{(20-r)^2 - 15^2 - (5+r)^2}{-2 \cdot 15(5+r)} \quad (1)$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{PKL}$:

$$\cos\alpha = \frac{(25+r)^2 - 30^2 - (5+r)^2}{-2 \cdot 30(5+r)} \quad (2)$$

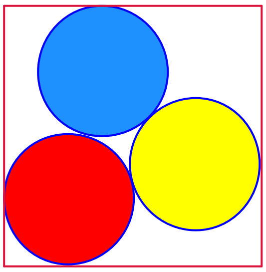
Igualant les expressions (1) (2):

$$\frac{(20-r)^2 - 15^2 - (5+r)^2}{-2 \cdot 15(5+r)} = \frac{(25+r)^2 - 30^2 - (5+r)^2}{-2 \cdot 30(5+r)}.$$

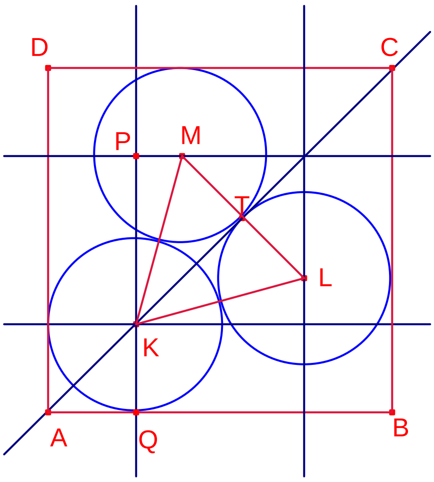
Resolent l'equació:

$$r = \frac{30}{7}.$$

776.- En la figura les tres circumferències són iguals i el quadrat té costat c.
Calculeu el radi de les circumferències.



Solució:
Siga r el radi de les circumferències.
Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = c$
Siguen K, L, M els centres de les tres circumferències tangents.
Els centres formen un triangle equilàter de costat $\overline{KM} = 2r$.
Siga P la projecció de M sobre la recta que passa per K i és perpendicular a $\overline{AB}$.
Siga Q la projecció de K sobre $\overline{AB}$. $\overline{KQ} = r$.



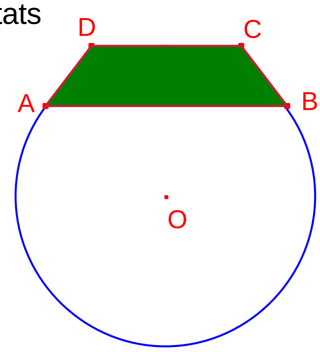
$\angle CKP = 45^o$, $CKM = 30^o$, aleshores:
$\angle MKP = 15^o$.
$\overline{PK} = \overline{AD} - 2KQ = c - 2r$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KPM}$:

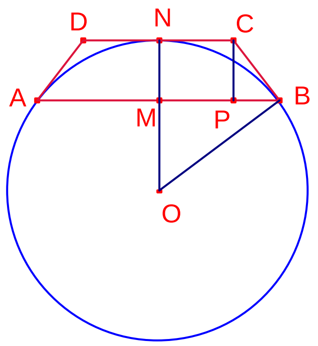
$\frac{c-2r}{2r} = \cos 15^o = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Resolent l'equació:

$r = \frac{2}{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}c$.

777.- Calculeu l'àrea del trapezi isòsceles ABCD, tal que els costats $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ són tangents a la circumferència de centre O i radi 10m i $\overline{BC} = 5\text{m}$.
García Ardura, problema 724.



Solució 1:
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$. Siga N el punt mig del costat $\overline{CD}$.
Siga $\overline{MN} = h$ altura del trapezi ABCD.
Per ser B, N punts de tangència: $\overline{CN} = \overline{CB} = 5$.
Siga P la projecció de C sobre el costat $\overline{AB}$.
$\angle OBC = 90^o$.
Els triangles $\overset{\Delta}{CPB}$, $\overset{\Delta}{BMO}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{h}{5} = \frac{\overline{BM}}{10}$, aleshores, $\overline{BM} = 2h$.
$\overline{OM} = 10 - h$.

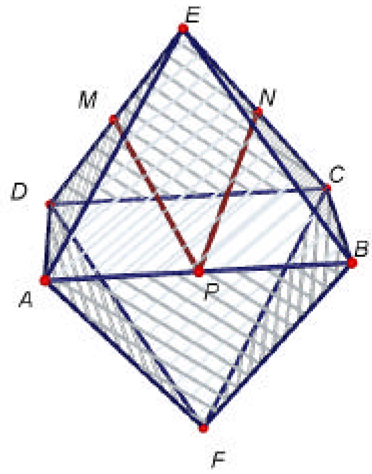


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMO}$:
$(10-h)^2 + (2h)^2 = 10^2$. Resolent l'equació:
$h = 4$.
$\overline{AB} = 2\overline{BM} = 4h = 16$. $\overline{CD} = 2\overline{CN} = 10$. L'àrea del trapezi és:
$$S_{ABCD} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} h = \frac{16+10}{2} 4 = 52\text{m}^2.$$

Solució 2:
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$. Siga N el punt mig del costat $\overline{CD}$.
Siga $\overline{MN} = h$ altura del trapezi ABCD.
Per ser B, N punts de tangència: $\overline{CN} = \overline{CB} = 5$.
Siga P la projecció de C sobre el costat $\overline{AB}$. Siga $\overline{BP} = x$.
$\overline{MP} = \overline{CN} = 5$. $\overline{BM} = 5 + x$. $\overline{OM} = 10 - h$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMO}$:
$$(5+x)^2 + (10-h)^2 = 10^2 \qquad (1)$$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BPC}$:
$$x^2 + h^2 = 5^2 \qquad (2)$$
Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):
$$\begin{cases} (5+x)^2 + (10-h)^2 = 10^2 \\ x^2 + h^2 = 5^2 \end{cases}$$. La solució del qual és: $\begin{cases} x = 3 \\ h = 4 \end{cases}$.
$\overline{AB} = 2\overline{BM} = 2(5+x) = 16$. $\overline{CD} = 2\overline{CN} = 10$. L'àrea del trapezi és:
$$S_{ABCD} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2} h = \frac{16+10}{2} 4 = 52\text{m}^2.$$

778.- Siga l'octaedre regular ABCDEF.
Siga P el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{DE}$.
Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{CE}$.
Determineu la mesura de l'angle $\angle MPN$.



Solució:
Siga $\overline{AB} = a$ aresta de l'octaedre regular.

$\overline{MN} = \frac{1}{2}a$, ja que és paral·lela mitjana del triangle equilàter $\overset{\Delta}{CDE}$.

$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, ja que és altura del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ADE}$.

Considerem el trapezi ABMN.

$\overline{AM} = \overline{PM} = \overline{PN} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Siga $\angle MPN = \alpha$.

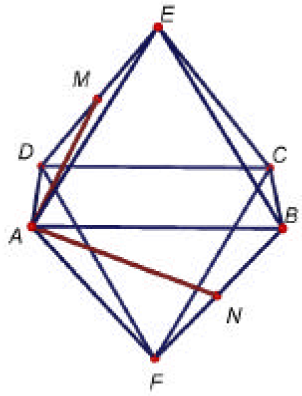
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{PMN}$:

$$\left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - 2\frac{\sqrt{3}}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \cos\alpha .$$

Simplificant, $\cos\alpha = \frac{5}{6}$.

$\alpha = \arccos\frac{5}{6} \approx 33º33'26''$.

779.- Siga l'octaedre regular ABCDEF.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{DE}$.
Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{BF}$.
Determineu la mesura de l'angle $\angle MAN$.



Solució:
Siga $\overline{AB} = a$ aresta de l'octaedre regular.
Notem que N és el simètric de M respecte de la recta AC.
Aleshores la mesura de l'angle $\angle MAN$ és igual al doble de l'angle $\angle MAC$.

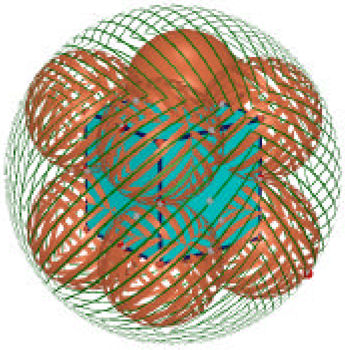
$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, ja que és altura del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ADE}$.
$\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, ja que és altura del triangle equilàter $\overset{\Delta}{CDE}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC} = a\sqrt{2}$.
Siga $\angle MAN = \alpha$.
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AMC}$:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 - 2\frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} .$$

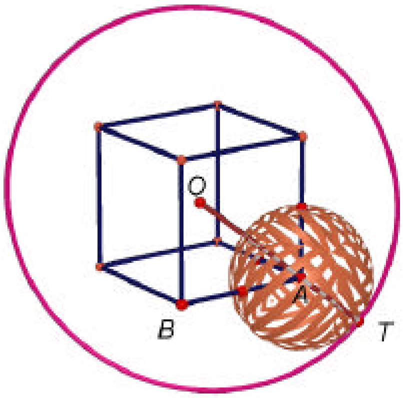
Simplificant, $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

$$\alpha = 2\arccos\frac{\sqrt{6}}{3} \approx 70º31'44'' .$$

780.- Un esfera de radi R té inscrites vuit esferes iguals, cadascuna tangent a altres tres veïnes i a l'esfera gran. Determineu el radi de les esferes si els centres d'aquestes es troben en els vèrtexs d'un cub.



Solució:
Siga O el centre de l'esfera exterior de radi R.
Siga r el radi de les vuit esferes.
L'aresta del cub és $\overline{AB} = 2r$.
Siga T el pun de tangència de l'esfera de centre A i radi r i l'esfera de radi R.



$\overline{AT} = r$, $\overline{OT} = R$.

La diagonal del cub mesura $2r\sqrt{3}$.

$\overline{OA}$ és igual a la meitat de la diagonal.

$\overline{OA} = r\sqrt{3}$.

$\overline{OT} = \overline{OA} + \overline{AT}$.

$R = r\sqrt{3} + r$. Resolent l'equació:

$$r = \frac{1}{1+\sqrt{3}}R = \frac{\sqrt{3}-1}{2}R .$$