**Problemes de Geometria per a l'ESO 79**

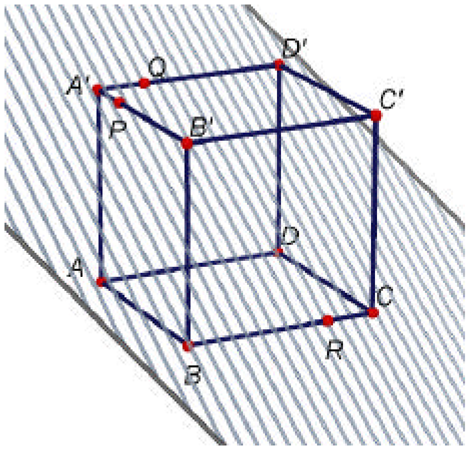
781.- Siga el cub ABCDA'B'C'D' d'aresta a.

Siga P de l'aresta $\overline{A'B'}$ tal que $\frac{\overline{A'P}}{\overline{A'B'}} = \frac{1}{4}$.

Siga Q de l'aresta $\overline{A'D'}$ tal que $\frac{\overline{A'Q}}{\overline{A'D'}} = \frac{1}{4}$.

Siga R de l'aresta $\overline{BC}$ tal que $\frac{\overline{CR}}{\overline{BC}} = \frac{1}{4}$.

Determineu l'àrea de la secció del cub que determina el plànol que passa pels punts P, Q, R.




Solució:

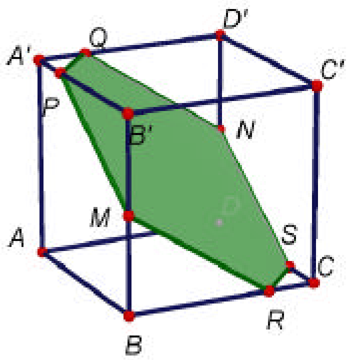
El plànol que passa pels punts P, Q, R talla les arestes $\overline{CD}$, $\overline{BB'}$, $\overline{DD'}$, en els punts S, M, N, respectivament.

$\frac{\overline{CS}}{\overline{CD}} = \frac{1}{4}$, $\frac{\overline{BM}}{\overline{BB'}} = \frac{1}{2}$, $\frac{\overline{DN}}{\overline{DD'}} = \frac{1}{2}$.

$\overline{MN} = \overline{BD} = a\sqrt{2}$.

$\overline{PQ} = \frac{a}{4}\sqrt{2}$.

$$\overline{PM} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}a\right)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{4}a.$$

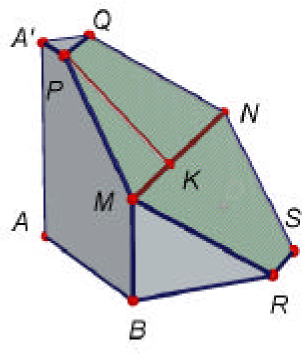



Siga K la projecció de P sobre el segment $\overline{MN}$.

$$\overline{MK} = \frac{\overline{MN} - \overline{PQ}}{2} = \frac{3a}{8}\sqrt{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MKP}$:

$$\overline{PK} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{13}}{4}a\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{8}a\right)^2} = \frac{\sqrt{34}}{8}a.$$

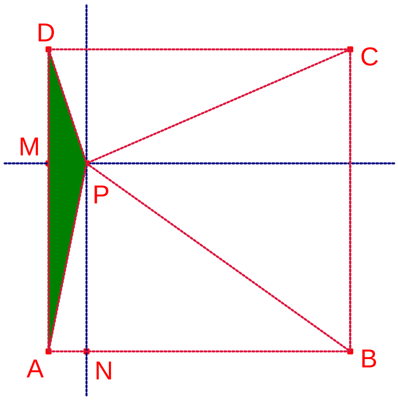



L'àrea de l'hexàgon PQNSRM és el doble de l'àrea del trapezi MNPQ:

$$S_{PQNSRM} = 2S_{MNPQ} = 2\frac{\overline{MN} + \overline{PQ}}{2}\overline{PK} = \left(a\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}a\right)\frac{\sqrt{34}}{8}a = \frac{5\sqrt{17}}{16}a^2.$$

782.- Un punt P interior del quadrat ABCD divideix el quadrat en quatre triangles d'àrees $4\text{cm}^2$, $12\text{cm}^2$, $20\text{cm}^2$, $28\text{cm}^2$. Determineu el perímetre del triangle menor.

Solució:
L'àrea del quadrat ABCD és la suma de les àrees dels quatre triangles.
$S_{ABCD} = 4+12+20+28=64$.
El costat del quadrat mesura:
$\overline{AB}=\sqrt{64}=8$.

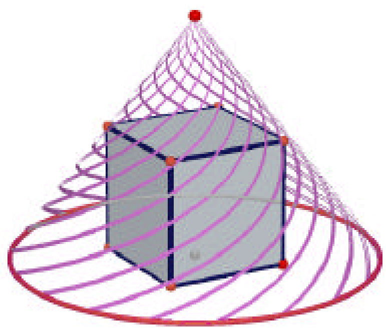



Les altures dels quatre triangles referides a les bases costat del quadrat són 1, 3, 5, 7, respectivament.
Podem suposar que el punt P està a 1cm del costat $\overline{AD}$ i a 5cm del costat $\overline{AB}$.
Siga M la projecció de P sobre el costat $\overline{AD}$.
$\overline{AM}=5$, $\overline{DM}=3$, $\overline{MP}=1$
El perímetre del triangle d'àrea $4\text{cm}^2$, $\overset{\Delta}{APD}$ és:
$p=\overline{AD}+\overline{AP}+\overline{DP}$.

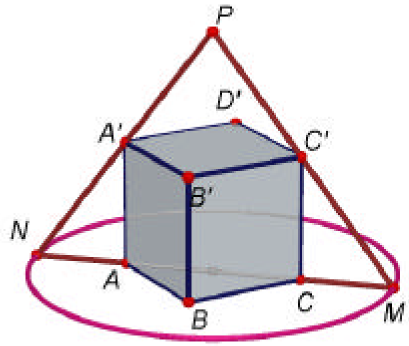
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMP}$:
$\overline{AP}=\sqrt{5^2+1^2}=\sqrt{26}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DMP}$:
$\overline{DP}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$.
$p=\overline{AD}+\overline{AP}+\overline{DP}=8+\sqrt{26}+\sqrt{10}\approx 16'26\text{cm}$

783.- Donat el con recte de radi 3 i altra 4, determineu l'aresta del major cub que cap dins del con amb una base en la base del con.



Solució:
Siga ABCDA'B'C'D' el cub inscrit en el con.
Siga $\overline{AB} = a$ la seua aresta.
Siga $\overline{MN} = 6$ el diàmetre del con que passa per A, C.
Siga P el vèrtex del con.
Considerem la secció del con que forma el plànol que passa per M, N, P.

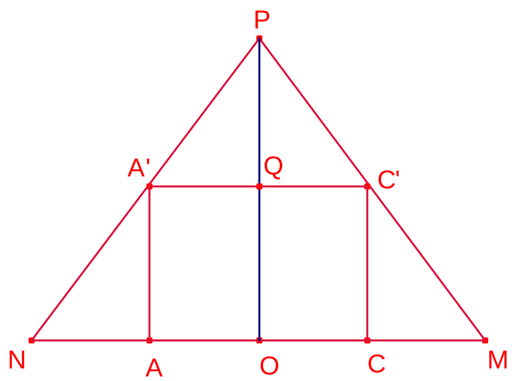



Siga O el centre de la circumferència base,

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{NOP}$:
$\overline{NP} = 5$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC} = \overline{A'C'} = a\sqrt{2}$.
Siga Q el punt mig de $\overline{A'C'}$:

$\overline{A'Q} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, $\overline{AA'} = a$.




Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{NOP}$, $\overset{\Delta}{NAA'}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{NA'}}{a} = \frac{5}{4}$, Aleshores: $\overline{NA'} = \frac{5}{4}a$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{NOP}$, $\overset{\Delta}{A'QP}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

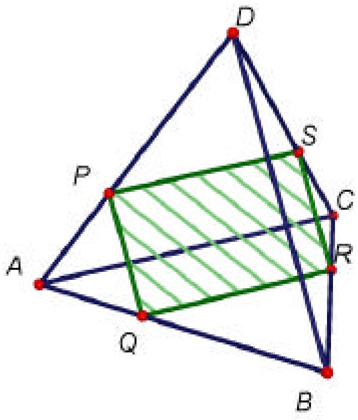
$\frac{\overline{A'P}}{\frac{\sqrt{2}}{2}a} = \frac{5}{3}$, Aleshores: $\overline{A'P} = \frac{5\sqrt{2}}{6}a$.

$\overline{NP} = \overline{NA'} + \overline{A'P}$.

$\frac{5}{4}a + \frac{5\sqrt{2}}{6}a = 5$. Resolent l'equació:

$a = 12\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$.

784.- El perímetre de la secció paral·lela a dues arestes que es creuen d'un tetraedre regular és constant.
Calculeu el perímetre.




Solució:

Siga ABCD el tetraedre regular d'aresta $\overline{AB} = a$.

Siga PQRS la secció del tetraedre $\overline{PS}, \overline{QS}$ paral·lels a $\overline{AC}$, $\overline{PQ}, \overline{RS}$ paral·lels a $\overline{BD}$.

$\overline{AC}$, $\overline{BD}$ són arestes que es creuen.

Siga $x = \overline{AP}$, $\overline{PD} = a - x$.

$\overset{\Delta}{APQ}$, és un triangle equilàter, aleshores:

$\overline{PQ} = \overline{AP} = x$.

$\overset{\Delta}{PSD}$, és un triangle equilàter, aleshores:

$\overline{PS} = \overline{PD} = a - x$.

El perímetre de la secció és:

$p = 2\left(\overline{PQ} + \overline{PS}\right) = 2(x + a - x) = 2a$.

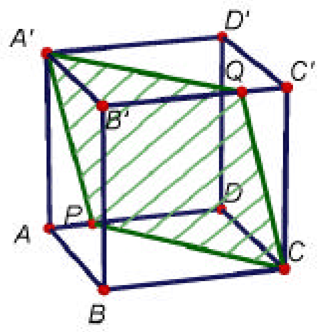
El perímetre de la secció és constant i igual al doble de l'aresta del tetraedre.

785.- Siga ABCDA'B'C'D' un cub d'aresta $\overline{AB}=a$.

Siga P un punt de l'aresta $\overline{AD}$ tal que $\overline{AP}=\frac{1}{4}a$.

Siga Q un punt de l'aresta $\overline{B'C'}$ tal que $\overline{C'Q}=\frac{1}{4}a$.

a) Proveu que A'PCQ és un paral·lelogram.
b) Classifiqueu-lo.
c) Calculeu la seua àrea.

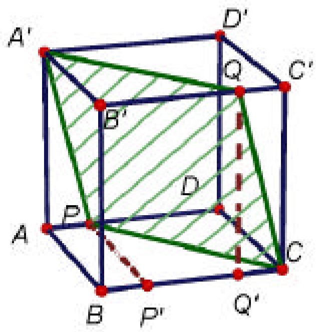



Solució:
a)

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{A'AP}$, $\overset{\Delta}{CC'Q}$ són iguals.
$\overline{A'A}, \overline{CC'}$ són paral·lels. $\overline{AP}, \overline{C'Q}$ són paral·lels.

Aleshores. $\overline{A'P}, \overline{C'Q}$ són paral·lels i iguals.

Per tant A'PCQ és un paral·lelogram.
b)




Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{A'AP}$:

$\overline{A'P}=\overline{CQ}=\frac{\sqrt{17}}{4}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CDP}$:

$\overline{PC}=\overline{A'Q}=\frac{5}{4}a$.

La diagonal del cub mesura: $\overline{A'C}=a\sqrt{3}$.

Siga Q' la projecció de Q sobre l'aresta $\overline{BC}$.

Siga P' la projecció de P sobre l'aresta $\overline{BC}$.

$\overline{P'Q'}=\frac{1}{2}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{PP'Q'}$: $\overline{PQ'}=\sqrt{a^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{PQ'Q}$: $\overline{PQ}=\sqrt{a^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2}=\frac{3}{2}a$.

Per tant els costats del paral·lelogram A'PCQ són distints i les diagonals són distintes, aleshores és un romboide.
c)

Calculem l'angle $\alpha=\angle A'QC$ utilitzant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{A'QC}$:

$$\left(a\sqrt{3}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{17}}{4}a\right)^2+\left(\frac{5}{4}a\right)^2-2\frac{\sqrt{17}}{4}a\cdot\frac{5}{4}a\cdot\cos\alpha.$$

$\cos\alpha=\frac{-3}{5\sqrt{17}}$, $\sin\alpha=\frac{4\sqrt{26}}{5\sqrt{17}}$.

L'àrea del paral·lelogram A'PCQ és:

$$S_{A'PCQ}=\overline{A'Q}\cdot\overline{CQ}\cdot\sin\alpha=\frac{5}{4}a\frac{\sqrt{17}}{4}a\cdot\frac{4\sqrt{26}}{5\sqrt{17}}=\frac{\sqrt{26}}{4}a^2.$$

786.- Siga el cub ABCDEFGH d'aresta $\overline{AB}=a$.

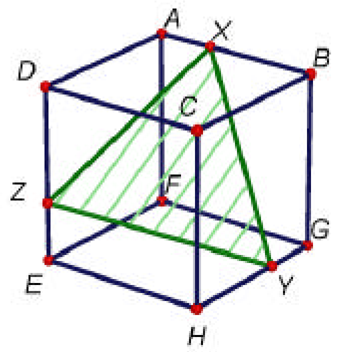
Siga X un punt de l'aresta $\overline{AB}$ tal que $\overline{AX}=\frac{1}{3}a$.

Siga Y un punt de l'aresta $\overline{GH}$ tal que $\overline{GY}=\frac{1}{3}a$.

Siga Z un punt de l'aresta $\overline{DE}$ tal que $\overline{DZ}=\frac{2}{3}a$.

a) Proveu que el triangle $\overset{\Delta}{XYZ}$ és equilàter.

b) Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{XYZ}$.




Solució:

a)

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{XBG}$, $\overset{\Delta}{YHE}$ són iguals, aleshores, $\overline{XG}=\overline{EY}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{XGY}$, $\overset{\Delta}{YEZ}$ són iguals, aleshores, $\overline{XY}=\overline{YZ}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ZDA}$, $\overset{\Delta}{YHE}$ són iguals, aleshores, $\overline{AZ}=\overline{EY}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{XAZ}$, $\overset{\Delta}{ZEY}$ són iguals, aleshores, $\overline{XZ}=\overline{YZ}$.

Aleshores, $\overline{XY}=\overline{YZ}=\overline{XZ}$, ALESHORES, el triangle $\overset{\Delta}{XYZ}$ és equilàter.

b)

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{XBG}$:

$$\overline{XG}=\sqrt{a^2+\left(\frac{2}{3}a\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{3}a.$$

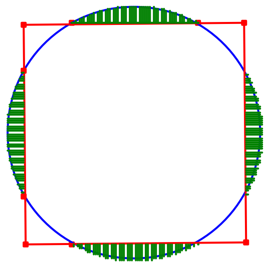
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{XGY}$:

$$\overline{XY}=\sqrt{\left(\frac{1}{3}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{13}}{3}a\right)^2}=\frac{\sqrt{14}}{3}a.$$

L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{XYZ}$ és:

$$S_{XYZ}=\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{XY}^2=\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{14}{9}a^2=\frac{7\sqrt{3}}{18}a^2.$$

787.- En la figura el radi de circumferència mesura 1 i el costat del quadrat $\sqrt{3}$.
Calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:

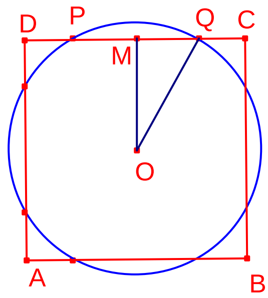
Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB}=\sqrt{3}$ i centre O.

La circumferència talla el costat $\overline{CD}$ en els punts P, Q.

$\overline{OQ}=1$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$.

$\overline{OM}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.




Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMQ}$:

$\overline{MQ}=\frac{1}{2}$.

$\overline{PQ}=1$.

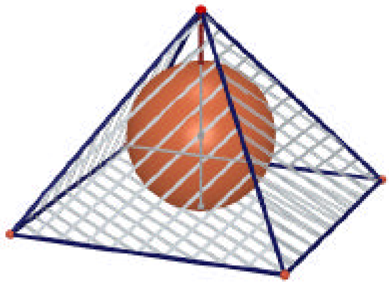
Aleshores el triangle $\overset{\Delta}{OPQ}$ és equilàter.

$\angle POQ=60^{o}$.

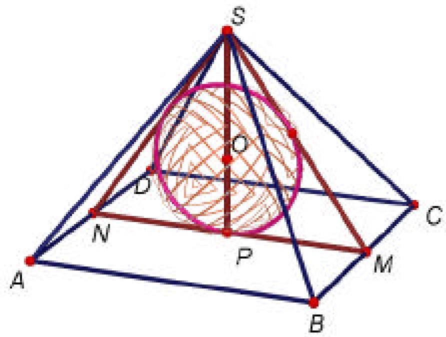
L'àrea ombrejada és igual a quatre vegades l'àrea del segment circular $\overset{\frown}{PQ}$:

$$S_{om}=4\left(\frac{1}{6}\pi\cdot 1^2-\frac{\sqrt{3}}{4}1^2\right)=\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}.$$

788.- Una piràmide quadrangular regular té totes les arestes igual a a.
Determineu el radi de l'esfera inscrita en la piràmide.



Solució:
Siga la piràmide ABCDS que té totes les arestes iguals.
ABCD és un quadrat (piràmide regular).
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.
Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{AD}$.
Siga P el centre del quadrat (peu de l'altra de la piràmide.




Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{SMB}$:

$$\overline{SM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{SPM}$:

$$\overline{SP} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

El radi de l'esfera inscrita en la piràmide és igual al radi de la circumferència inscrita en el triangle $\overset{\Delta}{MNS}$.
El calcularem a partir de l'àrea del triangle.

Siga r el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{MNS}$.

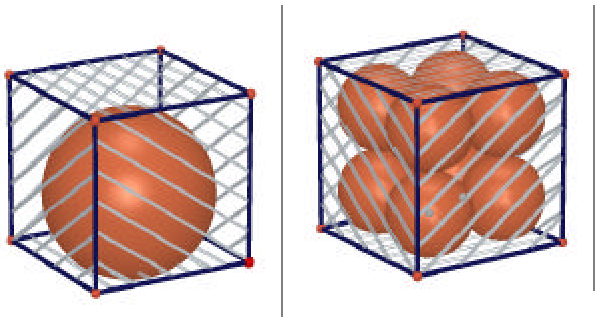
$$S_{MNS} = \frac{\overline{MN} \cdot \overline{SP}}{2} = \frac{\overline{MN} + \overline{SM} + \overline{SN}}{2}r.$$

$$\frac{a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a}{2} = \frac{a + \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}a}{2}r.$$

Resolent l'equació:

$$r = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}a.$$

789.- Siguen dos cubs iguals.
En un cub hi ha inscrita una esfera.
En l'altre cub hi ha vuit esferes iguals.
Calculeu la proporció entre el volum de l'esfera del primer cub i la suma del volum de les vuit esferes del segon cub.



Solució:
Siga a l'aresta dels dos cubs.

El radi de l'esfera del primer cub és $R = \frac{a}{2}$.

El radi de les esferes del segon cub és $r = \frac{a}{4}$.

El volum de l'esfera del primer cub és:

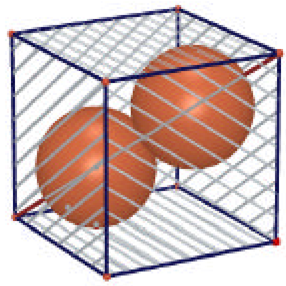
$$V_G = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6}a^3.$$

La suma dels volums de les vuit esferes del segon cub és:

$$V_{8m} = 8\left(\frac{4\pi}{3}\left(\frac{a}{4}\right)^3\right) = \frac{\pi}{6}a^3.$$

Aleshores la proporció entre els volums és 1.

790.- Si volem inscriure dues esferes d'igual radi en un cub, les de major radi tenen el centre sobre la diagonal del cub.
Determineu aquest radi en funció de l'aresta del cub.



Solució:

Siga ABCDA'B'C'D' un cub d'aresta $\overline{AB} = a$.

La diagonal del cub mesura:

$\overline{AC'} = a\sqrt{3}$

Siga M el centre del quadrat.

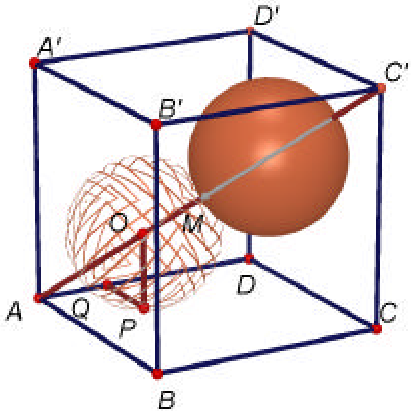
Siga O el centre d'una de les esferes.

Siga P el punt de tangència de l'esfera i la cara ABCD.

Siga $r = \overline{OP} = \overline{OM}$ el radi de l'esfera.

Siga Q la projecció de P sobre l'aresta $\overline{AD}$.

$\overline{PQ} = \overline{AQ} = r$




Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AQP}$:

$\overline{AP} = r\sqrt{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APO}$:

$\overline{AO} = \sqrt{r^2 + \left(r\sqrt{2}\right)^2} = r\sqrt{3}$.

$\overline{AC'} = 2\left(\overline{AO} + \overline{OM}\right) = \left(2 + 2\sqrt{3}\right)r$.

$c\sqrt{3} = \left(2 + 2\sqrt{3}\right)r$.

Resolent l'equació:

$r = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{4}c$.