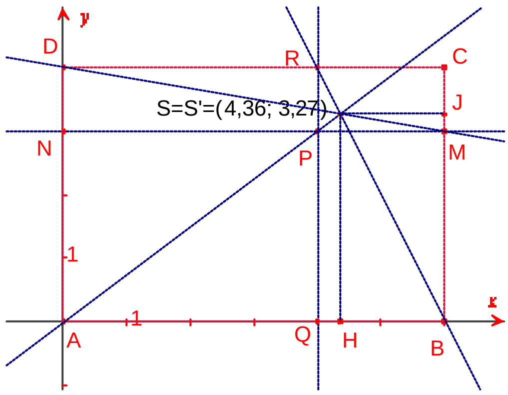
71.- Siguen $A(0,0), B(6,0), C(6,4)$ i $D(0,4)$ els vèrtexs d’un rectangle.
Pel punt $P(4,3)$ tracem dues rectes: una recta horitzontal que talla BC en M i AD en N i una altra recta vertical que talla la AB en Q i CD en R.
Demostreu que les rectes AP, DM i BR passem per un mateix punt.
Crux Mathematicorum M369.

Solució 1.



Siga S la intersecció de les rectes AP, RB.
Siga H la projecció de S sobre el costat $\overline{AB}$.
Siga $x = \overline{AH}$, $y = \overline{SH}$. Calculem les coordenades de S $S(x, y)$.

Els triangles $\overset{\Delta}{AQP}$, $\overset{\Delta}{AHS}$ són semblants. Aplicant el Teorema de Tales:

$$\frac{y}{x} = \frac{3}{4} \qquad (1)$$

Els triangles $\overset{\Delta}{BQR}$, $\overset{\Delta}{BHS}$ són semblants. Aplicant el Teorema de Tales:

$$\frac{y}{6-x} = \frac{4}{2} \qquad (2)$$

Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x} = \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{y}{6-x} = 2 \end{cases}. \text{ La solució és:} \begin{cases} x = \dfrac{48}{11} \\ y = \dfrac{36}{11} \end{cases}. \text{ Aleshores, } S\left(\frac{48}{11}, \frac{36}{11}\right)$$

Siga S’ la intersecció de les rectes RB, DM.
Siga J la projecció de S’ sobre el costat $\overline{BC}$.
Siga $x = \overline{S'J}$, $y = \overline{BJ}$. Calculem les coordenades de S’ $S'(6-x, y)$.

Els triangles $\overset{\Delta}{BCR}$, $\overset{\Delta}{BJS'}$ són semblants. Aplicant el Teorema de Tales:

$$\frac{x}{y} = \frac{2}{4} \qquad (3)$$

Els triangles $\overset{\Delta}{DMC}$, $\overset{\Delta}{S'JM}$ són semblants. Aplicant el Teorema de Tales:

$$\frac{x}{y-3} = \frac{6}{1} \qquad (4)$$

Considerem el sistema format per les expressions (3) (4):

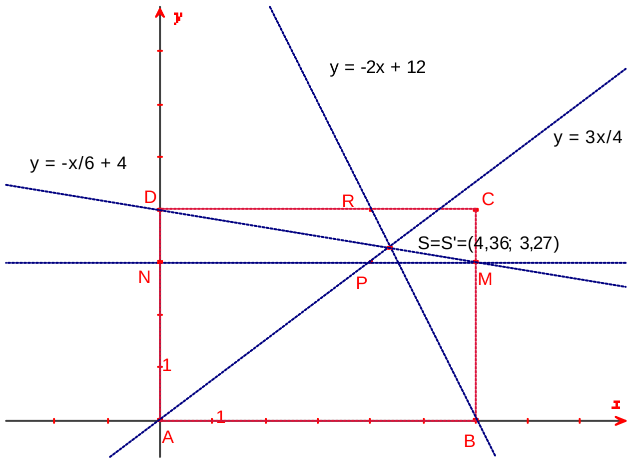
$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x}{y-3} = 6 \end{cases}. \text{ La solució és:} \begin{cases} x = \dfrac{18}{11} \\ y = \dfrac{36}{11} \end{cases}. \text{ Aleshores, } S'\left(6 - \frac{18}{11}, \frac{36}{11}\right) = S'\left(\frac{48}{11}, \frac{36}{11}\right)$$

Aleshores, $S = S'$, per tant, les rectes AP, BR, DM s’intersecten en un punt.

Solució 2:

Determinem l'equació de la recta que passa pels punts A, P:

$r_{AP} \equiv y = \frac{3}{4}x$.



Determinem l'equació de la recta que passa pels punts D, M:

$r_{DM} \equiv y - 4 = -\frac{1}{6}x$.

Determinem l'equació de la recta que passa pels punts B, R:

$r_{BR} \equiv y = -2(x-6)$.

Determinem les coordenades del punt S intersecció de les rectes r_{AP}, r_{BR} , resolent el sistema format per les equacions d'ambdues rectes.

$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x \\ y = -2(x-6) \end{cases}$, la solució és: $\begin{cases} x = \frac{48}{11} \\ y = \frac{36}{11} \end{cases}$, per tant, $S\left(\frac{48}{11}, \frac{36}{11}\right)$.

Determinem les coordenades del punt S' intersecció de les rectes r_{AP}, r_{DM} , resolent el sistema format per les equacions d'ambdues rectes.

$\begin{cases} y = \frac{3}{4}x \\ y - 4 = -\frac{1}{6}x \end{cases}$, la solució és: $\begin{cases} x = \frac{48}{11} \\ y = \frac{36}{11} \end{cases}$, per tant, $S'\left(\frac{48}{11}, \frac{36}{11}\right)$.

Aleshores, $S = S'$, per tant, les rectes r_{AP}, r_{DM}, r_{BR} s'intersecten en un punt.

72.- Un segment $\overline{AB}$ de longitud 3 conté un punt C tal que $\overline{AC} = 2$. Sobre el mateix costat del segment $\overline{AB}$ s'han construït els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ACF}$ i $\overset{\Delta}{CBE}$.

Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AKE}$ si K és el punt mig de $\overline{FC}$.
Crux Mathematicorum M371.

Solució:

$\overline{CK} = \frac{1}{2}\overline{CF} = 1$.

$\angle KCE = 60^{o}$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{CKE}$ és equilàter.

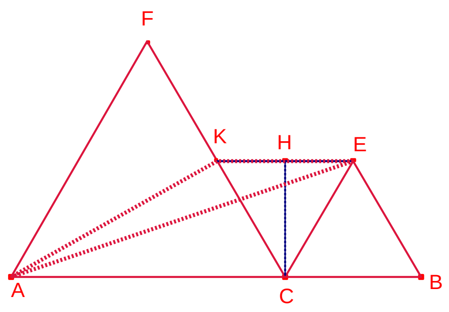
Per tant, $\overline{KE} = 1$.

L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{CKE}$ és $S_{CKE} = \frac{\sqrt{3}}{4}1^2$.

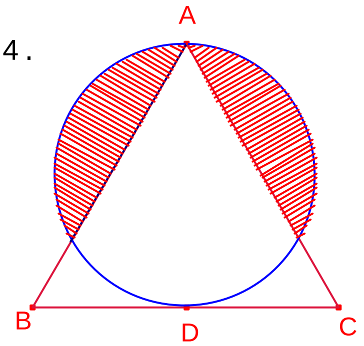
$\overline{KE}$ és paral·lel a $\overline{AB}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{CEK}$, $\overset{\Delta}{AKE}$ tenen la mateixa base $\overline{KE}$ i la mateixa altura sobre aquest costat, per tant tenen la mateixa àrea:

$S_{AKE} = S_{CEK} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

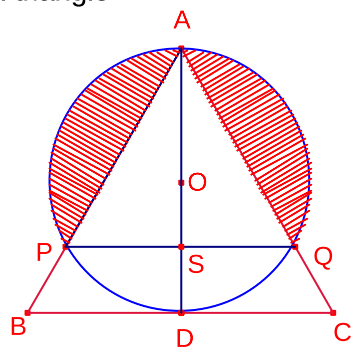


73.- En la següent figura $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle equilàter, $\overline{BC} = 4$.
D és el punt mig del costat $\overline{BC}$.
La circumferència té diàmetre $\overline{AD}$. Calculeu l'àrea de regió ombrejada.



Solució:

Siga O el centre de la circumferència de diàmetre $\overline{AD}$.
Siguen P, Q els punts de tall de la circumferència de diàmetre $\overline{AD}$ i el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.



Notem que O és el baricentre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{APQ}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BDA}$:

$\overline{AD} = 2\sqrt{3}$.

$\overline{OA} = \dfrac{\overline{AD}}{2} = \sqrt{3}$.

Aplicant la propietat del baricentre al triangle $\overset{\Delta}{APQ}$:

$\overline{AS} = \dfrac{3}{2}\overline{OA} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Siga $x = \overline{PQ} = \overline{PA}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ASP}$:

$x^2 = \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$. Resolent l'equació: $x = \overline{PQ} = \dfrac{3}{2}$

Calculem l'àrea S_1 del sector circular de centre O i arc AP que és la tercera part de la circumferència de centre O i radi $\overline{OA}$

$$S_1 = \frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{3}\right)^2 = \pi$$

Calculem l'àrea S_2 del triangle $\overset{\Delta}{OPA}$ que és la tercera part de l'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{APQ}$.

$$S_2 = \frac{1}{3}\left(\frac{3 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

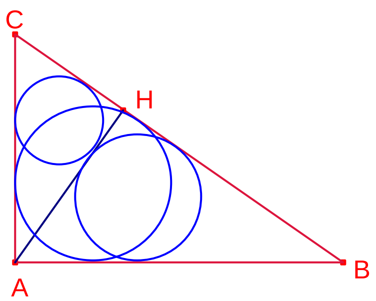
L'àrea ombrejada S és:

$$S = 2(S_1 - S_2) = 2\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right) = 2\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

74.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^{o}$. Siga $\overline{AH}$ l'altura sobre la hipotenusa. La suma dels radis de les circumferències inscrites als triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{AHC}$, $\overset{\Delta}{AHB}$ és igual a $\overline{AH}$.

Solució 1:

Siguen r, r_1, r_2 els radis de les circumferències inscrites als triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{AHC}$, $\overset{\Delta}{AHB}$, respectivament.



El radi de la circumferència inscrita a un triangle rectangle és igual al semiperímetre menys la hipotenusa, aleshores:

$$r = \frac{-a+b+c}{2}, \quad r_1 = \frac{\overline{AH}+\overline{CH}-b}{2}, \quad r_2 = \frac{\overline{AH}+\overline{BH}-c}{2}.$$

$$r + r_1 + r_2 = \frac{-a+b+c}{2} + \frac{\overline{AH}+\overline{CH}-b}{2} + \frac{\overline{AH}+\overline{BH}-b}{2} = \overline{AH}.$$

Solució 2:

Els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{AHC}$, $\overset{\Delta}{AHB}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{r}{a} = \frac{r_1}{b} = \frac{r_2}{c} = \frac{r+r_1+r_2}{a+b+c}.$$

$$r + r_1 + r_2 = \frac{r(a+b+c)}{a} \qquad (1)$$

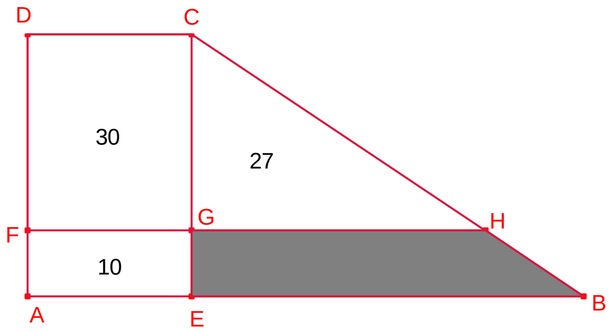
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és: $S_{ABC} = r\frac{a+b+c}{2} = \frac{a\cdot\overline{AH}}{2}$.

$$\overline{AH} = \frac{r(a+b+c)}{a} \qquad (2)$$

De les expressions (1) (2): $r + r_1 + r_2 = \overline{AH}$.

75.- El trapezi ABCE està dividit en dos rectangles AEGF i FGCD, un triangle GHC i un trapezi EBHG. Les àrees dels dos rectangles i del triangle en cm^2 estan indicades en la figura. Calculeu l'àrea del trapezi EBHG.

Olimpíada Matemàtica del Brasil 2008.



Solució:
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.
Siga $x = \overline{AE} = \overline{FG}$

Els triangles $\overset{\Delta}{CFG}$, $\overset{\Delta}{CGH}$ tenen la mateixa altura:

$\dfrac{S_{CGH}}{S_{CFG}} = \dfrac{\overline{GH}}{\overline{FG}}$, $\dfrac{27}{15} = \dfrac{\overline{GH}}{x}$. Aleshores:

$\overline{GG} = \dfrac{9}{5}x$.

$\overline{CG} = \dfrac{S_{CDFG}}{\overline{FG}} = \dfrac{30}{x}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{CFG}$, $\overset{\Delta}{FGE}$ tenen la mateixa altura:

$\dfrac{S_{FGE}}{S_{CFG}} = \dfrac{\overline{GE}}{\overline{CG}}$, $\dfrac{5}{15} = \dfrac{\overline{GE}}{\frac{30}{x}}$. Aleshores:

$\overline{GE} = \dfrac{10}{x}$.

$\overline{CE} = \overline{CG} + \overline{GE} = \dfrac{40}{x}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{CGH}$, $\overset{\Delta}{CEF}$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

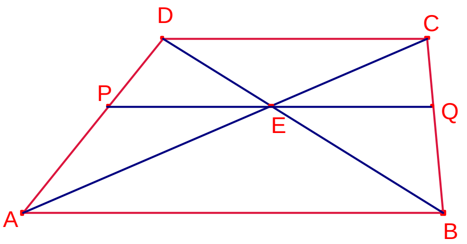
$\dfrac{\overline{EB}}{\overline{GH}} = \dfrac{\overline{CE}}{\overline{CG}}$, $\dfrac{\overline{EB}}{\frac{9}{5}x} = \dfrac{\frac{40}{x}}{\frac{30}{x}}$. Aleshores:

$\overline{EB} = \dfrac{12}{5}x$.

L'àrea del trapezi EBHG és:

$$S_{EBHG} = \frac{\overline{EB} + \overline{GH}}{2}\overline{GE} = \frac{\frac{12}{5}x + \frac{9}{5}x}{2}\frac{10}{x} = 21cm^2.$$

76.- Determineu la longitud del segment d'una recta paral·lela a les bases d'un trapezi, la qual passa pel punt intersecció de les diagonals, si les bases del trapezi són a, b. Shariguin I40.



Solució 1:

Siga el trapezi ABCD de bases paral·leles $a=\overline{AB}$, $b=\overline{DC}$.
Siga E la intersecció de les diagonals del trapezi.
Siga $\overline{PQ}$ el segment de la recta paral·lela a les bases d'un trapezi que passa pel punt E intersecció de les diagonals.
Siga h l'altura del trapezi ABCD, h_1 l'altura del trapezi ABQP, h_2 l'altura del trapezi PQCD.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABE}$, $\overset{\Delta}{CDE}$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$\frac{h_1}{a}=\frac{h_2}{b}=\frac{h_1+h_2}{a+b}=\frac{h}{a+b}$. Aleshores, $h_1=\frac{a}{a+b}h$, $h_2=\frac{b}{a+b}h$.

$S_{ABCD}=S_{ABQP}+S_{PQCD}$.

$\frac{a+b}{2}h=\frac{a+\overline{PQ}}{2}h_1+\frac{b+\overline{PQ}}{2}h_2$.

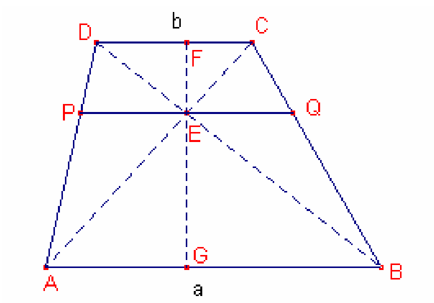
$\frac{a+b}{2}h=\frac{a+\overline{PQ}}{2}\frac{a}{a+b}h+\frac{b+\overline{PQ}}{2}\frac{b}{a+b}h$. Simplificant:

$a+b=\frac{1}{a+b}\left(a^2+b^2+\overline{PQ}(a+b)\right)$.

$(a+b)^2=a^2+b^2+(a+b)\overline{PQ}$.

$2ab=(a+b)\overline{PQ}$.

Aleshores, $\overline{PQ}=\frac{2ab}{a+b}$.



Solució 2:

Siga E la intersecció de les diagonals del trapezi.
Siga $h=\overline{FG}$ altura del trapezi.
Siga $z=\overline{FE}$ perpendicular a les bases.
Siga $\overline{PQ}$ paral·lel a la base que passa pel punt E.
Siga $x=\overline{PE}$, $y=\overline{EQ}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABD}$,$\overset{\Delta}{PED}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{x}{a}=\frac{z}{h}$, aleshores, $x=a\frac{z}{h}$ (1)

Els triangles $\overset{\Delta}{ABE}$,$\overset{\Delta}{CDE}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{a}{b}=\frac{h-z}{z}$, aleshores, $\frac{h}{z}=\frac{a}{b}+1$ (2)

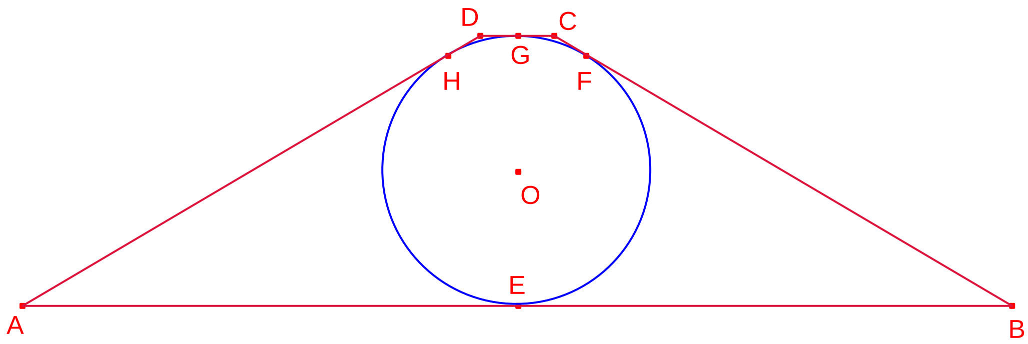
Substituint l'expressió (2) en l'expressió (1):

$x=a\frac{z}{h}=a\frac{1}{\frac{a}{b}+1}=\frac{ab}{a+b}$. Anàlogament, $y=\frac{ab}{a+b}$.

Per tant, $\overline{PQ}=x+y=\frac{2ab}{a+b}$.

77.- L'àrea d'un trapezi isòsceles d'àrea S està circumscrit a una circumferència i la seua altura és igual a la meitat dels costats no paral·lels. Determineu el radi de la circumferència.
Shariguin I 44.

Solució:



Siga el trapezi isòsceles ABCD de bases paral·leles $\overline{AB}$, $\overline{DC}$.
Siga la circumferència inscrita al trapezi de centre O. Siguen E, F, G, H els punts de tangència de la circumferència inscrita i els costats $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$ del trapezi.
Siga $h = \overline{GE}$ altura del trapezi, aleshores el radi de la circumferència inscrita és:

$$r = \frac{h}{2}.$$

Per hipòtesi $\overline{BC} = \overline{AD} = 2h$.
Siga $x = \overline{AE} = \overline{BE} = \overline{BF}$. $y = \overline{CF} = \overline{CG}$.

$$x + y = 2h$$

L'àrea del trapezi és:

$$S = \frac{2 \cdot \overline{BE} + 2 \cdot \overline{CG}}{2} h.$$

$$S = (x + y)h.$$

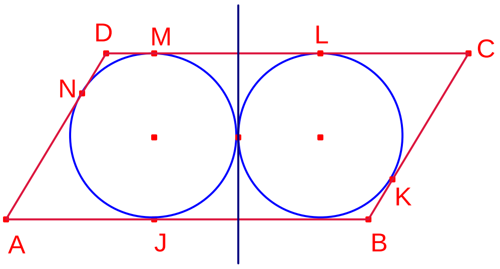
$$S = 2h^2.$$

$$h = \sqrt{\frac{S}{2}}.$$

$$r = \frac{h}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{2}}.$$

78.- Una recta perpendicular a dos costats d'un paral·lelogram divideix aquest en dos trapezis, tal que en cadascun dels quals es pot inscriure una circumferència. Determineu l'angle agut del paral·lelogram, si els seus costats són iguals a a i b, $a < b$.
Shariguin I48.

Solució:



Siga el paral·lelogram ABCD $\overline{AD} = \overline{BC} = a$, $\overline{AB} = \overline{CD} = b$.
La recta divideix el paral·lelogram en dues figures iguals simètriques respecte del centre del paral·lelogram.

Siga $\alpha = \angle DAB$ angle agut del paral·lelogram.

$$\sin\alpha = \frac{2r}{a}.$$

Siga $x = \overline{AJ} = \overline{AN} = \overline{CK} = \overline{CL}$.
Siga $y = \overline{DM} = \overline{DN}$.
Notem que $\overline{LM} = 2r$

$$\overline{CD} = \overline{DM} + \overline{ML} + \overline{CL}.$$
$$b = x + y + 2r$$

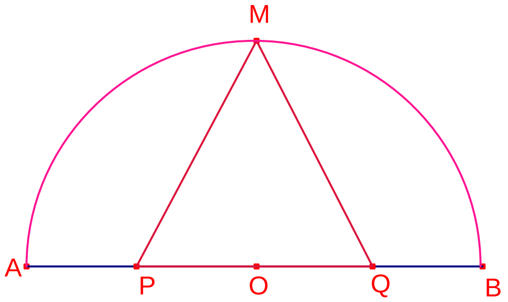
$$\overline{AD} = \overline{AN} + \overline{ND}$$
$$a = x + y$$

Aleshores, $b = a + 2r$.
Per tant, $2r = b - a$.

$$\sin\alpha = \frac{2r}{a} = \frac{b-a}{a}.$$
$$\alpha = \arcsin\left(\frac{b-a}{a}\right).$$

79.- Siga un semicercle de diàmetre $\overline{AB}$. Pel punt mig de la semicircumferència es tracen dues rectes que divideixen el semicercle en tres parts d'igual àrea. En quina raó divideixen aquestes rectes el diàmetre $\overline{AB}$.
Shariguin I49.

Solució:



Siga M el punt mig de la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB}$.
Siga O el punt mig del diàmetre $\overline{AB}$.
Siga $r = \overline{OA}$ el radi del semicercle.
Siguen P i Q els punts del diàmetre $\overline{AB}$ tal que les rectes MP, MQ divideixen el semicercle en tres parts d'igual àrea.

Aleshores l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PQM}$ és la tercera part de l'àrea del semicercle.

$\dfrac{\overline{PQ}\cdot r}{2} = \dfrac{\frac{\pi r^2}{2}}{3}$. Aleshores, $\overline{PQ} = \dfrac{\pi}{3} r$.

Per tant,

$$\overline{AP} = \overline{QB} = \overline{OA} - \overline{OP} = r - \frac{\pi}{6} r = \left(\frac{6-\pi}{6}\right) r .$$

Aleshores:

$$\overline{AP} : \overline{PQ} : \overline{QB} = \frac{6-\pi}{6} : \frac{\pi}{3} : \frac{6-\pi}{6} = 6-\pi : 2\pi : 6-\pi .$$

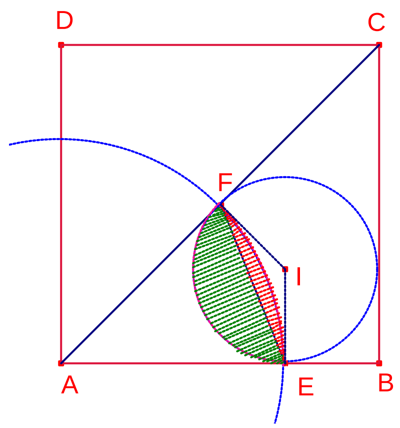
80.- Donat el quadrat ABCD de costat a, s'han construït la circumferència tangent als costat $\overline{AB}$ (en el punt E), $\overline{BC}$ i a la diagonal $\overline{AC}$ i la circumferència de centre A que passa pel punt E. Determineu l'àrea de la part comuna als dos cercles limitats per aquestes circumferències.
Shariguin I50

Solució:
Siga I el centre de la circumferència tangent als costat $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i a la diagonal $\overline{AC}$.
Siga F el punt de tangència de la circumferència amb la diagonal $\overline{AC}$.

Notem que $\angle EFA = 45^o$, $\angle AEI = \angle AFI = 90^o$, aleshores, $\angle FIE = 135^o$.

$$\overline{AE} = \frac{\overline{AE} + \overline{AC} - \overline{BC}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a.$$

$$\overline{IE} = \overline{EB} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AC}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} a$$



Calculem l'àrea del sector circular EAF:

$$S_{\sec torEAF} = \frac{1}{8}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = \frac{\pi}{16}a^2.$$

Calculem l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AEF}$:

$$S_{AEF} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a \cdot \frac{1}{2}a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{8}a^2.$$

L'àrea del segment circular és:

$$S_1 = S_{\sec torEAF} - S_{AEF} = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{\sqrt{2}}{8}\right)a^2.$$

Calculem l'àrea del sector circular EIF:

$$S_{\sec torEIF} = \frac{3}{8}\pi\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}a\right)^2 = \frac{3\pi}{16}\left(3-2\sqrt{2}\right)a^2.$$

Calculem l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{EIF}$:

$$S_{EIF} = \frac{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}a\right)^2 \cdot \sin 135^o}{2} = \frac{3\sqrt{2}-4}{8}a^2.$$

L'àrea del segment circular és:

$$S_2 = S_{\sec torEIF} - S_{EIF} = \left(\frac{3\pi}{16}\left(3-2\sqrt{2}\right) - \frac{3\sqrt{2}-4}{8}\right)a^2.$$

L'àrea de la part comuna als dos cercles limitats per aquestes circumferències és:

$$S = S_1 + S_2 = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{\sqrt{2}}{8}\right)a^2 + \left(\frac{3\pi}{16}\left(3-2\sqrt{2}\right) - \frac{3\sqrt{2}-4}{8}\right)a^2 = \frac{a^2}{8}\left(\left(5-3\sqrt{2}\right)\pi + 4 - 4\sqrt{2}\right).$$