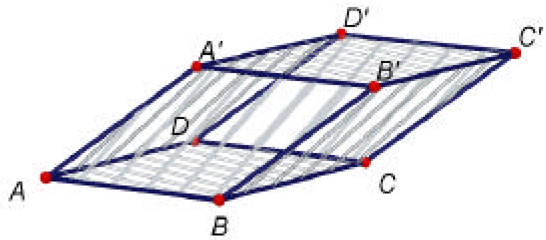
Problemes de Geometria per a l'ESO 80

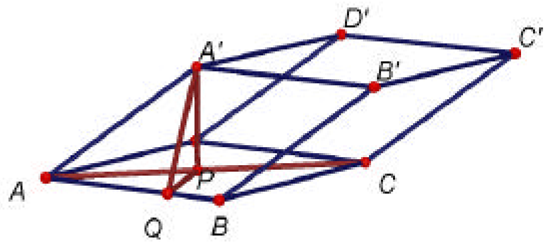
791.- La base d'un paral·lelepípede és un rombe ABCD de costat a i angle agut 60º.
L'aresta lateral mesura a i $\angle A'AB = \angle A'AD = 45^{o}$.
Calculeu el seu volum.
Gúsiev 800.



Solució:
L'àrea de la base ABCD és igual a l'àrea de dos triangles equilàters de costat a:

$$S_{ABCD} = 2\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 .$$

$\overline{AA'} = a$.
Siga P la projecció de A' sobre la base ABCD.
P pertany a la diagonal de la base.
Siga Q la projecció de P sobre l'aresta $\overline{AB}$.
$\overline{A'Q}$ és perpendicular a l'aresta $\overline{AB}$.
$\angle A'AB = 45^{o}$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{AQA'}$:



$$\overline{AQ} = \overline{A'Q} = \frac{\sqrt{2}}{2}a .$$

$\angle PAQ = 30^{o}$, $\overline{AP} = 2\overline{PQ}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AQP}$:

$$\overline{AP} = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{6}}{6}a .$$

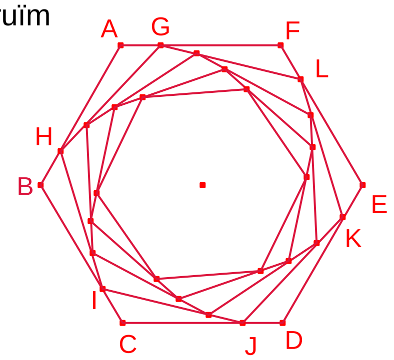
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APA'}$:

$$\overline{A'P} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{6}a\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}a .$$

El volum del paral·lelepípede és:

$$V = S_{ABCD} \cdot \overline{A'P} = 2\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}a = \frac{1}{2}a^3$$

792.- A partir de l'hexàgon regular ABCDEF de costat c construïm l'hexàgon regular GHIJKL tal que $\overline{AG} = \frac{1}{4}\overline{AF}$.



A partir de l'hexàgon regular GHIJKL en construïm un altre amb el mateix procediment, i així successivament.
Determineu la mesura dels costats dels hexàgons formats.
Determineu l'àrea dels hexàgons formats.
Determineu la suma de les àrees dels infinits hexàgons.

Solució:
Siga $\{c_i\}$ successió dels costats.

$c_1 = c$.

$\angle GAH = 120^o$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AGH}$:

$$c_2 = \overline{HE} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}c\right)^2 + \left(\frac{3}{4}c\right)^2 - 2\frac{1}{4}c\frac{3}{4}c\left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{13}}{4}c.$$

$$c_3 = \frac{\sqrt{13}}{4}c_2 = \frac{\sqrt{13}}{4}\frac{\sqrt{13}}{4}c.$$

Els costats formen un progressió geomètrica de primer terme c i raó $\frac{\sqrt{13}}{4}$.

El terme general és:

$$c_n = \left(\frac{\sqrt{13}}{4}\right)^{n-1} c.$$

Siga $\{S_n\}$ la successió de les àrees dels hexàgons.
L'àrea de l'hexàgon regular ABCDEF és:

$$S_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}c^2.$$

Els hexàgons regulars són semblants i la raó de les àrees és igual al quadrat de la raó dels costats.

Aleshores les àrees formen un progressió geomètrica de primer terme $S_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}c^2$ i raó $r = \left(\frac{\sqrt{13}}{4}\right)^2 = \frac{13}{16}$.

El terme general de les àrees és:

$$S_n = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{13}{16}\right)^{n-1} c^2.$$

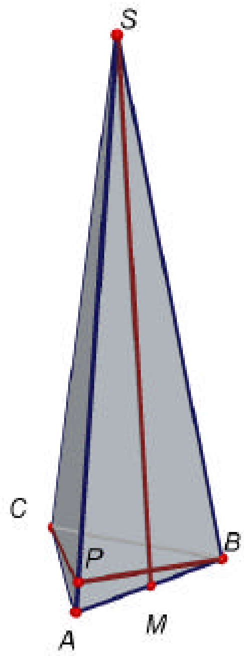
Notem que $-1 < r < 1$, aleshores la successió de les àrees té suma infinita.
La suma de les infinites àrees dels hexàgons regulars és:

$$S = \frac{S_1}{1-r} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}c^2}{1-\frac{13}{16}} = 8\sqrt{3}\ c^2.$$

793.- En una piràmide triangular regular l'aresta lateral és igual a tres vegades l'aresta de la base.
Calculeu l'angle diedre d'una aresta lateral.
Gúsiev, 702.

Solució:

Siga la piràmide recta ABCS, on $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle equilàter.
Siga $\overline{AB} = a$, $\overline{AS} = 3a$.
Siga P de l'aresta $\overline{AS}$ tal que $\overline{BP} \perp \overline{AS}$.
L'angle diedre que cerquem és $\angle BPC = \alpha$.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{AMS}$:

$$\overline{MS} = \sqrt{(3a)^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{35}}{2}a.$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AMS}$, $\overset{\Delta}{APB}$ són semblants i la raó és 3:1.

Aleshores, $\overline{PB} = \frac{1}{3}\overline{MS} = \frac{\sqrt{35}}{6}a$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BPC}$:

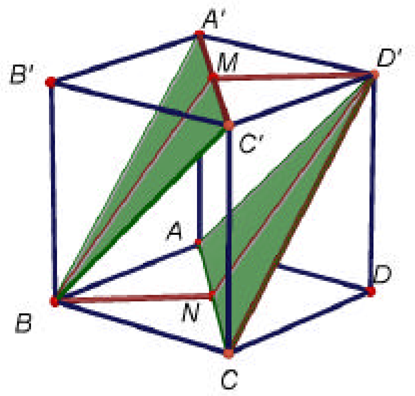
$$a^2 = \left(\frac{\sqrt{35}}{6}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{35}}{6}\right)^2 - 2\frac{\sqrt{35}}{6}\frac{\sqrt{35}}{6}\cos\alpha.$$

Simplificant:

$$\cos\alpha = \frac{17}{35}, \ \alpha = \arccos\frac{17}{35} \approx 60º56'27''.$$

794.- Calculeu la distància entre les diagonals que no s'intersecten de les cares adjacents d'un cub d'aresta a.
Gúsiev 682.

Solució 1:
Siga el cub ABCDA'B'C'D' d'aresta a.



Les diagonals $\overline{A'C'}$, $\overline{CD'}$ es creuen i són de cares adjacents.
Considerem el plànol ACD' que conté $\overline{CD'}$ i és paral·lel a $\overline{A'C'}$.
Considerem el plànol BA'C' que conté $\overline{A'C'}$ i és paral·lel a $\overline{CD'}$.
La distància entre les diagonals $\overline{A'C'}$, $\overline{CD'}$ és igual a la distància entre els dos plànols.
Siga M el punt mig de la diagonal $\overline{A'C'}$.
Siga N el punt mig de la diagonal $\overline{AC}$.
$\overline{BN}$ i $\overline{D'M}$ són paral·lels.
La distància entre els dos plànol és igual a l'altura del paral·lelogram BND'M referida a la base $\overline{BM}$.

$\overline{BN} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BNM}$:

$$\overline{BM} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + a^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}a.$$

L'àrea del paral·lelogram BND'M és:

$$S_{BND'M} = \overline{BM} \cdot h = \overline{BN} \cdot a. \quad \sqrt{\frac{3}{2}}a \cdot h = \frac{\sqrt{2}}{2}a^2.$$

Aleshores, la distància que cerquem és: $h = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.

Notem que els dos plànols divideixen la diagonal del cub $\overline{BD'} = a\sqrt{3}$ en tres parts iguals.

Solució 2:
Considerem el cub ABCDA'B'C'D' d'aresta a i coordenades:
$A(0,0,0)$, $A'(0,0,a)$, $C'(a,a,a)$, $C(a,a,0)$, $D'(0,a,a)$.

$\vec{A'C'} = (a,a,0)$, $\vec{CD'} = (-a,0,a)$, $\vec{CC'} = (0,0,a)$.

La distància entre les dues diagonals és: $d = \frac{\left|\left[\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{CD'}, \overrightarrow{CC'}\right]\right|}{\left\|\overrightarrow{A'C'} \times \overrightarrow{CD'}\right\|}$.

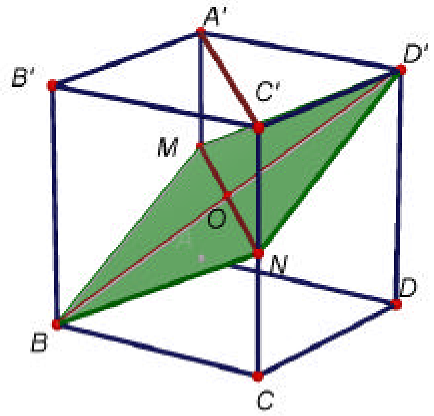
$$\left|\left[\vec{A'C'}, \vec{CD'}, \vec{CC'}\right]\right| = \left\|\begin{matrix} a & a & 0 \\ -a & 0 & a \\ 0 & 0 & a \end{matrix}\right\| = a^3, \quad \vec{A'C'} \times \vec{CD'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & a & 0 \\ -a & 0 & a \end{vmatrix} = (a^2, -a^2, a^2).$$

$$\left\|\overrightarrow{A'C'} \times \overrightarrow{CD'}\right\| = a^2\sqrt{3}.$$

$$d = \frac{a^3}{a^2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

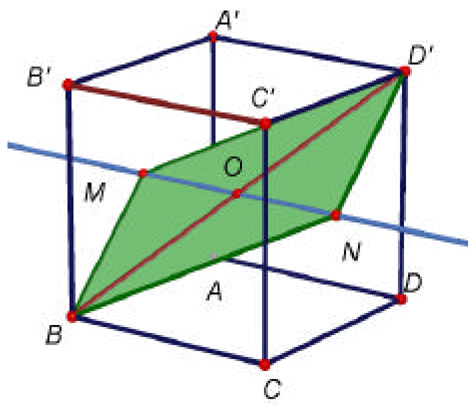
795.-
a) Calculeu la distància entre la diagonal d'un cub d'aresta a i la diagonal d'una cara que no s'intersecta amb la diagonal del cub.
b) Calculeu la distància entre la diagonal d'un cub d'aresta a i una aresta que no s'intersecta amb la diagonal del cub.

Solució:
a)
Siga el cub ABCDA'B'C'D' d'aresta a.



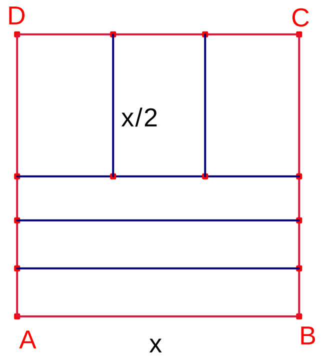
La diagonal $\overline{BD'}$ i la diagonal de la cara superior $\overline{A'C'}$, es creuen.
Siga O el punt mig de la diagonal $\overline{BD'}$ (centre del cub).
Pel punt O tracem una recta paral·lela a $\overline{A'C'}$.
La recta anterior talla les arestes $\overline{AA'}$, $\overline{CC'}$ en els punts M, N, respectivament.
M i N són els punts migs de les arestes $\overline{AA'}$, $\overline{CC'}$.
MNC'A' és un rectangle.
$\angle A'MO = 90^{o}$. $\angle MOB = 90^{o}$.
La distància entre $\overline{A'C'}$, $\overline{BD'}$ é igual a la distància entre la recta A'C' i el plànol BMD'N.
$d = \overline{A'M} = \frac{1}{2}a$.

b)
Siga el cub ABCDA'B'C'D' d'aresta a.



La diagonal $\overline{BD'}$ i l'aresta $\overline{B'C'}$, es creuen.
Siga O el punt mig de la diagonal $\overline{BD'}$ (centre del cub).
Pel punt O tracem una recta paral·lela a $\overline{B'C'}$.
La recta anterior talla les cares ABB'A', CDD'C' en els punts M, N, respectivament.
M i N són els centres de les cares.
MNC'B' és un rectangle.
$\angle B'MO = 90^{o}$, $\angle BMB' = 90^{o}$.
La distància entre $\overline{B'C'}$, $\overline{BD'}$ é igual a la distància entre la recta B'C' i el plànol BMD'N.
$d = \overline{B'M} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

796.- Un quadrat es talla per la meitat amb un línia paral·lela a un costat.
Una de les dues parts es talla en tres parts iguals amb dues línies paral·leles al costat menut i l'altra part es talla en tres parts iguals amb dues línies paral·leles al costat gran.
El perímetre de les sis peces és 72cm.
Determineu el perímetre del quadrat inicial.
KöMaL, K368.

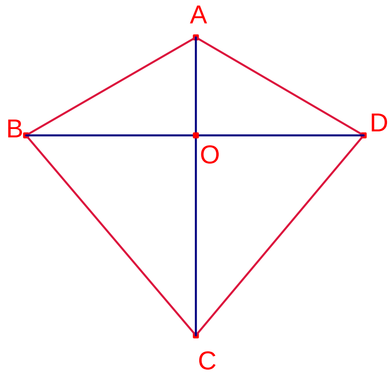


Solució:
Siga c el costa del quadrat inicial.
Fetes les línies divisòries d les sis peces, observem que les línies pertanyen a dos rectangles.
El perímetre total dels 6 rectangles és:

$$4x + 2\left(3x + 2\frac{x}{2}\right) = 72 .$$

Resolent l'equació:
$x = 6$, costal del quadrat exterior.
El perímetre del quadrat exterior és:
$4x = 24cm$.

797.- Un camp té forma de cometa amb tres angles de 80º.
Si la seua àrea és 900m^2.
Calculeu el seu perímetre.
KöMaL, C1158.



Solució:
Si 3 angles mesuren 80º el tercer angle mesura 120º.
Siga el cometa ABCD.
$x=\overline{AB}=\overline{AD}$, $y=\overline{BD}=\overline{CD}$, $A=120^\circ$, $b=c=d=80^\circ$.
Les diagonals s'intersecten en el punt O.
$\angle ABO=30^\circ$, $\angle OBC=50^\circ$.

$$\overline{OA}=\frac{1}{2}x,\ \overline{OB}=\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BOC}$:

$$\overline{OC}=\overline{OB}\cdot\text{tg}50^\circ=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\text{tg}50^\circ\right)\cdot x.$$

L'àrea del cometa és:

$$S_{ABCD}=\frac{\overline{BD}\cdot\overline{AC}}{2}=\overline{OB}\left(\overline{OA}+\overline{OC}\right).$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x\left(\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}\text{tg}50^\circ\cdot x\right)=900.$$

$$x^2=\frac{3600}{3\text{tg}50^\circ+\sqrt{3}}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BOC}$:

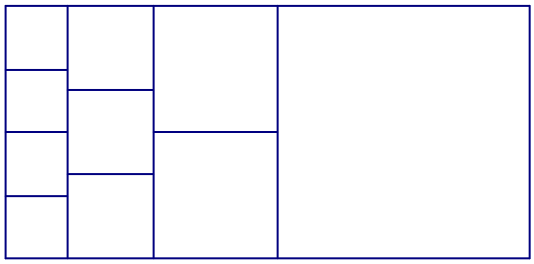
$$y^2=\overline{OB}^2+\overline{OC}^2=\frac{3}{4}\frac{3600}{3\text{tg}50^\circ+\sqrt{3}}+\frac{3}{4}\text{tg}^2 50^\circ\frac{3600}{3\text{tg}501+\sqrt{3}}=\frac{2700\left(1+\text{tg}^2 50^\circ\right)}{3\text{tg}50^\circ+\sqrt{3}}.$$

El perímetre del cometa és:

$$p=2(x+y)=2\left(\frac{60}{\sqrt{3\text{tg}50^\circ+\sqrt{3}}}+\frac{30\sqrt{3}\sqrt{1+\text{tg}^2 50^\circ}}{\sqrt{3\text{tg}50^\circ+\sqrt{3}}}\right)=$$

$$=\frac{60}{\sqrt{3\text{tg}50^\circ+\sqrt{3}}}\left(2+\sqrt{3}\sqrt{1+\text{tg}^2 50}\right)\approx 122'26\text{m}.$$

798.- El rectangle de la figura està dividit en 10 quadrats.
Les mesures de tots els quadrat són enters positius i són els menors valors possibles.
Calculeu l'àrea del rectangle.



Solució:

Siga el rectangle ABCD, $\overline{AD} = 4x$.

$\overline{DP} = \frac{1}{4}\overline{AD} = x$.

$\overline{PQ} = \frac{1}{3}\overline{AD} = \frac{4}{3}x$.

$\overline{QR} = \frac{1}{2}\overline{AD} = 2x$.

$\overline{DP} = \overline{AD} = 4x$.

Tots els quadrats tenen mesures enteres, aleshores $\frac{4x}{3} \in N$.

Aleshores x és múltiple de 3.

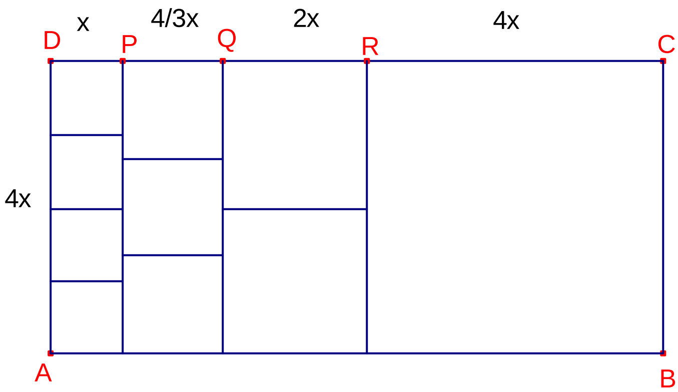
El menor és $x = 3$.

$\overline{CD} = x + \frac{4}{3}x + 2x + 4x = \frac{25}{3}x$.

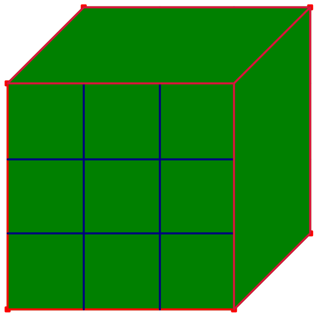
Substituint $x = 3$: $\overline{AD} = 12$, $\overline{CD} = 25$.

L'àrea del rectangle és:

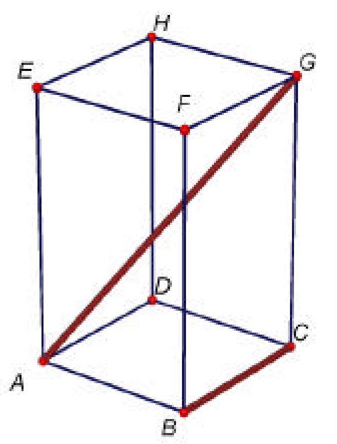
$S_{ABCD} = \overline{CD} \cdot \overline{AD} = 25 \cdot 12 = 300$.



799.- Un cub de fusta pintat de verd, s'ha serrat en 27 cubs menuts iguals.
Quina és la raó de la superfície pintada i la superfície no pintada.



Solució:
Siga el cub d'aresta 3a.
La regió pintada de verd és igual a l'àrea del cub d'aresta 3a:
$S_v = 6(3a)^2 = 54a^2$.
L'àrea no pintada és igual a l'àrea de 27 cubs d'aresta a menys l'àrea pintada de verd:
$S_n = 27 \cdot 6a^2 - 54a^2 = 108a^2$.
La proporció entre la superfície pintada i la no pintada és:
$\frac{S_v}{S_n} = \frac{54a^2}{108a^2} = \frac{1}{2}$.



800.- L'altura d'un prima quadrangular regular és h.
Determineu la distància entre l'aresta de la base, la longitud de la qual és a, i la diagonal del cub que no la intersecta.
Gúsiev 679.

Solució 1:

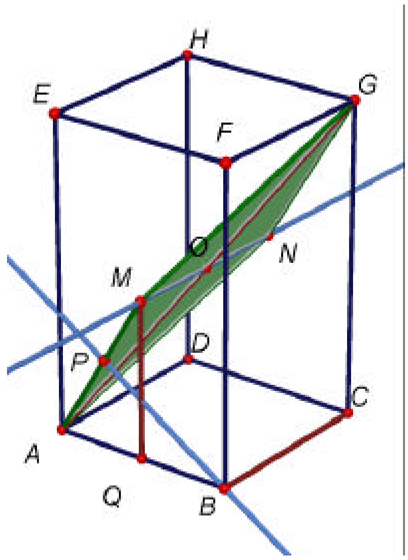
Siga el prisma ABCDEFG de base quadrada ABCD, $\overline{AB}=a$ i altura $\overline{AE}=h$

La diagonal $\overline{AG}$ i l'aresta $\overline{BC}$, es creuen.

Siga O el punt mig de la diagonal $\overline{AG}$.

Pel punt O tracem una recta paral·lela a $\overline{BC}$.

La recta anterior talla les cares ABFE, CDHG en els punts M, N, respectivament.
M i N són els centres de les cares.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABF}$:

$\overline{AF}=\sqrt{a^2+h^2}$.

$\overline{AM}=\overline{MB}=\frac{1}{2}\overline{AF}=\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{2}$.

Siga P del segment $\overline{AM}$, tal que $\angle APB=90^o$

La distància entre $\overline{AG}$, $\overline{BC}$ é igual a la distància entre la recta BC i el plànol AMGN:

$d=\overline{BP}$.

$\overline{QM}=\frac{1}{2}h$.

Siga Q el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AMB}$ és:

$$S_{ABM}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{QM}}{2}=\frac{\overline{AM}\cdot\overline{BP}}{2}$$

$a\frac{1}{2}h=\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{2}\overline{BP}$. Resolent l'equació: $d=\overline{BP}=\frac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}$.

Solució 2:

Considerem el cub ABCDA'B'C'D' d'aresta a i coordenades:

$A(0,0,0))$, $B(0,a,0)$, $C(a,a,0)$, $G(a,a,h)$.

$\vec{AG}=(a,a,h)$, $\vec{BC}=(a,0,0)$, $\vec{AB}=(0,a,0)$.

La distància entre les dues diagonals és: $d=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AG},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AB}\right]\right|}{\left\|\vec{AG}\times\vec{BC}\right\|}$.

$$\left|\left[\vec{AG},\vec{BC},\vec{AB}\right]\right|=\left\|\begin{matrix}a & a & h\\ a & 0 & 0\\ 0 & a & 0\end{matrix}\right\|=a^2h,\quad \vec{AG}\times\vec{BC}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ a & a & h\\ a & 0 & 0\end{vmatrix}=\left(0,ah,-a^2\right).$$

$\left\|\overrightarrow{AG}\times\overrightarrow{BC}\right\|=a\sqrt{a^2+h^2}$.

$$d=\frac{a^2h}{a\sqrt{a^2+h^2}}=\frac{ah}{\sqrt{a^2+h^2}}.$$