Problemes de Geometria per a l'ESO 81

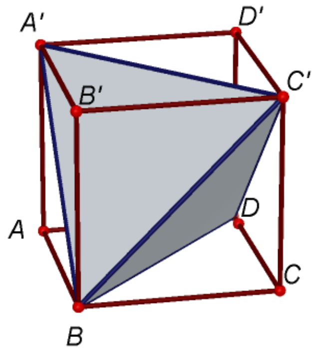
801.- En un cub dibuixeu en tetraedre regular amb els vèrtexs del cub.
Determineu la proporció entre els volums del tetraedre i del cub.

Solució:

Siga el cub ABCDA'B'C'D' d'aresta $\overline{AB} = a$.

El volum del cub és:

$V_{cub} = a^3$.



Una de les dues possibilitats de tetraedre regular és el tetraedre de vèrtexs BDA'C'.

Notem que els tetraedres BCDC', ABDA', A'B'C'B, A'C'D'D són iguals.

El volum del tetraedre regular BDA'C' és igual a l'àrea del cub menys quatre vegades el volum del tetraedre BCDC'.

El volum el tetraedre BCDC' és:

$$V_{BCDC'} = \frac{1}{3}S_b \cdot h = \frac{1}{3}\frac{\overline{BC} \cdot \overline{CD}}{2}\overline{CC'} = \frac{1}{6}a^3.$$

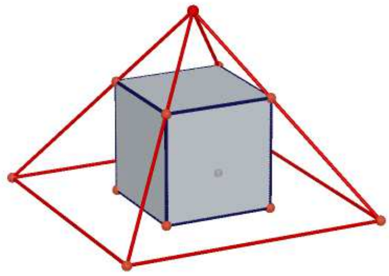
El volum el tetraedre regular BDA'C' és:

$$V_{BCA'C'} = v_{cub} - 4v_{BCDC'} = a^3 - 4\frac{1}{6}a^3 = \frac{1}{3}a^3.$$

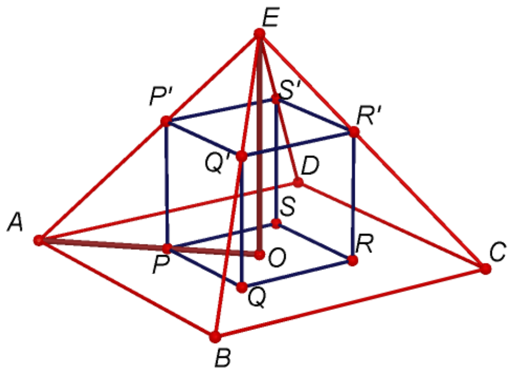
La proporció entre els volums del tetraedre regular BDA'C' i del cub és:

$$\frac{V_{BCA'C'}}{V_{cub}} = \frac{\frac{1}{3}a^3}{a^3} = \frac{1}{3}.$$

802.- Una piràmide quadrangular regular té totes les arestes igual a a.
Determineu la proporció entre els volums del cub inscrit i la piràmide.



Solució:
Siga la piràmide ABCDE de base quadrada ABCD que té totes les arestes iguals a a.



$\overline{AC} = a\sqrt{2}$, $\overline{AE} = \overline{CE} = a$.
Aleshores, $\angle AEC = 90^{o}$, $\angle EAC = 45^{o}$.
Siga O el peu de l'altura.

$$\overline{AO} = \overline{OE} = \frac{\sqrt{2}}{2}a .$$

Siga PQRSP'Q'R'S' el cub inscrit en la piràmide,
$\overline{PQ} = c$, la seua aresta.

$\overline{PR} = c\sqrt{2}$.

$$\overline{PO} = \frac{\sqrt{2}}{2}c .$$

$\overline{AP} = \overline{PP'} = c$.

$$\overline{AP} = \overline{AO} - \overline{PO} = \frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{\sqrt{2}}{2}c .$$

$c = \frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{\sqrt{2}}{2}c$. Resolent l'equació:

$c = \left(\sqrt{2} - 1\right)a$.

El volum de cub és:

$$V_c = c^3 = \left(\left(\sqrt{2} - 1\right)a\right)^3 = \left(5\sqrt{2} - 7\right)a^3 .$$

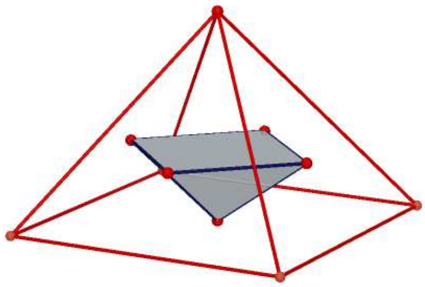
El volum de la piràmide és:

$$V_p = \frac{1}{3}S_b \cdot h = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3 .$$

La proporció entre els volums del cub inscrit i la piràmide és:

$$\frac{V_c}{V_p} = \frac{\left(5\sqrt{2} - 7\right)a^3}{\frac{\sqrt{2}}{6}a^3} = 3\left(10 - 7\sqrt{2}\right) \approx 0.3015 .$$

803.- Una piràmide quadrangular regular té totes les arestes igual a a.
Determineu la proporció entre els volums de la piràmide i la piràmide dual.
(Poliedre en què cada cara s'obté unint els centres de les cares que s'intersecten en un mateix vèrtex del poliedre donat).

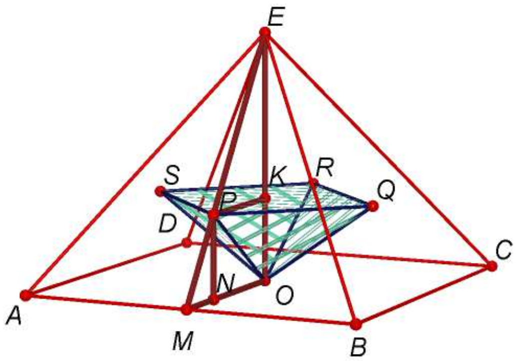


Solució:
Siga la piràmide ABCDE de base quadrada ABCD que té totes les arestes iguals a a.
$\overline{AC} = a\sqrt{2}$, $\overline{AE} = \overline{CE} = a$.
Aleshores, $\angle AEC = 90^o$, $\angle EAC = 45^o$.
Siga O el peu de l'altura.

$$\overline{AO} = \overline{OE} = \frac{\sqrt{2}}{2}a .$$

Siga PQRSO la piràmide dual, $\overline{PQ} = c$, l'aresta de la base.
Siga K el centre del quadrat PQRS.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.

$$\overline{MO} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}a .$$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AME}$: $\overline{ME} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

P és el baricentre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABE}$. Aplicant la propietat del baricentre:

$$\overline{MP} = \frac{1}{3}\overline{ME} = \frac{\sqrt{3}}{6}a , \ \overline{PE} = \frac{2}{3}\overline{ME} = \frac{\sqrt{3}}{3}a .$$

Siga N la projecció de P sobre la base ABCD.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{MOE}$, $\overset{\Delta}{PKE}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{PK} = \frac{\overline{PE}}{\overline{ME}}\overline{MO} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\frac{1}{2}a = \frac{1}{3}a . \ \overline{PR} = 2\overline{PK} = \frac{2}{3}a .$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{PQR}$:

$$\overline{PQ} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{PR} = \frac{\sqrt{2}}{3}a .$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{MOE}$, $\overset{\Delta}{MNP}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{PN} = \frac{\overline{MP}}{\overline{ME}}\overline{OE} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a}\frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{6}a .$$

El volum de la piràmide ABCDE és:

$$V_{ABCDE} = \frac{1}{3}S_b \cdot h = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3 .$$

El volum de la piràmide PQRSO és:

$$V_{PQRSO} = \frac{1}{3} S_b \cdot h = \frac{1}{3}\overline{PQ}^2 \cdot \overline{PN} = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{6} a = \frac{\sqrt{2}}{81} a^3 .$$

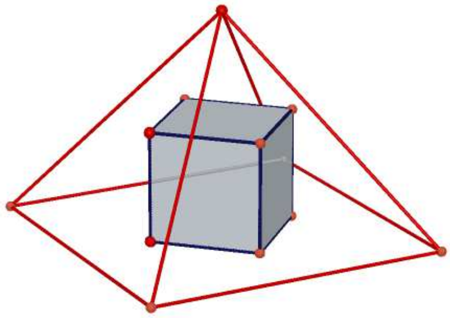
La proporció entre els volums de la piràmide ABCDE i la piràmide PQRSO és:

$$\frac{V_{ABCDE}}{V_{PQRSO}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{6} a^3}{\frac{\sqrt{2}}{81} a^3} = \frac{27}{2} .$$

Notem que les la piràmide ABCDE i la piràmide PQRSO no són semblants ja que

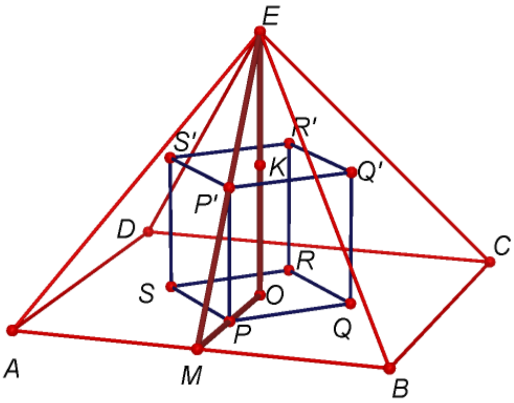
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OE}} \neq \frac{\overline{PQ}}{\overline{OK}} , \quad \frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2} a} \neq \frac{\frac{\sqrt{2}}{3} a}{\frac{\sqrt{2}}{6} a} .$$

804.- Una piràmide quadrangular regular té totes les arestes igual a a.
Determineu la proporció entre els volums del cub que té quatre vèrtexs en cadascuna de les cares laterals i quatre vèrtexs en la base de la piràmide.



Solució:
Siga la piràmide ABCDE de base quadrada ABCD que té

totes les arestes iguals a a.



$\overline{AC} = a\sqrt{2}$, $\overline{AE} = \overline{CE} = a$.

Aleshores, $\angle AEC = 90^{o}$, $\angle EAC = 45^{o}$.

Siga O el peu de l'altura.

$\overline{AO} = \overline{OE} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Siga PQRSP'Q'R'S' el cub.

$\overline{PQ} = c$, la seua aresta.

$\overline{PR} = c\sqrt{2}$. $\overline{PO} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.

$\overline{MO} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}a$.

Siga K el centre del quadrat P'Q'R'S'.

$\overline{P'K'} = \overline{PO} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$. $\overline{EK} = \frac{\sqrt{2}}{2}a - c$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{MOE}$, $P'\overset{\Delta}{KE}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{EK}}{\overline{P'K}} = \frac{\overline{EO}}{\overline{OM}}.$$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}a - c}{\frac{\sqrt{2}}{2}c} = \sqrt{2}.$$ Resolent l'equació:

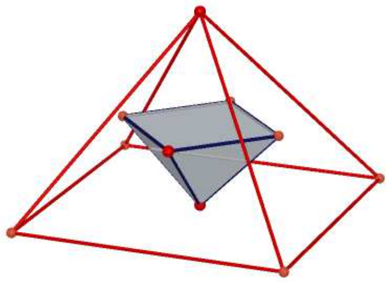
$$c = \frac{\sqrt{2}}{4}a.$$

El volum de cub és: $V_c = c^3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}a\right)^3 = \frac{\sqrt{2}}{32}a^3$.

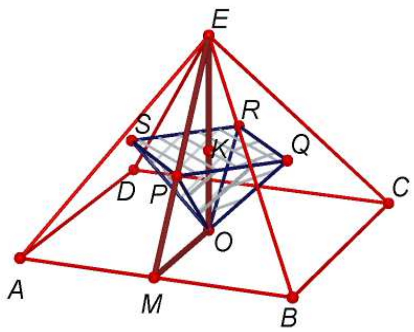
El volum de la piràmide és: $V_p = \frac{1}{3}S_b \cdot h = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3$.

La proporció entre els volums del cub inscrit i la piràmide és: $\frac{V_c}{V_p} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{32}a^3}{\frac{\sqrt{2}}{6}a^3} = \frac{3}{16}$.

805.- Una piràmide quadrangular regular té totes les arestes igual a a.
Determineu la proporció entre els volums de la piràmide i la piràmide semblant que té els vèrtexs de la base sobre les cares laterals de la primera.

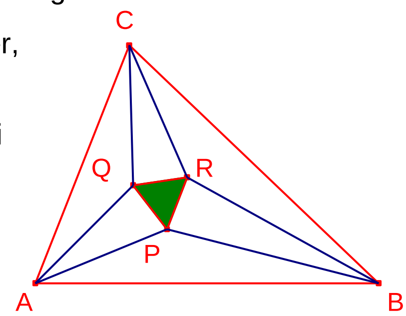


Solució:
Siga la piràmide ABCDE de base quadrada ABCD que té totes les arestes iguals a a.
$\overline{AC} = a\sqrt{2}$, $\overline{AE} = \overline{CE} = a$.
Aleshores, $\angle AEC = 90^{o}$, $\angle EAC = 45^{o}$.
Siga O el peu de l'altura.
$\overline{AO} = \overline{OE} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.
Siga PQRSO la piràmide que té els vèrtexs de la base sobre les cares laterals de la primera.
Siga $\overline{PQ} = c$, la seua aresta.
Siga K el centre del quadrat PQRS.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$. $\overline{MO} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}a$.
Siga K el centre del quadrat PQRS.
$\overline{PK} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$.
Les piràmides ABCDE, PQRSO són semblant. Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{\overline{OK}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\overline{OK} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$.
$\overline{EK} = \frac{\sqrt{2}}{2}(a - c)$.



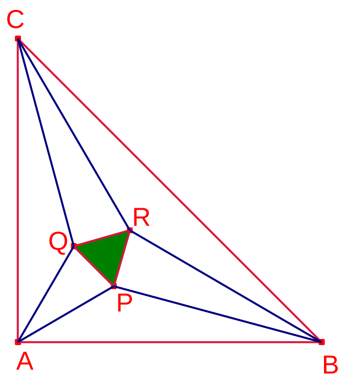
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{MOE}$, $\overset{\Delta}{PKE}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$\frac{\overline{EK}}{\overline{PK}} = \frac{\overline{EO}}{\overline{OM}}$. $\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(a-c)}{\frac{\sqrt{2}}{2}c} = \sqrt{2}$. Resolent l'equació: $c = \left(\sqrt{2} - 1\right)a$.
Si dos cossos són semblants la proporció dels volums és igual al cub de la raó dels dos cossos.
$$\frac{V_{ABCDE}}{V_{PQRSO}} = \left(\frac{a}{c}\right)^3 = \left(\frac{a}{\left(\sqrt{2}-1\right)a}\right)^3 = 5\sqrt{2} + 7 \approx 14'0711.$$

806.- El teorema de Morley diu que les rectes que divideixen cada angle d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ en tres parts iguals formen un triangle equilàter, anomenat *triangle de Morley* del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ (veure figura).
Determineu el costat del triangle de Morley del triangle rectangle i isòsceles de catets 2.
Olimpíada del Brasil



Solució:

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o$, $\overline{AB} = \overline{AC} = 2$.



Siga $\overset{\Delta}{PQR}$ el triangle de Morley del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga $\overline{PQ} = c$.
$\angle CAQ = \angle QAP = \angle PAB = 30^o$.
$\angle ACQ = \angle QCR = \angle RCB = 15^o$.
$\angle ABP = \angle PBR = \angle RBC = 15^o$.
Els triangles $\overset{\Delta}{AQC}$, $\overset{\Delta}{APB}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{AQ} = \overline{AP}$
Siga $x = \overline{AQ} = \overline{AP}$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{APQ}$:

$$\frac{c}{\sin 30^o} = \frac{x}{\sin 75^o} \qquad (1)$$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{AQC}$:

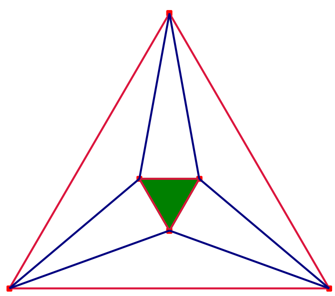
$$\frac{2}{\sin 135^o} = \frac{x}{\sin 15^o} \qquad (2)$$

Dividint les expressions (1) (2):

$$\frac{c \cdot \sin 135^o}{2 \sin 30^o} = \frac{\sin 15^o}{\sin 75^o}.$$

$$c = \frac{\sin 15^o}{\sin 135^o \cdot \sin 75^o} = \frac{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}} = 2\sqrt{2} - \sqrt{6}.$$

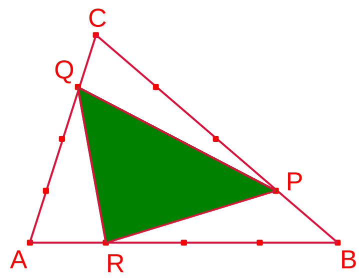
Problema:
Determineu el costat del triangle de Morley del triangle equilàter de costat 2.



Solució:

$$c = \frac{2 \sin 10^o}{\cos 20^o} \approx 0'3696.$$

807.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i P, Q, R sobre els costats $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ tal que $\dfrac{\overline{CP}}{\overline{BP}} = \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{CQ}} = \dfrac{\overline{BR}}{\overline{AR}} = 3$.

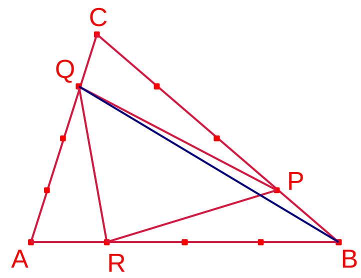


Calculeu la proporció entre les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{PQR}$, $\overset{\Delta}{ABC}$.

Solució:
Dos triangles que tenen la mateixa altura les àrees són proporcionals a les bases.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABQ}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ tenen la mateixa altura, aleshores:

$\dfrac{S_{ABQ}}{S_{ABC}} = \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AC}} = \dfrac{3}{4}$. Aleshores $S_{ABQ} = \dfrac{3}{4} S_{ABC}$.



Els triangles $\overset{\Delta}{ARQ}$, $\overset{\Delta}{ABQ}$ tenen la mateixa altura, aleshores:

$\dfrac{S_{ARQ}}{S_{ABQ}} = \dfrac{\overline{AR}}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{4}$. Aleshores $S_{ARQ} = \dfrac{1}{4} S_{ABQ} = \dfrac{3}{16} S_{ABC}$.

Anàlogament, $S_{BPR} = \dfrac{3}{16} S_{ABC}$, $S_{CPQ} = \dfrac{3}{16} S_{ABC}$.

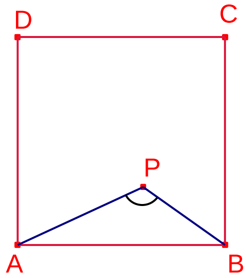
$S_{PQR} = S_{ABC} - 3S_{ARQ} = \dfrac{7}{16} S_{ABC}$.

Aleshores, $\dfrac{S_{PQR}}{S_{ABC}} = \dfrac{7}{16}$.

Generalització:

807.- Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i P, Q, R sobre els costats $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ tal que $\dfrac{\overline{CP}}{\overline{BP}} = \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{CQ}} = \dfrac{\overline{BR}}{\overline{AR}} = k$.

$\dfrac{S_{PQR}}{S_{ABC}} = \dfrac{k^2 - k + 1}{(k+1)^2}$.

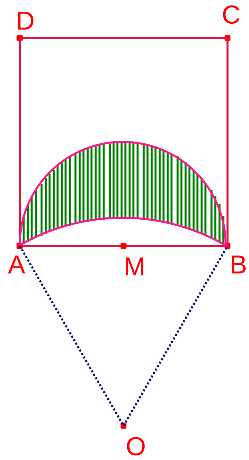


808.- Determineu la probabilitat de que un punt P interior del quadrat ABCD forme un angle $\angle APB$ entre 90º i 120º.

Solució:

Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB} = c$.

La probabilitat que cerquem és igual a la proporció entre l'àrea afitada pels arcs capaços dins del quadrat de 90º, i 120º sobre el segment $\overline{AB}$ i l'àrea del quadrat ABCD.



L'arc capaç de 90º sobre el segment $\overline{AB}$ és la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB}$.

L'arc capaç de 120º sobre el segment $\overline{AB}$ és l'arc de 60º de centre O i radi $\overline{OA} = c$.

L'àrea afitada pels dos arcs és:

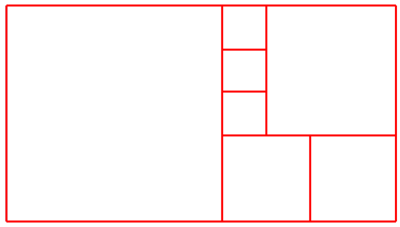
$$S = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\pi c^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}c^2\right) = \left(\frac{6\sqrt{3}-\pi}{24}\right)c^2.$$

L'àrea del quadrat és $S_{ABCD} = c^2$

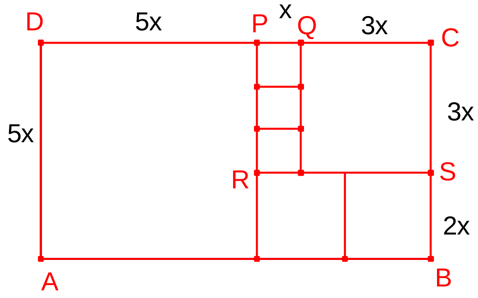
La probabilitat que cerquem és:

$$p = \frac{S}{S_{ABCD}} = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\pi c^2 - \frac{\sqrt{3}}{4}c^2\right) = \frac{\left(\frac{6\sqrt{3}-\pi}{24}\right)c^2}{c^2} = \frac{6\sqrt{3}-\pi}{24} \approx 0'3021.$$

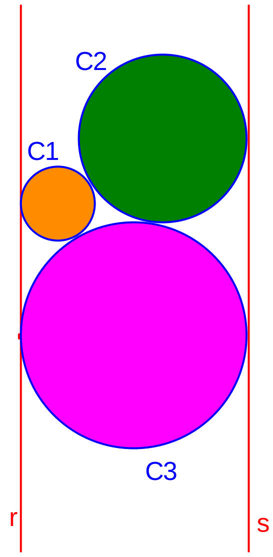
809.- El rectangle de la figura està dividit en 7 quadrats.
El perímetre del rectangle és 84.
Calculeu l'àrea del rectangle.



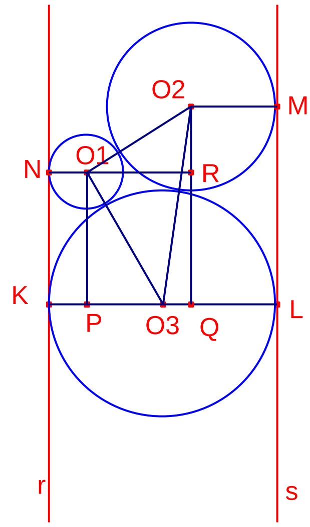
Solució:
Siga el rectangle ABCD.
Siga $\overline{PQ} = x$.
$\overline{PR} = \overline{CS} = \overline{CQ} = 3x$.
$\overline{RS} = 4x$.
$\overline{BS} = \frac{1}{2}\overline{RS} = 2x$.
$\overline{BC} = 5x$.
$\overline{DP} = \overline{CB} = 5x$.
$\overline{CD} = 9x$.
El perímetre del rectangle és 84:
$2(9x + 5x) = 84$. Resolent l'equació:
$x = 3$.
Aleshores, $\overline{BC} = 15$, $\overline{CD} = 27$.
L'àrea del rectangle ABCD és:
$S_{ABCD} = \overline{CD} \cdot \overline{BC} = 27 \cdot 15 = 405$.



810.- En la figura es mostren dues rectes paral·leles r i s.
A la recta r són tangents les circumferències C1 i C3, a la recta s són tangents les circumferències C2 i C3 i les tres circumferències són tangents.
Si els radis de les circumferències C1 i C2 són a i b, respectivament, calculeu el radi de la circumferència C3.



Solució:
Siguen O_1, O_2, O_3 els centres de les circumferències C1, C2, C3, respectivament.
Siguen K, L, M, N els punts de tangència de les circumferències i les rectes r, s.
Siga $\overline{O_3K} = r$ radi de la circumferència C3.



Siga P la Projecció de O_1 sobre $\overline{KL}$.
Siga Q la Projecció de O_2 sobre $\overline{KL}$.
Siga R la Projecció de O_1 sobre $\overline{O_2Q}$.
$\overline{O_1O_3} = a + r$. $\overline{O_1O_2} = a + b$, $\overline{O_2O_3} = b + r$.
$\overline{PO_3} = r - a$, $\overline{QO_3} = r - b$, $\overline{RO_1} = 2r - a - b$.
Siga $\overline{KN} = \overline{PO_1} = x$, $\overline{LM} = \overline{QO_2} = y$.
$\overline{RO_2} = \overline{LM} - \overline{KN} = y - x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PO_3O_1}$:

$x^2 = (a + r)^2 - (r - a)^2$.

$x^2 = 4ar$ (1)

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QO_3O_2}$:

$y^2 = (b + r)^2 - (r - b)^2$.

$y^2 = 4br$ (2)

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{RO_1O_2}$:

$(a + b)^2 = (2r - a - b)^2 + (y - x)^2$.

$4r^2 - 4ar - 4br + x^2 + y^2 - 2xy = 0$ (3)

Substituint les expressions (1) (2) en l'expressió (3):

$4r^2 - 4ar - 4br + 4ar + 4br - 8r\sqrt{ab} = 0$.

Simplificant:

$r = 2\sqrt{ab}$.