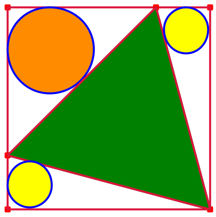
Problemes de Geometria per a l'ESO 82

811.- En un quadrat de costat c s'ha inscrit un triangle equilàter. En els 3 triangles exteriors al triangle equilàter s'han dibuixat les tres circumferències inscrites.
Determineu el radi de les tres circumferències.

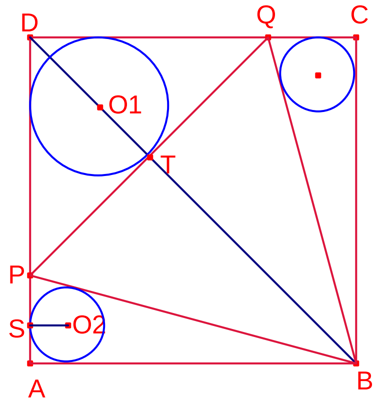


Solució:

Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$\overline{BD} = c\sqrt{2}$.



Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{BPQ}$.

Siga $\overline{BP} = x$.

La diagonal $\overline{BD}$ talla el costat $\overline{PQ}$ en el punt mig T.

$\overline{PT} = \frac{x}{2}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BTP}$:

$\overline{BT} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\overset{\Delta}{PTD}$ és rectangle i isòsceles, aleshores, $\overline{DT} = \overline{PT} = \frac{x}{2}$.

$$\overline{BD} = \overline{BT} + \overline{DT} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)x.$$

$c\sqrt{2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right)x$. Resolent l'equació: $x = \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)c$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PDQ}$:

$\overline{PD} = \frac{\sqrt{2}}{2}x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)c = \left(\sqrt{3} - 1\right)c$.

$\overline{AP} = c - \overline{PD} = \left(2 - \sqrt{3}\right)c$.

Siga $r = \overline{O_1T}$ radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{PDQ}$.

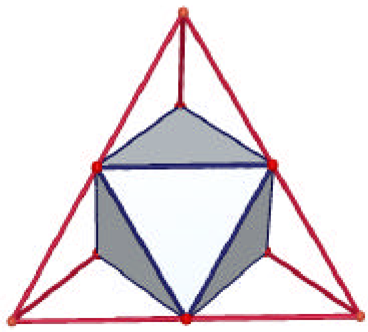
Per ser rectangle $r = \frac{\overline{PD} + \overline{QD} - \overline{PQ}}{2} = \frac{2\sqrt{3} - 2 - \sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}c$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABP}$, $\overset{\Delta}{CBQ}$ són iguals, el radi de les circumferències inscrites és igual.

Siga $s = \overline{O_2S}$ radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABP}$.

Per ser rectangle $s = \frac{\overline{AP} + \overline{AB} - \overline{PB}}{2} = \frac{2 - \sqrt{3} + 1 - \sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}c = \frac{3 - \sqrt{3} - \sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}c$.

812.- Proveu que els punts migs de les arestes d'un tetraedre regular són vèrtexs d'un octaedre regular.
Calculeu la proporció entre els volums de l'octaedre i el del tetraedre.

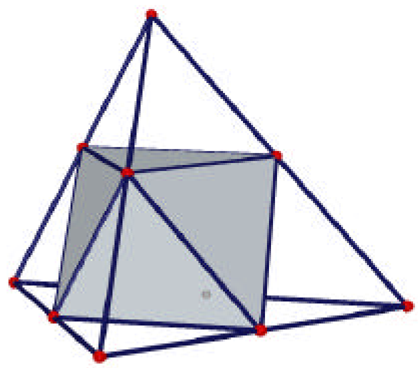


Solució:
Els punts migs de les arestes que formen les cares formen 4 triangles equilàters de costat la meitat de l'aresta.
Els punts migs de les arestes que s'intersecten en un vèrtex formen 4 triangles equilàters de costat la meitat de l'aresta.
El poliedre resultant està format per 8 cares triangles equilàters iguals 6 vèrtexs i cada vèrtex d'índex 4. El poliedre és un octaedre regular.

El truncament del tetraedre per la meitat de les arestes separa del tetraedre 4 tetraedres regular d'aresta la meitat de l'aresta del tetraedre inicial.
Cadascun dels 4 tetraedres té per volum la vuitena part del tetraedre inicial ja que estan en proporció 1:2.

Aleshores el volum octaedre és la meitat del volum tetraedre.

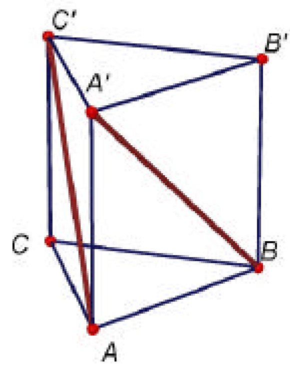
Problema
Proveu que els punts migs de les arestes d'un tetraedre són vèrtexs d'un octaedre tal que les arestes oposades són iguals i paral·leles i el volum del qual és igual a la meitat del volum del tetraedre.



813.- Un prisma triangular regular ABCA'B'C', les cares laterals són quadrats.

Determineu l'angle que formen els segments $\overline{AC'}$, $\overline{BA'}$.

Gúsiev 666.



Solució 1:

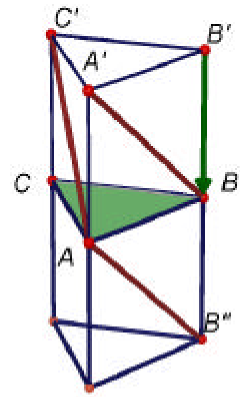
Totes les arestes del prisma ABCA'B'C' són iguals.

Siga $a=\overline{AB}=\overline{AA'}$ arestes del prisma.

Traslladem el prisma ABCA'B'C' en la direcció $\vec{BB'}$

Els vectors $\vec{A'B}=\vec{AB''}$.

L'angle que formen els segments $\overline{AC'}$, $\overline{BA'}$ és igual a l'angle $\alpha=\angle C'AB''$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ACC'}$:

$\overline{AC'}=\overline{AB''}=a\sqrt{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{C'B'B''}$:

$\overline{C'B''}=a\sqrt{5}$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AC'B''}$

$$\left(a\sqrt{5}\right)^2=\left(a\sqrt{2}\right)^2+\left(a\sqrt{2}\right)^2-2a\sqrt{2}a\sqrt{2}\cos\alpha.$$

$$\cos\alpha=-\frac{1}{4}.$$

$\alpha=\arccos\frac{-1}{4}\approx 104^o28'39''$, o bé el suplementari $\alpha=\arccos\frac{1}{4}\approx 75^o31'21''$.

Solució 2:

Totes les arestes del prisma ABCA'B'C' són iguals.

Siga $a=\overline{AB}=\overline{AA'}$ arestes del prisma.

Considerem la base $\left\{\vec{AB},\vec{AC},\vec{AA'}\right\}$.

Siga α l'angle que formen els segments $\overline{AC'}$, $\overline{BA'}$. Aplicant el producte escalar:

$$\vec{AC'}\cdot\vec{BA'}=\left\|\vec{AC'}\right\|\cdot\left\|\vec{BA'}\right\|\cdot\cos\alpha.$$

$$\vec{AC'}\cdot\vec{BA'}=a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\cos\alpha.$$

$$\vec{AC'}\cdot\vec{BA'}=2a^2\cos\alpha \qquad (1)$$

$$\vec{AC'}=\vec{AC}+\vec{AA'},\ \vec{BA'}=-\vec{AB}+\vec{AA'}.$$

$$\vec{AC'}\cdot\vec{BA'}=\left(\vec{AC}+\vec{AA'}\right)\left(-\vec{AB}+\vec{AA'}\right)=-\vec{AC}\cdot\vec{AB}+\vec{AC}\cdot\vec{AA'}-\vec{AA'}\cdot\vec{AB}+\vec{AA'}\cdot\vec{AA'}.$$

$$\vec{AC'}\cdot\vec{BA'}=-\vec{AC}\cdot\vec{AB}+\vec{AA'}\cdot\vec{AA'}.$$

$$\vec{AC'}\cdot\vec{BA'}=-\left\|\vec{AC}\right\|\cdot\left\|\vec{AB}\right\|\cos 60^o+\left\|\vec{AA'}\right\|\cdot\left\|\vec{AA'}\right\|\cos 0^o.$$

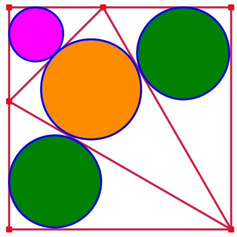
$$\vec{AC'}\cdot\vec{BA'}=-\frac{1}{2}a^2+a^2 \qquad (2)$$

Igualant les expressions (1) (2):

$$2a^2\cdot\cos\alpha=-\frac{1}{2}a^2+a^2.$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{4},\ \alpha=\arccos\frac{1}{4}\approx 75^o31'21''.$$

814.- En un quadrat de costat c s'ha dividit en 4 triangles el central és isòsceles 30º, 75º, 75º.
Calculeu el radi de les circumferències inscrites als quatre triangles.

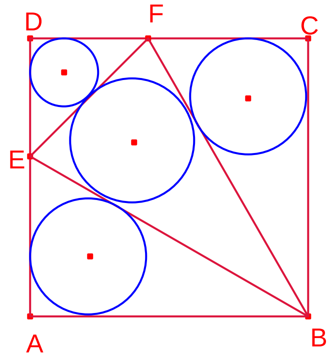


Solució:
Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = c$.
$\angle ABE = \angle EBF = \angle FBC = 30^{o}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BAE}$.

$$\overline{AE} = \frac{\sqrt{3}}{3}c\ ,\ \overline{BE} = \frac{2\sqrt{3}}{3}c\ .$$

$$\overline{DE} = \overline{DF} = c - \overline{AE} = \frac{3-\sqrt{3}}{3}c\ .$$



Aplicant el teorema d Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{EDF}$

$$\overline{EF} = \overline{DE}\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}c\ .$$

Siga r_1 el radi de les circumferències inscrites als triangles rectangles $\overset{\Delta}{BAE}$, $\overset{\Delta}{BCF}$.
Per ser triangles rectangles:

$$r_1 = \frac{\overline{AE}+\overline{AB}-\overline{BE}}{2} = \frac{c+\frac{\sqrt{3}}{3}c-\frac{2\sqrt{3}}{3}c}{2} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}c$$

Siga r_2 el radi de la circumferència inscrita al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EDF}$.
Per ser triangles rectangles:

$$r_2 = \frac{\overline{DE}+\overline{DF}-\overline{EF}}{2} = \frac{2\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)c - \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{3}c}{2} = \frac{6-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{6}c\ .$$

Per calcular el radi r_3 de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{BEF}$ utilitzarem la fórmula de l'àrea: $S = p\cdot r_3 = \sqrt{p\left(p-\overline{EF}\right)\left(p-\overline{BF}\right)\left(p-\overline{BE}\right)}$, on

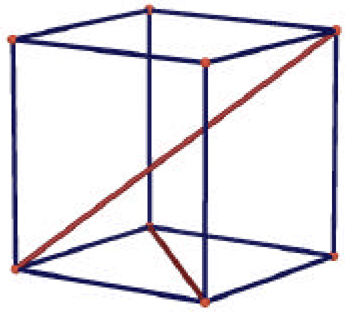
$$p = \frac{\overline{EF}+\overline{BE}+\overline{BF}}{2} = \frac{3\sqrt{2}+4\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}\ .$$

$$\frac{3\sqrt{2}+4\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}c\cdot r_3 = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{6}c\frac{1}{6}c\sqrt{\left(3\sqrt{2}+4\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)\left(-3\sqrt{2}+4\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)}\ .$$

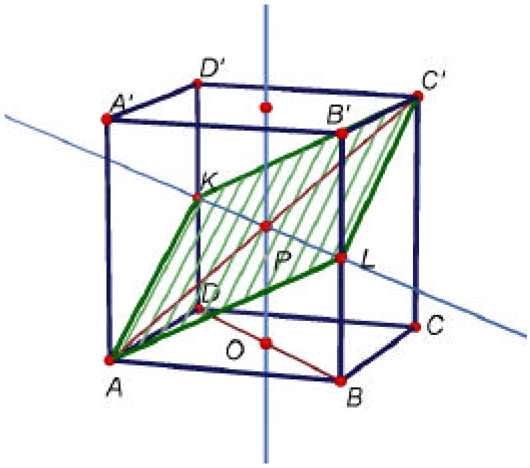
Resolent l'equació:

$$r_3 = \frac{-12-9\sqrt{2}+8\sqrt{3}+5\sqrt{6}}{6}c\ .$$

815.- Siga el prisma quadrangular regular tal que l'aresta del la base mesura 10cm i l'aresta lateral 20cm.
Determineu l'àrea de la secció que determina un plànol que conté una diagonal i és paral·lel a la diagonal de la base que no s'intersecta amb la diagonal del cub.
Kutepov 384



Solució:
Siga ABCDA'B'C'D' el prisma d'aresta de la base $\overline{AB}=10$ i aresta lateral $\overline{AA'}=20$.
Siga O el centre de la base ABCD (quadrat).
La recta perpendicular al plànol base ABCD que passa pel punt O talla la diagonal $\overline{AC'}$ en el punt P (punt mig de la diagonal.
Pel punt P tracem una recta paral·lela al la diagonal de la base $\overline{BD}$ que talla les arestes $\overline{DD'}$, $\overline{BB'}$ en els punta K, L, respectivament.
La secció és el rombe AKC'L.

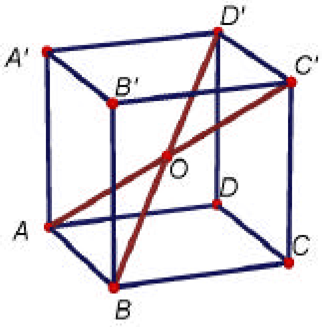


La diagonal del prisma és:
$\overline{AC'}=\sqrt{10^2+10^2+20^2}=10\sqrt{6}$.
$\overline{MN}=\overline{BD}=10\sqrt{2}$.
L'àrea del rombe AKC'L és:
$S_{AKC'L}=\dfrac{\overline{AC'}\cdot\overline{KL}}{2}$.
$S_{AKC'L}=\dfrac{10\sqrt{6}\cdot 10\sqrt{2}}{2}=100\sqrt{3}\approx 173'21cm^2$.

816.- Calculeu l'angle agut que formen dues diagonals d'un cub.
Kutepov 480

Solució:

Siga ABCDA'B'C'D' un cub d'aresta $\overline{AB} = a$.
Dues diagonals d'un cub s'intersecten en el centre del cub O.
La diagonal d'un cub mesura:



$\overline{AC'} = a\sqrt{3}$.

$\overline{AO} = \overline{BO} = \frac{1}{2}\overline{AC'} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Siga $\alpha = \angle AOB$ angle agut que formen dues diagonals.

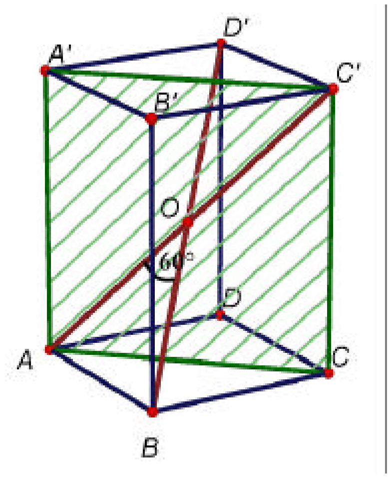
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AOB}$:

$$a^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - 2\frac{\sqrt{3}}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \cos\alpha.$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{3}.$$

$$\alpha = \arccos\frac{1}{3} \approx 70º31'44''.$$

817.- Proveu que si diagonals d'un prisma regular quadrangular ABCDA'B'C'D' formen 60º la secció diagonal del prisma és un quadrat.
Kutepov 479



Solució:

Les diagonals $\overline{AC'}$, $\overline{BD'}$ s'intersecten en el punt O.

Siga $\angle AOB = 60º$.

La secció diagonal sobre la diagonals $\overline{AC'}$ és el rectangle AA'C'C.

Siga $\overline{AB} = a$, $\overline{AA'} = b$.

El triangle $\overset{\Delta}{AOB}$ és equilàter, aleshores:

$\overline{AO} = a$.

$\overline{AC'} = 2 \cdot \overline{AO} = 2a$.

La diagonal del prisma mesura:

$\overline{AC'} = \sqrt{a^2 + a^2 + b^2}$.

$2a = \sqrt{a^2 + a^2 + b^2}$. Elevant al quadrat:

$4a^2 = 2a^2 + b^2$.

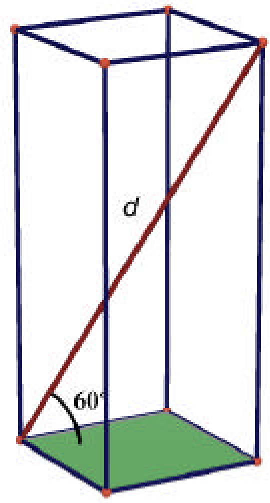
$b = \overline{AA'} = a\sqrt{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AC} = a\sqrt{2}$.

Aleshores $\overline{AC} = \overline{AA'}$ $\angle A'AC = 90º$, per tant la secció és un quadrat.

818.- La diagonal d d'un prisma quadrangular regular forma 60º amb la base.
Calculeu el volum del prisma.

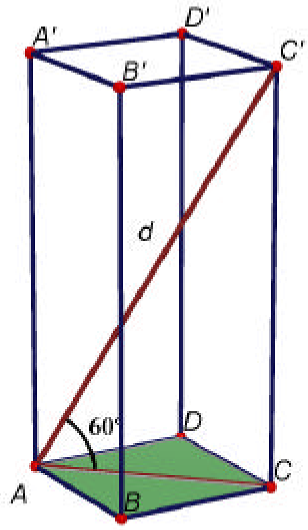


Solució:

Siga el prisma regular quadrangular ABCDA'B'C'D' $\overline{AC'} = d$, $\angle C'AC = 60º$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACC'}$:

$\overline{AC} = \frac{1}{2}d$, $\overline{CC'} = \frac{\sqrt{3}}{2}d$.



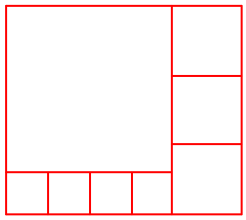
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AC} = \frac{\sqrt{2}}{4}d$.

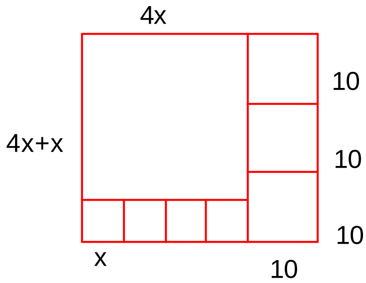
El volum del prisma és:

$V = \overline{AB}^2 \cdot \overline{CC'} = \frac{\sqrt{3}}{16}d^3$.

819.- El rectangle de la figura està dividit en 8 quadrats.
L'àrea dels quadrats de grandària mitjana és 100cm^2.
Calculeu l'àrea del rectangle.
KöMaL, K375, març 2013



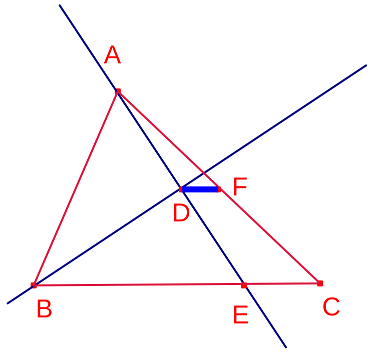
Solució:
Si l'àrea dels quadrats de grandària mitjana és 100cm^2 el seu costat és 10cm.
L'amplària del rectangle és 30cm.



Siga x el costat del quadrat menut.
La mesura del quadrat gran és 4x.
La llargària del rectangle és $4x+10$.
L'amplària del rectangle és $5x$.
$5x=30$.
$x=6\text{cm}$.
La llargària del rectangle és $4\cdot 6+10=34\text{cm}$.
La superfície del rectangle és:
$S=34\cdot 30=1020\text{cm}^2$.

820.- En un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB}=28$, $\overline{BC}=38$.
Siga D la projecció del punt A sobre la bisectriu interior de l'angle B.
Siga F el punt mig del costat $\overline{BC}$.
Calculeu la mesura del segment $\overline{DF}$.
KöMaL, K374, març 2013.

Solució.
La perpendicular pel punt A a la bisectriu interior de l'angle B talla el costat $\overline{BC}$ en el punt E.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BDA}$, $\overset{\Delta}{BDE}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{BE}=\overline{AB}=28$.
$\overline{CE}=\overline{BC}-\overline{BE}=38-28=10$.
D és el punt mig del segment $\overline{AE}$.
$\overline{DF}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{AEC}$.
Aleshores, $\overline{DF}=\frac{1}{2}\overline{CE}=5$.