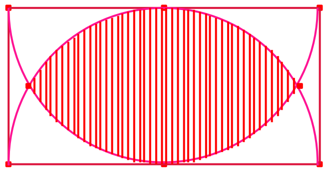
831.- Si la base del rectangle mesura 4 i l'altura 2, calculeu l'àrea de la regió ombrejada afitada per dues circumferències.
Concurso Primavera 2012 final. Nivell 4, p21



Solució:

Siga el rectangle ABCD tal que $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 2$

Els centres dels semicercles són els punts migs del costats $\overline{AB}$, $\overline{CD}$.

Aleshores els radis mesuren 2.

Siguen P, Q la intersecció de les dues semicircumferències.

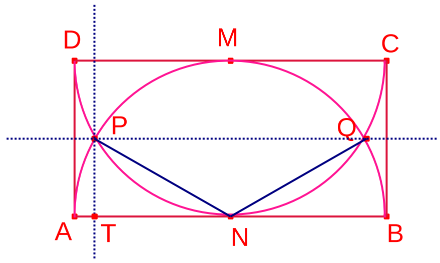
P i Q pertanyen a la paral·lela mitjana del rectangle.

Siga T la projecció de P sobre $\overline{AB}$.

$\overline{PT} = 1$, $\overline{NP} = 2$.

Aleshores, $\angle TNP = 30^{o}$.

$\angle PNQ = 180^{o} - 2\angle TNP = 120^{o}$.



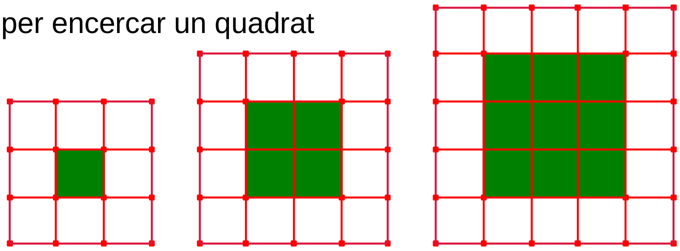
L'àrea ombrejada és igual a dues vegades l'àrea del segment circular de 120º i radi 2.

L'àrea del segment és igual a l'àrea de la tercera part de cercle de radi 2 menys l'àrea del triangle equilàter de costat 2:

Aleshores l'àrea ombrejada és:

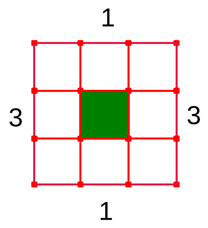
$$S = 2\left(\frac{1}{3}\pi 2^2 - \frac{2^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3} \approx 4'9135.$$

832.- Quants taulells blancs necessitem per encercar un quadrat verd de n taulells de costat.

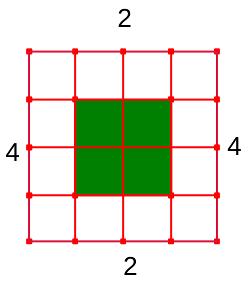


Solució 1:

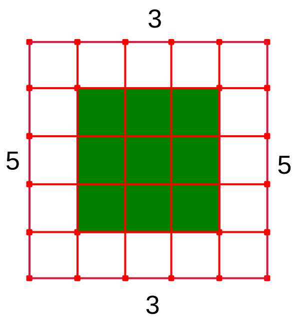
$n = 1$ $\quad$ $n = 2$ $\quad$ $n = 3$



total=2·3+2·1



total=2·4+2·2

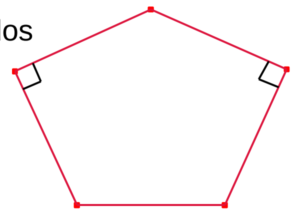


total=2·5+2·3

Si el quadrat verd té costat n:
$\text{total} = 2 \cdot (n+2) + 2 \cdot n = 4(n+1)$.

Solució 2:
Si tenim un quadrat verd de n taulells de costat al encercar-lo es forma un quadrat de costat $n+1$.
El seu perímetre és el nombre de taulells blancs que ens caldran:
$\text{total} = 4(n+1)$.

833.- El pentàgon de la figura té tots els costats iguals a c i dos angles rectes.
Calculeu la seua àrea.



Solució:

Siga el pentàgon ABCDE equilàter $\overline{AB} = c$, amb $C = E = 90^{\circ}$.

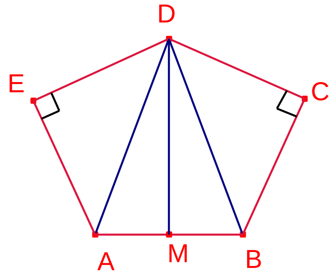
Els triangles $\overset{\Delta}{AED}$, $\overset{\Delta}{BCD}$ són rectangles i isòsceles.

Aplicant el teorema de Pitàgores.

$\overline{AD} = c\sqrt{2}$.

El triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ és isòsceles.

Siga M l punt mig del costat $\overline{AB}$.



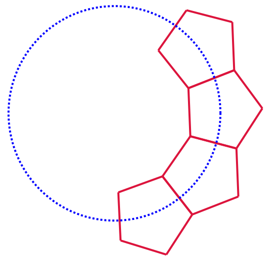
Aplicant el teorema d Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMD}$

$$\overline{MD} = \sqrt{\left(c\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2}c\,.$$

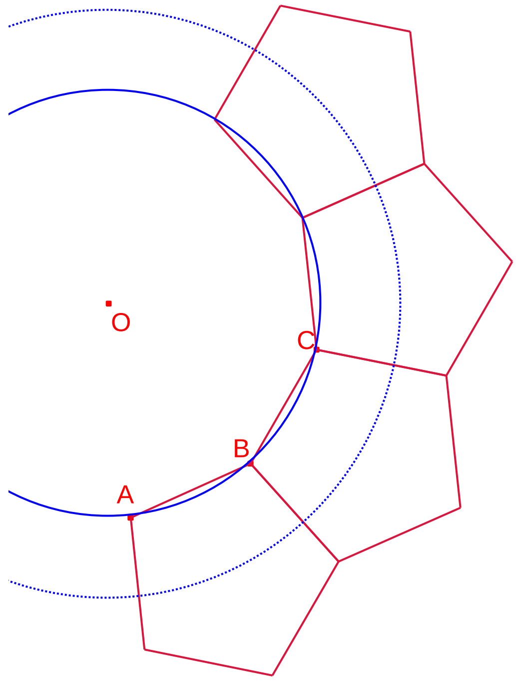
L'àrea del pentàgon és igual a la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{AED}$, $\overset{\Delta}{BCD}$, $\overset{\Delta}{ABD}$:

$$S_{ABCDE} = 2 \cdot S_{AED} + S_{ABD} = 2\frac{\overline{AE}^2}{2} + \frac{\overline{AB} \cdot \overline{MD}}{2} = c^2 + \frac{c \cdot \frac{\sqrt{7}}{2}c}{2} = \frac{4+\sqrt{7}}{4}c^2\,.$$

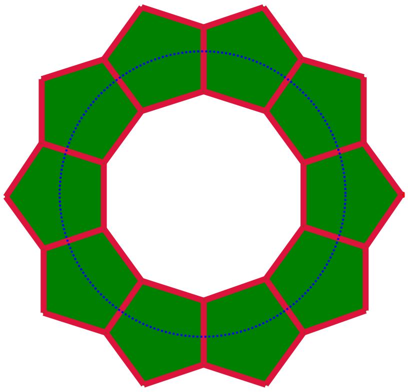
834.- Les peces de forma pentàgon regular igual s'uneixen pel costat fins formar un cercle (veure figura).
Quantes peces s'han d'utilitzar.
Proves Cangur 2013. nivell 4. problema 11.



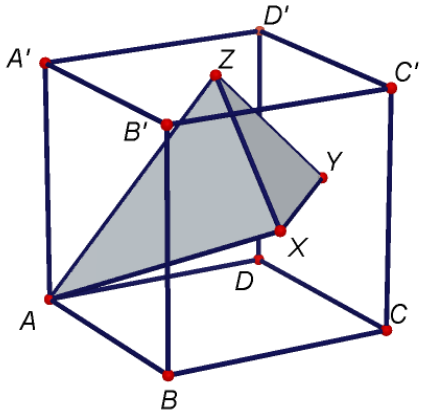
Solució:
Siga O el centre de la circumferència.
O també és el centre de la circumferència que passa pels vèrtex A, B, C dels pentàgons.
Tots els costats $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ... formen un polígon regular inscrit en la circumferència de centre O.
Calculem l'angle interior $\angle ABC$ d'aquest polígon.
L'angle interior d'un pentàgon regular
mesura $\frac{180^o(5-2)}{5} = 108^o$.
$\angle ABC = 360^o - 2 \cdot 108^o = 144^o$.



Siga n el nombre de costats del polígon regular que conté A, B, C.
L'angle interior és:
$\frac{180^o(n-2)}{n} = 144^o$. Resolent l'equació:
$n = 10$.

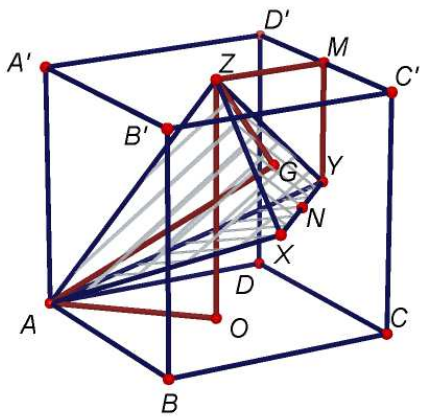


835.- Siga un cub ABCDA'B'C'D' d'aresta 1.
Siguen X, Y , Z els centres de les cares que no contenen el vèrtex A.
Calculeu el volum del tetraedre AXYZ.



Solució:
Notem que $\overline{AX} = \overline{AY} = \overline{AZ}$.
$\overline{XY} = \overline{XZ} = \overline{YZ}$.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{C'D'}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ZMY}$:

$$\overline{ZY} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



Siga O el centre de la cara ABCD.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{AOB}$:

$$\overline{AO} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOZ}$:

$$\overline{AZ} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{XY}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{XNZ}$:

$$\overline{ZN} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{XY} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Siga G el baricentre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{XYZ}$.
Aplicant la propietat del baricentre:

$$\overline{ZG} = \frac{2}{3}\overline{ZN} = \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

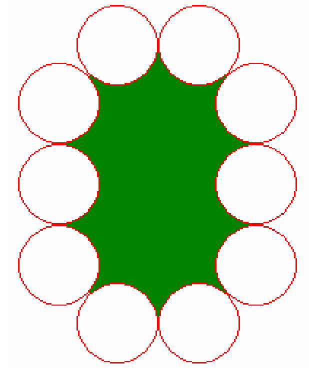
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AGZ}$:

$\overline{AG} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, altura del tetraedre AXYZ.

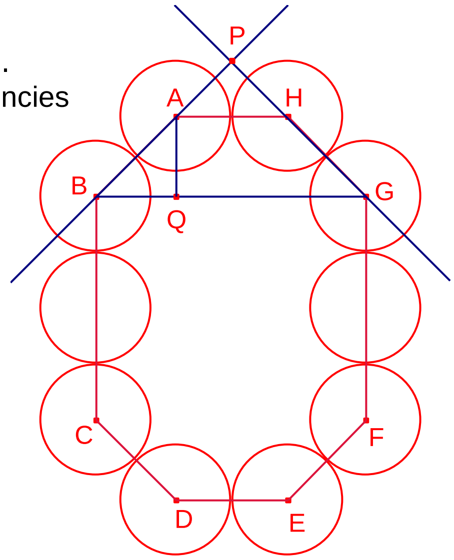
El volum del tetraedre AXYZ és:

$$V = \frac{1}{3}S_{XYZ} \cdot \overline{AG} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{12}.$$

836.- La figura està formada amb 10 circumferències de radi 1cm tangents i que les rectes que uneixen els centres formen triangles 45º, 45º, 90º.
Calculeu el perímetre i l'àrea d'aquesta mena de "fulla de grèvol".



Solució:
En unir els centres de les 10 circumferències es forma el polígon ABCDEFGH que té tots els angles iguals a 135º ja que les rectes que uneixen els centres formen triangles 45º, 45º, 90º.
El perímetre està format per 8 arcs de 135º de radi 1 i 2 semicircumferències de radi 1.
En total forma un arc de $8 \cdot 135º + 2 \cdot 180º = 1440º = 4 \cdot 360º$.
És a dir, el perímetre és igual a la longitud de 4 circumferències de radi 1:
$p = 4 \cdot 2\pi \cdot 1 = 8\pi \approx 25'13\text{cm}$.



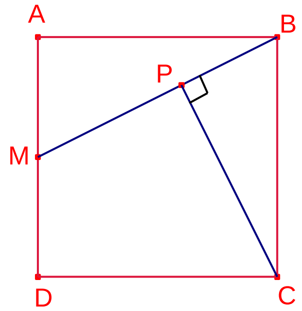
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del polígon ABCDEFGH menys l'àrea de 8 sectors de 135º de radi 1 i 2 semicercles de radi 1. És a dir, l'àrea del polígon ABCDEFGH menys 4 cercles de radi 1.
$\overline{AB} = \overline{AH} = 2$. $\overline{BC} = 4$
Siga Q la projecció de A sobre el segment $\overline{BG}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{AQB}$:
$\overline{AQ} = \overline{BQ} = \sqrt{2}$.
$\overline{BG} = 2\overline{AQ} + \overline{AH} = 2\sqrt{2} + 2$.
L'àrea del polígon ABCDEFGH és:

$$S_{ABCDEFGH} = 2S_{ABQH} + S_{BCFG} = 2\left(\frac{\overline{BG} + \overline{AH}}{2}\overline{AQ}\right) + \overline{BG} \cdot \overline{BC}.$$

$$S_{ABCDEFGH} = 2\left(\frac{2\sqrt{2} + 2 + 2}{2}\sqrt{2}\right) + \left(2\sqrt{2} + 2\right) \cdot 4 = 12 + 12\sqrt{2}.$$

L'àrea de la zona ombrejada és:
$$S_o = S_{ABCDEFGH} - 4\pi 1^2 = 12 + 12\sqrt{2} - 4\pi \approx 16'04\text{cm}^2.$$

837.- Siga M el punt mig del costat $\overline{AD}$ del quadrat ABCD. Siga P del segment $\overline{BM}$ tal que $\overline{CP}$ és perpendicular a $\overline{BM}$. Proveu que $\overline{DP} = \overline{CD}$.



Solució 1:

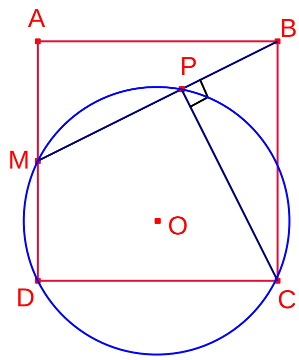
$\angle MDC = \angle CPM = 90^o$.

Aleshores el quadrilàter CDMP és inscriptible.

Notem que $\angle PCD = \angle DMC$.

Els arcs $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{DP}$.

Aleshores, $\overline{DP} = \overline{CD}$.



Solució 2:

Considerem la recta BM.

La recta r paral·lela a la recta BM que passa per D, talla el costat $\overline{BC}$ en el punt mig D.

Siga la recta s paral·lela a la recta BM que passa per C.

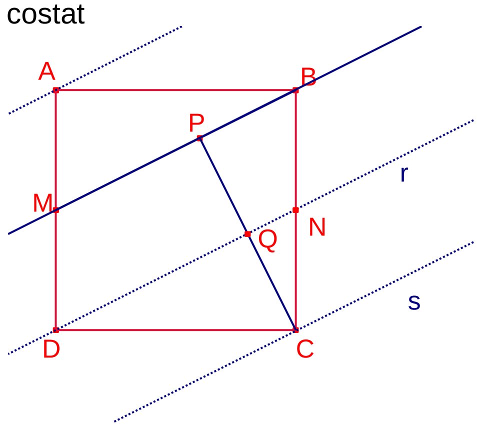
La recta r és paral·lela mitjana de les rectes BM, s.

Aleshores $\overline{PQ} = \overline{CQ}$.

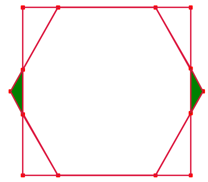
$\angle DQP = 90^o$.

Aleshores els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DQP}$, $\overset{\Delta}{DQC}$ són iguals.

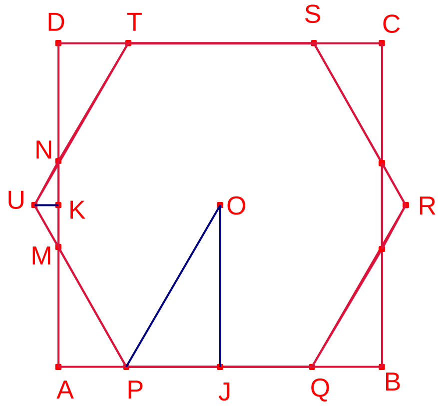
Aleshores, $\overline{DP} = \overline{CD}$.



838.- A partir d'un quadrat de costat 1cm construïm un hexàgon regular com el de la figura.
Determineu l'àrea de la part de l'hexàgon exterior al quadrat.



Solució:
Siga el quadrat ABCD de costat 1.
Siga O el centre del quadrat (centre de l'hexàgon regular).
Siga J i K els punts migs del costats $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, respectivament.
Siga l'hexàgon regular PQRSTU.
El costat $\overline{AD}$ talla l'hexàgon en els punts M, N.



L'àrea que cerquem és el doble de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MNU}$.

$\overline{OJ} = \frac{1}{2}$. Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PJO}$:

$$\overline{OP} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\overline{AP} = \frac{\overline{AB} - \overline{PQ}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{2} = \frac{3-\sqrt{3}}{6}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APM}$:

$$\overline{AM} = \sqrt{3}\,\overline{AP} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

$$\overline{MK} = \frac{1}{2}\overline{AD} - \overline{AM} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MKU}$:

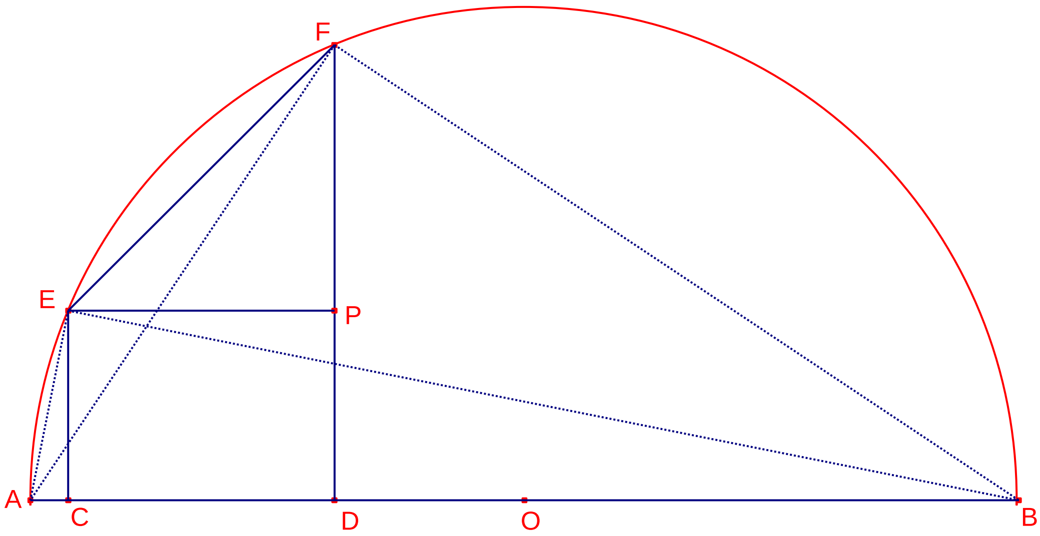
$$\overline{UK} = \frac{\sqrt{3}}{3}\overline{MK} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,\frac{2-\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}-3}{6}.$$

L'àrea ombrejada és igual a:

$$S_{omb} = 2S_{MNU} = 2\frac{\overline{MK}\cdot\overline{UK}}{2} = \left(2-\sqrt{3}\right)\frac{2\sqrt{3}-3}{6} = \frac{7\sqrt{3}-12}{6}.$$

839.- Siga $\overline{AB}$ un segment de longitud 26 i C, D dos punts del segment tals que $\overline{AC} = 1$, $\overline{AD} = 8$. Siguen E i F dos punts de la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB}$ tal que $\overline{EC}$ i $\overline{FD}$ són perpendiculars a $\overline{AB}$. Calculeu la mesura del segment $\overline{EF}$.

Solució:



$\angle AEB = \angle AFB = 90^o$ perquè són angles inscrits abracen un diàmetre.

Aplicant el teorema de l'altura als triangles rectangles $\overset{\Delta}{AEB}$, $\overset{\Delta}{AFB}$:

$\overline{CE}^2 = \overline{AC} \cdot \overline{BC} = 1(26-1) = 25$.

$\overline{DF}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{BD} = 8(26-8) = 144$.

Aleshores:

$\overline{CE} = 5$, $\overline{DF} = 12$.

Siga P la projecció de E sobre $\overline{DF}$.

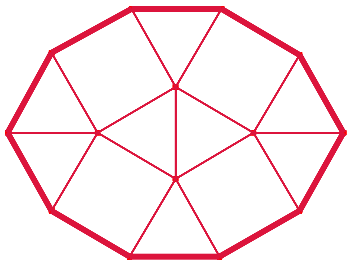
$\overline{EP} = \overline{AD} - \overline{AC} = 8 - 1 = 7$.

$\overline{PF} = \overline{DF} - \overline{CE} = 12 - 5 = 7$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EPF}$:

$\overline{EF} = \sqrt{\overline{EP}^2 + \overline{PF}^2} = \sqrt{7^2 + 7^2} = 7\sqrt{2} \approx 9'8995$.

840.- El decàgon de la figura té costat 1cm.
Calculeu la seua àrea.



Solució:
La figura consta de 8 triangles equilàters de costat 1cm i 4 quadrats de costa 1cm.
L'àrea és:

$$S = 8\left(\frac{1^2\sqrt{3}}{4}\right) + 4\cdot 1^2 = 4 + 2\sqrt{3} \approx 7'46 cm^2 .$$