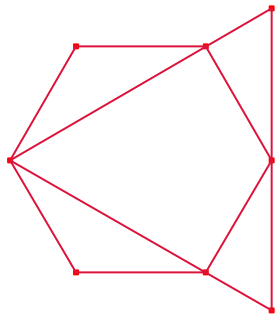
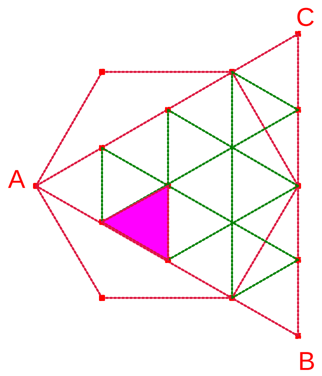
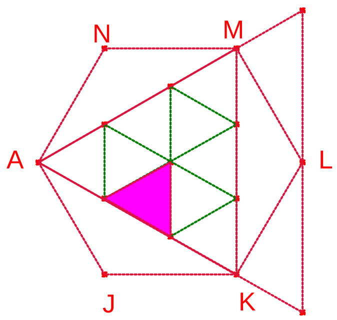
Problemes de Geometria per a l'ESO 85

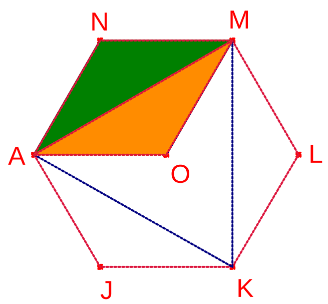
841.- Calculeu la proporció entre les àrees del triangle equilàter i l'hexàgon regular de la figura.



Solució:





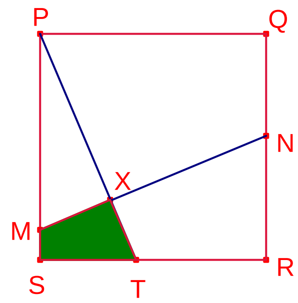


$S_{AJKLMN} = 2 \cdot S_{AKM}$.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AJKLMN}} = \frac{16}{2 \cdot 9} = \frac{8}{9}.$$

842.- Siga PQRS un quadrat de costat 12.

Si els segments $\overline{PT}$ i $\overline{MN}$ són perpendiculars i és tallen en el punt X de manera que $\overline{ST}=5$ i $\overline{MX}=4$. Calculeu l'àrea del quadrilàter STXM.



Solució:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PST}$:

$\overline{PT}=\sqrt{12^2+5^2}=13$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PST}$, $\overset{\Delta}{PXM}$.

Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{PX}}{4}=\frac{12}{5}$, aleshores, $\overline{PX}=\frac{48}{5}$.

$\frac{\overline{PM}}{4}=\frac{13}{5}$, aleshores, $\overline{PM}=\frac{52}{5}$.

Aleshores:

$\overline{XT}=\overline{PT}-\overline{PX}=13-\frac{48}{5}=\frac{17}{5}$.

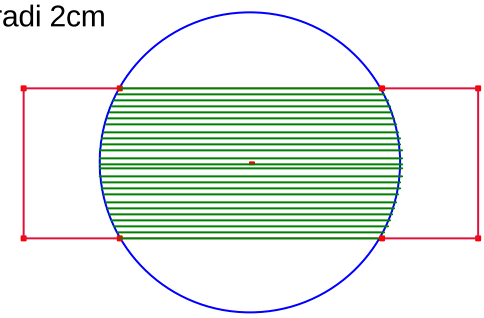
$\overline{MS}=\overline{PS}-\overline{PM}=12-\frac{52}{5}=\frac{8}{5}$.

L'àrea del quadrilàter STXM és igual a la suma de les àrees dels triangles rectangles $\overset{\Delta}{MST}$, $\overset{\Delta}{MXT}$.

$$S_{STXM}=S_{MST}+S_{MXT}=\frac{\overline{ST}\cdot\overline{MS}}{2}+\frac{\overline{MX}\cdot\overline{XT}}{2}.$$

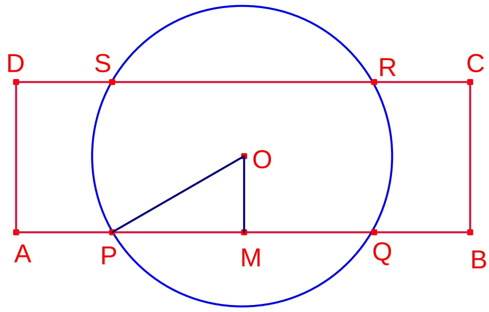
$$S_{STXM}=\frac{5\frac{8}{5}}{2}+\frac{4\frac{17}{5}}{2}=\frac{54}{5}.$$

843.- Un rectangle de costats 2cm i 6cm i un cercle de radi 2cm tenen el mateix centre.
Calculeu l'àrea de la intersecció de el rectangle i el cercle.



Solució:

Siga ABCD el rectangle $\overline{AB}=6$, $\overline{BC}=2$.
Siga O el centre del rectangle.
El cercle de centre O i radi 2 talla els costats del rectangle en els punts P, Q, R, S, ja que



$\overline{OP}=2<\dfrac{\overline{AB}}{2}=3$.

Siga M el punt mig del segment $\overline{PQ}$.

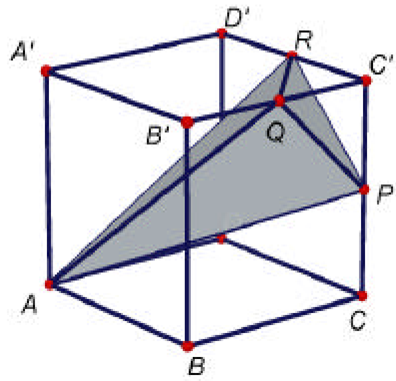
$\overline{OM}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=1$.

$\overset{\Delta}{PMO}$ és un triangle rectangle tal que la hipotenusa $\overline{OP}=2$, i el catet $\overline{OM}=\dfrac{1}{2}\overline{OP}=1$.

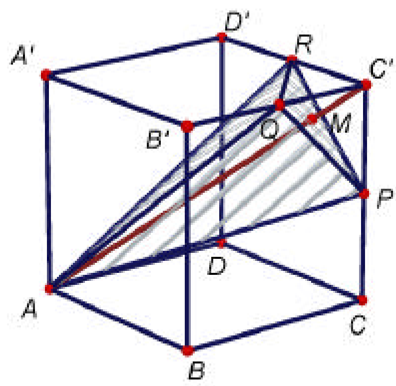
Aleshores $\angle POM=60^{o}$.
$\angle POQ=120^{o}$, $\angle POS=60^{o}$.
L'àrea ombrejada és igual a la suma de les àrees d'un sector circular de radi 2 i 120º i dos triangles equilàters de costat 2.

$$S_{omb}=\frac{1}{3}\pi\cdot 2^2+2\left(\frac{2^2\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{4\pi}{3}+2\sqrt{3}\approx 7'65cm^2.$$

844.- Siga el cub ABCDA’B’C’D’.
Siguen P, Q, R els punts migs de les arestes $\overline{CC'}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{C'D'}$, respectivament.
Determineu la proporció entre els volums del cub ABCDA’B’C’D’ i el tetraedre APQR.

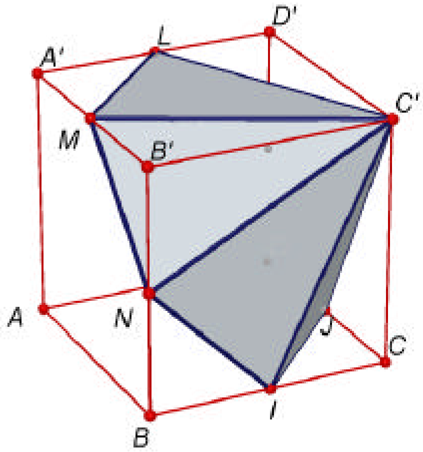


Solució:
Siga el cub ABCDA’B’C’D’ d’aresta $\overline{AB} = a$.
Aplicant el teorema de Pitàgores la diagonal del cub és:
$\overline{AC'} = a\sqrt{3}$.
El triangle $\overset{\Delta}{PQR}$ és equilàter.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{PC'Q}$:
$\overline{PQ} = \sqrt{2}\cdot\overline{PC'} = \sqrt{2}\frac{a}{2}$.
L’àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{PQR}$ és:
$S_{PQR} = \frac{\overline{PQ}^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2$.
La diagonal $\overline{AC'}$ és perpendicular al plànol PQR.
Siga M el punt d’intersecció de $\overline{AC'}$ i el plànol PQR.
El volum del tetraedre PQRC’ és:



$V_{PQRC'} = \frac{1}{3}\frac{\overline{PC'}\cdot\overline{PQ}}{2}\overline{C'R} = \frac{1}{3}S_{PQR}\cdot\overline{MC'}$.
$\frac{1}{3}\frac{\frac{a}{2}\frac{a}{2}}{2}\frac{a}{2} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{8}a^2\overline{MC'}$.
$\overline{MC'} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$.
$\overline{AM} = \overline{AC'} - \overline{MC'} = a\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}a = \frac{5\sqrt{3}}{6}a$.
El volum del tetraedre APQR és:
$V_{APQR} = \frac{1}{3}S_{PQR}\cdot\overline{AM}$.
$V_{APQR} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{8}a^2\frac{5\sqrt{3}}{6}a = \frac{5}{48}a^3$.
La proporció entre els volums del cub ABCDA’B’C’D’ i el tetraedre APQR és:
$\frac{V_{cub}}{V_{APQR}} = \frac{a^3}{\frac{5}{48}a^3} = \frac{48}{5}$.

845.- Siga el cub ABCDA’B’C’D’.
Siguen I, J, K, L, M, N, els punts migs de les arestes $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DD'}$, $\overline{A'D'}$, $\overline{A'B'}$, $\overline{BB'}$, respectivament.
Determineu la proporció entre els volums de la piràmide IJKLMNC’ i el cub ABCDA’B’C’D’.



Solució:

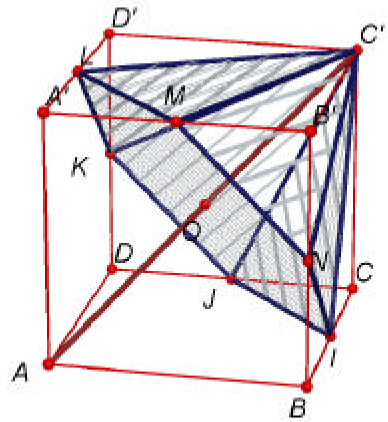
Siga el cub ABCDA’B’C’D’ d’aresta $\overline{AB}=a$.
Aplicant el teorema de Pitàgores la diagonal del cub és:
$\overline{AC'}=a\sqrt{3}$.
L’hexàgon IJKLMN és regular.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ICJ}$:

$$\overline{IJ}=\sqrt{2}\cdot\overline{CI}=\sqrt{2}\frac{a}{2}.$$

La diagonal $\overline{AC'}$ és perpendicular al plànol que forma l’hexàgon IJKLMN.
Siga O (centre del cub) el punt d’intersecció de $\overline{AC'}$ amb l’hexàgon IJKLMN .

$$\overline{OC'}=\frac{1}{2}\overline{AC'}=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$



L’àrea de l’hexàgon regular IJKLMN és:

$$S_{IJKLMN}=6\cdot S_{IJO}=6\frac{\overline{IJ}^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2.$$

El volum de la piràmide IJKLMNC’ és:

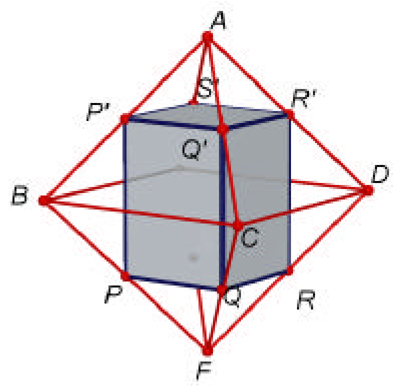
$$V_{IJKLMC'}=\frac{1}{3}S_{IJKLMN}\cdot\overline{OC'}.$$

$$V_{IJKLMNC'}=\frac{1}{3}\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2\frac{\sqrt{3}}{2}a=\frac{3}{8}a^3.$$

la proporció entre els volums la piràmide IJKLMNC’ i el cub ABCDA’B’C’D’ és:

$$\frac{V_{IJKLMNC'}}{V_{cub}}=\frac{\frac{3}{8}a^3}{a^3}=\frac{3}{8}.$$

846.- Siga l'octaedre regular ABCDEF.
Siguen P, Q, R, S, P', Q', R', S' els punts migs de les arestes $\overline{BF}$, $\overline{CF}$, $\overline{DF}$, $\overline{EF}$, $\overline{BA}$, $\overline{CA}$, $\overline{DA}$, $\overline{EA}$ respectivament.
Determineu la proporció entre els volums del prisma PQRSP'Q'R'S' i l'octaedre ABCDEF.

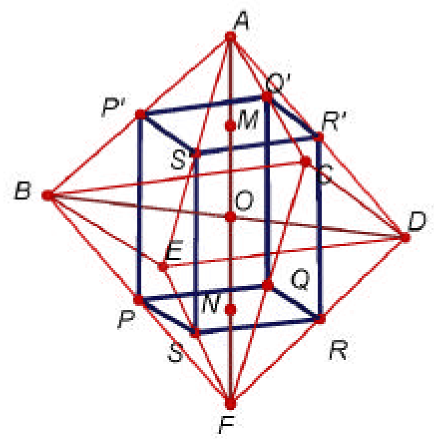


Solució:
Siga l'octaedre regular ABCDEF d'aresta $\overline{AB} = a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCD}$:
$\overline{BD} = \overline{AF} = a\sqrt{2}$.
Siga O el centre de l'octaedre.

$$\overline{OA} = \frac{1}{2}\overline{AF} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

Considerem la diagonal $\overline{AF}$ que talla el prisma en els punts M, N.



Els triangles $\overset{\Delta}{ABD}$, $\overset{\Delta}{AP'R'}$ són semblants i de raó 2:1.

$$\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}a$$

Aleshores, $\overline{MN} = \overline{PP'} = \frac{1}{2}\overline{AF} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

El volum del prisma PQRSP'Q'R'S' és:

$$V_{prisma} = \overline{PQ}^2 \cdot \overline{MN} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a = \frac{\sqrt{2}}{8}a^3$$

El volum de l'octaedre és igual al doble del volum de la piràmide ABCDE:

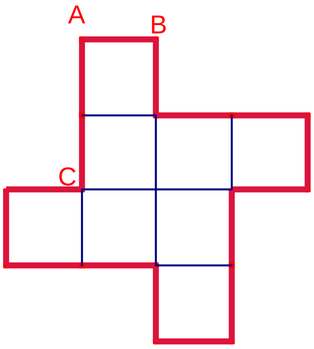
$$V_{octa} = 2\left(\frac{1}{3}\overline{AB}^2 \cdot \overline{OA}\right) = 2\left(\frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}a\right) = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$$

La proporció entre els volums del prisma PQRSP'Q'R'S' i l'octaedre ABCDEF és:

$$\frac{V_{prisma}}{V_{octa}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{8}a^3}{\frac{\sqrt{2}}{3}a^3} = \frac{3}{8}.$$

847.- En la figura els costats llargs són el doble que qualsevol dels curts. Si tots els angles són rectes i l'àrea de la figura és $200\,cm^2$, calculeu el perímetre de la figura.

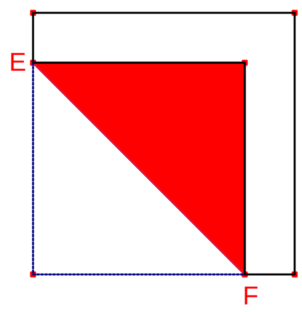
Solució:
La figura és pot dividir amb rectes paral·leles als costats amb 8 quadrats iguals.
Siga $\overline{AB} = c$ longitud dels costats més curts de la figura.
Els costats llargs mesuren tots $\overline{AC} = 2c$.
El perímetre de la figura és:
$P = 4c + 4(2c) = 12c$.



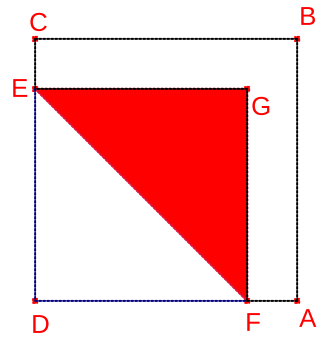
L'àrea de la figura és:
$S = 8c^2 = 200$.
Resolent l'equació:
$c = 5cm$.

El perímetre de la figura és:
$P = 12c = 12 \cdot 5 = 60cm$.

848.- Una fulla quadrada de paper de $12cm^2$ d'àrea, és blanca per una cara i roja per l'altra.
Dobleguem un cantó de la fulla formant un triangle amb dos costats paral·lels als costats de la fulla. Si la superfície visible de la fulla la meitat és roja i l'altra meitat blanca. Quina és en centímetres la longitud del plec $\overline{EF}$

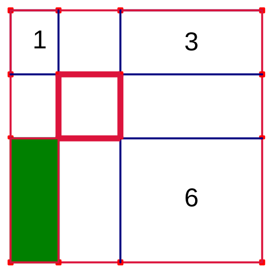


Solució:
Siga ABCD la fulla quadrada inicial de paper de $12cm^2$ d'àrea.
Siga $x = \overline{DE} = \overline{DF}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles:
$\overline{EF} = x\sqrt{2}$.

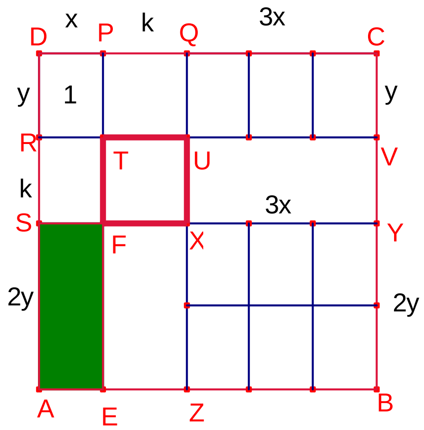


L'àrea del polígon visible blanc ABCEGF és:
$S_{ABCEGF} = S_{ABCD} - S_{DFGE} = 12 - x^2$.
L'àrea del triangle visible roig $\overset{\Delta}{EFG}$ és:
$S_{EFG} = \frac{1}{2}x^2$.
Si la superfície visible de la fulla la meitat és roja i l'altra meitat blanca, aleshores:
$12 - x^2 = \frac{1}{2}x^2$. Resolent l'equació:
$x = 2\sqrt{2}$.
La longitud del plec és:
$\overline{EF} = x\sqrt{2} = 2\sqrt{2}\sqrt{2} = 4cm$.

849.- Dividim un quadrat en 9 rectangles amb rectes paral·leles als costats com mostra la figura.
El rectangle central és un quadrat i les àrees de tres rectangles dels cantons, en cm^2, són les que es mostren.
Calculeu l'àrea i el perímetre del rectangle ombrejat.



Solució:
Siga ABCD el quadrat exterior.



Siga $x = \overline{DP}$, $y = \overline{DR}$.
Per hipòtesi $xy = 1$ (1)
$S_{UVCQ} = 3$ i $\overline{CV} = y$, aleshores, $\overline{CQ} = 3x$.
$S_{ZBYX} = 6$ i $\overline{XY} = 3x$, aleshores, $\overline{BY} = 2y$.

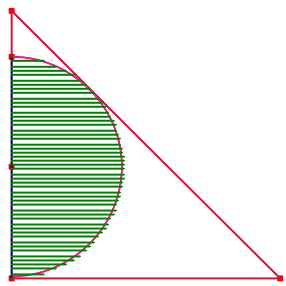
L'àrea del rectangle AEFS és:
$S_{AEFS} = x \cdot 2y = 2xy = 2 \cdot 1 = 2cm^2$

Siga $\overline{FX} = \overline{FT} = k$ costats del quadrat central.
$\overline{AB} = x + k + 3x$.
$\overline{AD} = y + k + 2y$
$\overline{AB} = \overline{AD}$, aleshores:
$4x = 3y$ (2)
Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):

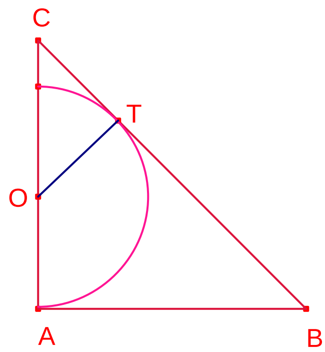
$\begin{cases} xy = 1 \\ 4x = 3y \end{cases}$, resolent el sistema: $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$.

El perímetre del rectangle AEFS és:
$P_{AEFS} = 2x + 4y = 2\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 4\dfrac{2\sqrt{3}}{3} = \dfrac{11\sqrt{3}}{3}$.

850.- Els catets del triangle rectangle mesuren 1.
Determineu el radi del semicercle ombrejat, tangent a la hipotenusa.

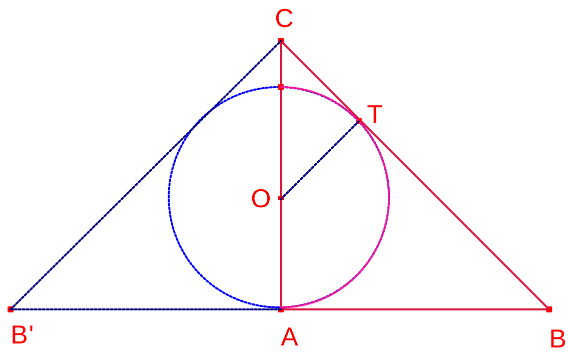


Solució 1:



Siga el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB} = \overline{AC} = 1$.
Aplicant el teorema de Pitàgores:
$\overline{BC} = \sqrt{2}$.
Siga T el punt de tangència de la semicircumferència i la hipotenusa.
Siga O el centre de la semicircumferència.

El triangle $\overset{\Delta}{OTC}$ és rectangle i isòsceles.
$\overline{OT} = \overline{CT} = r$ radi de la semicircumferència.
Per ser T punt de tangència amb la hipotenusa i A punt de tangència amb el catet
$\overline{BA} = \overline{BT} = 1$.
$\overline{CT} = \overline{BC} - \overline{BT} = \sqrt{2} - 1$.
$r = \sqrt{2} - 1$.



Solució 2:
Siga B' el punt simètric de B respecte de A.
El triangle $\overset{\Delta}{B'BC}$ és rectangle i isòsceles.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{BC} = \sqrt{2}$.
$\overline{B'B} = 2\overline{AB}$.

La semicircumferència pertany a la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{B'BC}$.
El seu radi per ser rectangle el triangle és:

$$r = \frac{\overline{BC} + \overline{B'C} - \overline{BB'}}{2} = \frac{2\sqrt{2} - 2}{2} = \sqrt{2} - 1.$$