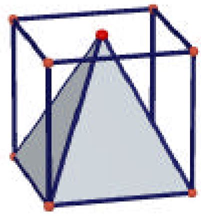
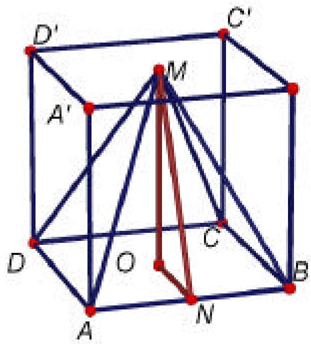
Problemes de Geometria per a l'ESO 86

851.- El centre d'una cara d'un cub s'uneix amb els vèrtexs de la cara oposada.
Determineu la raó entre l'àrea total de la piràmide que es forma i l'àrea del cub.
Gúsiev 776.



Solució.
Siga ABCDA'B'C'D' el cub d'aresta $\overline{AB} = a$.
Siga M el centre de la cara A'B'C'D'.
Siga O la projecció de M sobre la cara ABCD.
Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.



$\overline{OM} = a$, $\overline{ON} = \frac{a}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MON}$:

$\overline{MN} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$.

L'àrea total del cub és:

$S_c = 6a^2$.

L'àrea total de la piràmide és:

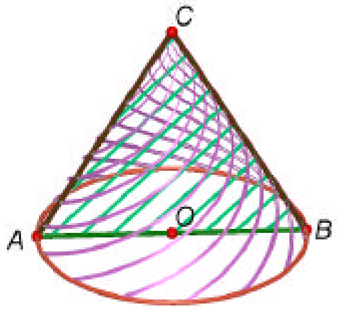
$$S_p = S_{ABCD} + 4 \cdot S_{ABM} = a^2 + 4\left(\frac{a \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}a}{2}\right) = \left(1+\sqrt{5}\right)a^2.$$

La proporció entre l'àrea total de la piràmide que es forma i l'àrea del cub és:

$$\frac{S_p}{S_c} = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)a^2}{6a^2} = \frac{1+\sqrt{5}}{6}.$$

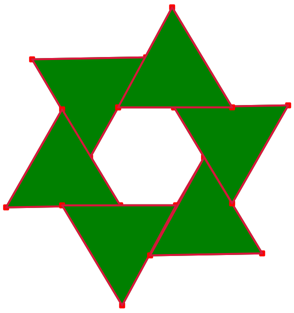
852.- L'angle entre dues generatrius de la secció axial d'un con (secció que conté el vèrtex i el centre de la base) és 2α.
Determineu la raó entre l'àrea lateral del con i l'àrea de la secció axial.
Gúsiev 778.

Solució:
Siga ABC la secció axial del con de centre O radi $r=\overline{OA}$ i vèrtex C.
Siga $\overline{AC}=\overline{BC}=g$ generatrius axials del con. $2\alpha=\angle ACB$.
$\angle BCO=\alpha$.

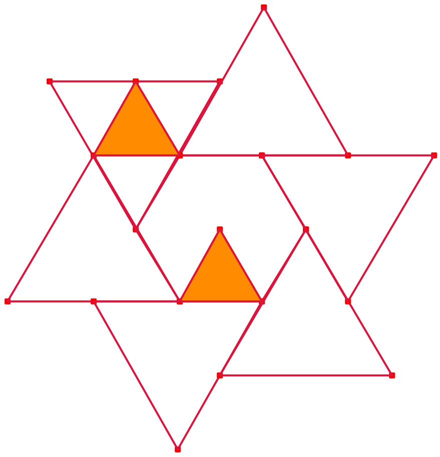


Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BOC}$:
$r=g\cdot\sin\alpha$.
L'àrea lateral del con és:
$S_l=\pi rg$.
$S_l=\pi g^2\sin\alpha$.
L'àrea de la secció axial del con és l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Utilitzant la fórmula trigonomètrica de l'àrea:
$S_{ABC}=\dfrac{1}{2}g^2\sin 2\alpha$.
La proporció entre l'àrea lateral del con i l'àrea de la secció axial és:
$$\frac{S_l}{S_{ABC}}=\frac{\pi g^2\sin\alpha}{\frac{1}{2}g^2\sin 2\alpha}=\frac{\pi}{\cos\alpha}.$$

853.- El costat de cadascun dels triangles equilàters de la figura és el doble del costat de l'hexàgon regular central.
Determineu la raó entre l'àrea de l'hexàgon i l'àrea total dels sis triangles.



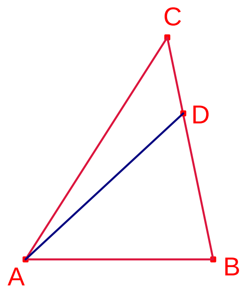
Solució:



$$\frac{S_{hex}}{S_{6tri}} = \frac{6}{6 \cdot 4} = \frac{1}{4}.$$

854.- Els costats d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ són $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=6$, $\overline{AC}=7$.
Dues formigues ixen del vèrtex A a la mateixa velocitat i recorren la vora del triangle en distintes direccions. Si s troben en el punt D, quina és la distància de A a D.

Solució:
Les dues formigues entre les dues recorren el perímetre del triangle i fins que s'ajuntes les dues recorren la mateixa distància ja que van a la mateixa velocitat.
Per tant, cada formiga recorre la meitat del perímetre.
El semiperímetre és:



$$p=\frac{5+6+7}{2}=9.$$

Aleshores, $\overline{CD}=2$, $\overline{BD}=4$.

Calculem l'angle C amb el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$5^2=7^2+6^2-2\cdot7\cdot6\cdot\cos C.$$

$$\cos C=\frac{5}{7}.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ACD}$:

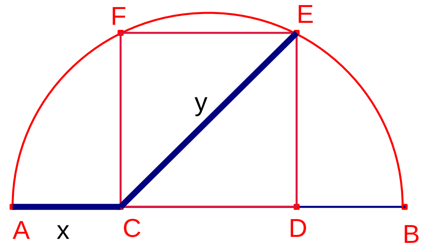
$$\overline{AD}^2=7^2+2^2-2\cdot7\cdot2\cdot\cos C$$

$$\overline{AD}^2=7^2+2^2-2\cdot7\cdot2\cdot\frac{5}{7}.$$

$$\overline{AD}=\sqrt{33}.$$

855.- En una semicircumferència de diàmetre $\overline{AB}$ inscrivim el quadrat CDEF com mostra la figura.

Si $\overline{AC}=x$ i $\overline{CE}=y$, calculeu $\frac{x}{y}$.



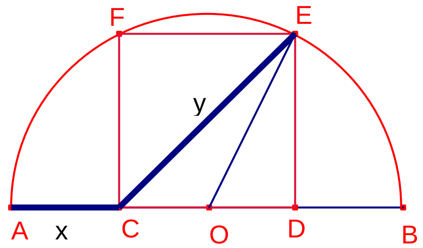
Solució:

Siga O en centre de la semicircumferència.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{CDE}$:

$\overline{CD}=\overline{DE}=\frac{\sqrt{2}}{2}y$.

$\overline{OD}=\frac{1}{2}\overline{CD}=\frac{\sqrt{2}}{4}y$.



El radi de la semicircumferència és:

$$\overline{OB}=\overline{OE}=\frac{2\overline{AD}+\overline{CD}}{2}=\frac{2x+\frac{\sqrt{2}}{2}y}{2}=\frac{4x+\sqrt{2}y}{4}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ODE}$:

$$\left(\frac{4x+\sqrt{2}y}{4}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}y\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}y\right)^2.$$

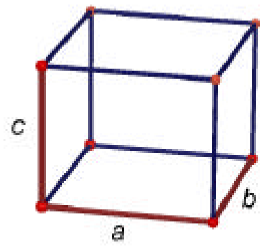
$2x^2+\sqrt{2}\cdot xy-y^2=0$, Dividint l'equació per y^2:

$2\left(\frac{x}{y}\right)^2+\sqrt{2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)-1=0$. Resolent l'equació:

$$\frac{x}{y}=\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4}.$$

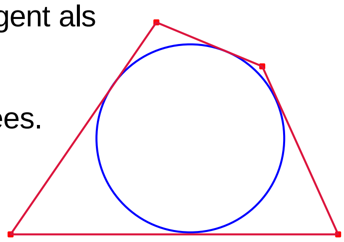
856.- El volum d'un ortoedre és $8cm^3$ i la seua superfície $32cm^2$.
Si les arestes estan en progressió geomètrica determineu la mesura de la suma de totes les arestes de l'ortoedre.

Solució:
Siguen a, b, c les mesures de les arestes del cub.
La suma de les 12 arestes és $L = 4(a+b+c)$.
Si les arestes estan en progressió geomètrica:



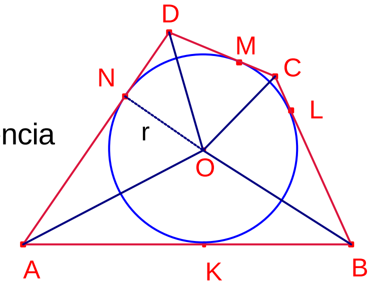
$ac = b^2$.
El volum de l'ortoedre és:
$abc = 8$.
$b^3 = 8$. Resolent l'equació:
$b = 2cm$
L'àrea de l'ortoedre és:
$2(ab + bc + ac) = 32$.
$2a + 2c + b^2 = 16$.
$2(a + c) = 12$
$a + c = 6$.
$a + b + c = 6 + 2 = 8$.
La mesura de la suma de totes les arestes és:
$L = 4(a + b + c) = 4 \cdot 8 = 32cm$

857.- Un quadrilàter té inscrita una circumferència (tangent als costats).
Si la raó entre els perímetres del quadrilàter i la circumferència és k, calculeu la raó entre les seues àrees.



Solució:
Siga ABCD el quadrilàter.
Siga r el radi de la circumferència.
Siga p el perímetre del quadrilàter.
La longitud de la circumferència és $2\pi r$.
La proporció entre els perímetres és:

$$\frac{p}{2\pi r}=k.$$



Siga O el centre de la circumferència.
Siguen K, L, M, N els punts de tangència de la circumferència inscrita al quadrilàter ABCD.

$\overline{OK}=\overline{OL}=\overline{OM}=\overline{ON}=r$.

El centre O divideix el quadrilàter en 4 triangles que tenen la mateixa altura r.
L'àrea del quadrilàter és:

$$S_{ABCD}=\frac{\overline{AB}\cdot r}{2}+\frac{\overline{BC}\cdot r}{2}+\frac{\overline{CD}\cdot r}{2}+\frac{\overline{AD}\cdot r}{2}=\frac{p\cdot r}{2}.$$

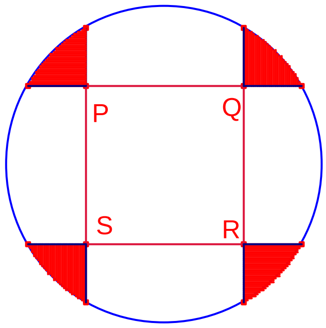
L'àrea del cercle és:

$$S_c=\pi r^2.$$

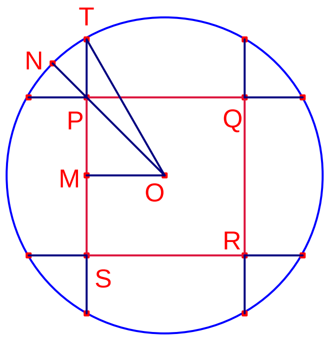
La proporció entre les àrees és:

$$\frac{S_{ABCD}}{S_c}=\frac{\frac{p\cdot r}{2}}{\pi r^2}=\frac{p}{2\pi r}=k.$$

858.- El quadrat PQRS de costat 1m i el cercle de radi 1m de la figura, tenen el mateix centre.
Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.



Solució:
Siga O el centre de la circumferència i el quadrat PQRS.
Siga M el punt mig del costat $\overline{PS}$.



$\overline{OM} = \frac{1}{2}$, $\overline{OT} = 1$. Aleshores:
$\angle TOM = 60^o$.
$\overline{MP} = \frac{1}{2}$. Aleshores:
$\angle POM = 45^o$.
$\angle NOT = \angle TOM - \angle POM = 15^o$.
L'àrea ombrejada és igual a vuit vegades l'àrea del sector de radi 1 i 15º menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PTO}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{MOT}$:

$$\overline{MT} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\overline{PT} = \overline{MT} - \overline{MP} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

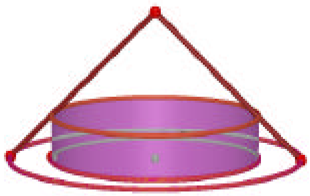
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PTO}$ és:

$$S_{PTO} = \frac{\overline{PT} \cdot \overline{OM}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2}\frac{1}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{8}.$$

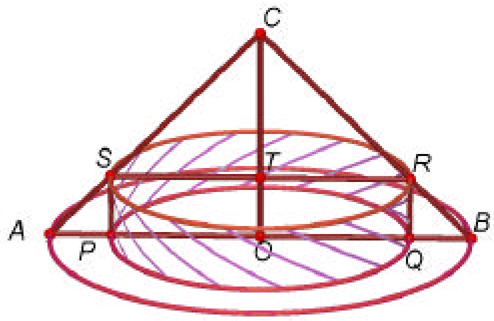
L'àrea de la zona ombrejada és:

$$S_o = 8\left(\frac{15}{360}\pi 1^2 - \frac{\sqrt{3}-1}{8}\right) = \frac{\pi + 3 - 3\sqrt{3}}{3} \approx 0'3151 m^2.$$

859.- En un con hi ha inscrit un cilindre.
L'àrea total del cilindre és igual a l'àrea lateral del con.
L'angle que forma l'eix del con i una generatriu és 45º.
Proveu que la distància del vèrtex del con a la base superior del cilindre és igual a la meitat de la generatriu del con.
Gúsiev 871.



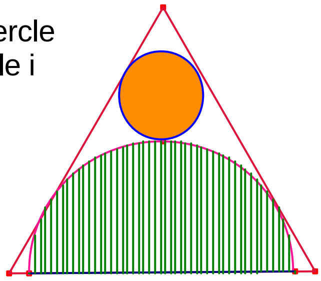
Solució:
Siga el con ABC de diàmetre de la base $\overline{AB} = 2R$ i vèrtex C.
$\angle OCB = 45^{o}$
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{BOC}$:
$\overline{BC} = R\sqrt{2}$.
Siga O el centre de la base del con i del cilindre.
Siga $\overline{PQ} = \overline{RS} = 2r$ diàmetres del cilindre inscrit en el con.



$\overline{QR} = \overline{QB} = R - r$.
L'àrea total del cilindre és:
$S_{Tci} = 2\pi r^{2} + 2\pi r(R - r)$.
L'àrea lateral del con és:
$S_{Lcon} = \pi R \cdot \overline{BC} = \pi R^{2}\sqrt{2}$.
L'àrea total del cilindre és igual a l'àrea lateral del con:
$2\pi r^{2} + 2\pi r(R - r) = \pi R^{2}\sqrt{2}$. Simplificant:
$r = \frac{\sqrt{2}}{2}R$.
Siga T el centre de la circumferència de la base superior del cilindre.
$\overline{CT} = \overline{TR} = r = \frac{\sqrt{2}}{2}R$.
Aleshores, $\overline{CT} = \frac{1}{2}\overline{BC}$.

860.- En un triangle equilàter sobre un costat s'ha dibuixat un semicercle tangent als altres dos costats i un cercle tangent exterior al semicercle i tangents als costats del triangle.

Si el radi del semicercle és R i el del cercle menut és r, calculeu $\frac{r}{R}$.



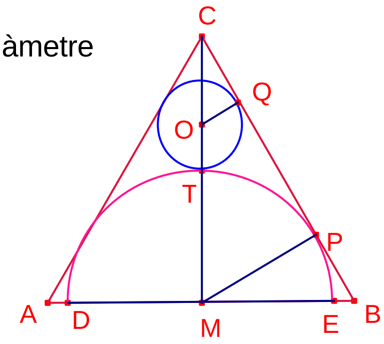
Solució:

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$ centre del semicercle de diàmetre $\overline{DE} = 2R$.

Siga P el punt de tangència del semicercle i el costat $\overline{BC}$.

$\overline{MP} = R$, $\angle PMB = 30^{o}$, aleshores:



$\overline{MB} = \frac{2}{\sqrt{3}} R$.

$\overline{BC} = 2 \cdot \overline{MB} = \frac{4\sqrt{3}}{3} R$.

$\overline{MC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{BC} = 2R$.

Siga O el centre del cercle i T el punt de tangència del cercle i la semicircumferència.

Siga Q el punt de tangència del cercle i el costat $\overline{BC}$.

$\overline{CO} = 2 \cdot \overline{OQ} = 2r$.

$\overline{OT} = r$, $\overline{MT} = R$.

$\overline{MC} = \overline{CO} + \overline{OT} + \overline{MT}$.

$2R = 3r + R$.

$R = 3r$.

$\frac{r}{R} = \frac{1}{3}$.