Problemes de Geometria per a l'ESO 87

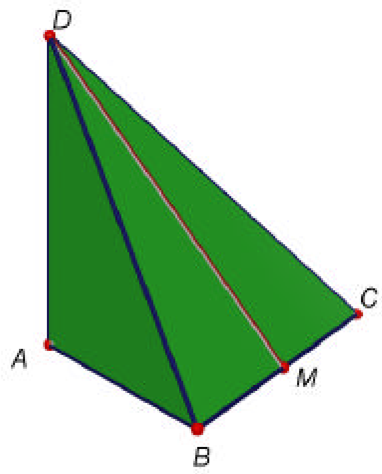
861.- La base d'un tetraedre és un triangle rectangle isòsceles d'hipotenusa 8cm i l'aresta lateral sobre l'angle recte de la base és perpendicular a la base i mesura 5cm. Calculeu l'àrea i el volum del tetraedre.

Solució:

Siga el tetradedre de base $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90º$, $\overline{BC} = 8$.
Siga $\overline{AD} = 5$, $\angle DAB = \angle DAC = 90º$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AB} = \overline{AC} = 4\sqrt{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$:
$\overline{BD} = \overline{CD} = \sqrt{57}$.



El triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ és isòsceles.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CMD}$:
$\overline{DM} = \sqrt{41}$.
L'àrea del tetraedre ABCD és:
$S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABD} + S_{ABC} + S_{BCD}$.

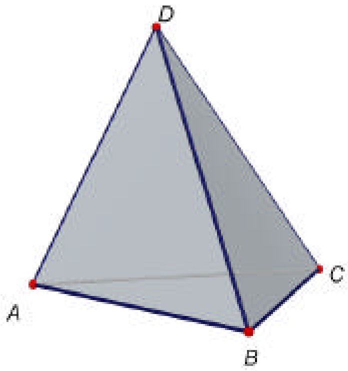
$$S_{ABCD} = 2 \cdot \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{2} + \frac{\overline{AB}^2}{2} + \frac{\overline{BC} \cdot \overline{DM}}{2}.$$

$S_{ABCD} = 20\sqrt{2} + 16 + 4\sqrt{41} \approx 69.90\text{cm}^2$.
El volum del tetraedre és:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overline{AD}.$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} 16 \cdot 5 = \frac{80}{3} \approx 26.66\text{cm}^3.$$

862.- Un tetraedre està format per dos triangles equilàters de costat a i dos triangles rectangles isòsceles.
Calculeu l'àrea i el volum.
KöMaL, 1997, octubre. C480



Solució:

Siga el tetraedre ABCD tal que les cares $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{ACD}$ són triangles equilàters de costat a. Siguen $\overset{\Delta}{ABD}$, $\overset{\Delta}{BCD}$ les cares que són triangles rectangles isòsceles.

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{CD} = a$.

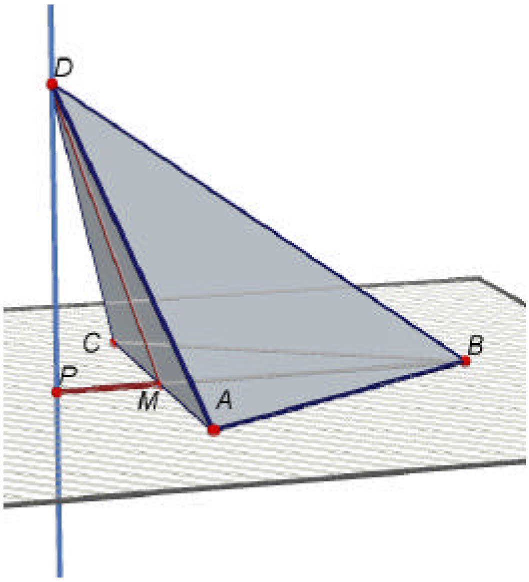
$\angle BAD = BCD = 90^o$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABD}$:

$\overline{AD} = a\sqrt{2}$.

L'àrea del tetraedre és:

$$S_{ABCD} = 2\cdot S_{aBC} + 2\cdot S_{ABD} = 2\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 2\frac{a^2}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}a^2.$$



Siga P la projecció de C sobre la base $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AC}$.

M pertany al segment $\overline{PB}$.

Siga $\overline{DP} = h$ altura del tetraedre. Siga $\overline{PM} = x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMB}$:

$$\overline{BM} = \overline{DM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PMD}$:

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = x^2 + h^2 \qquad (1)$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PBD}$:

$$\left(a\sqrt{2}\right)^2 = \left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 + h^2 \qquad (2)$$

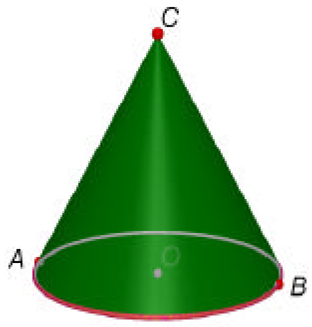
Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):

$$\begin{cases} \frac{3}{4}a^2 = x^2 + h^2 \\ 2a^2 = x^2 + \frac{3}{4}a^2 + \sqrt{3}ax + h^2 \end{cases}. \text{ La solució és } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{6}a \\ h = \frac{\sqrt{6}}{3}a \end{cases}.$$

El volum del tetraedre és:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3.$$

863.- Un con recte té diàmetre de la base 20cm i altura 20cm.
Quina és la longitud màxima d'una tira de 2cm d'ample que podem posar en la superfície lateral del con (sense que es sobrepose, ni es doblegue la tira).
KöMaL, setembre 1997, C476.



Solució:

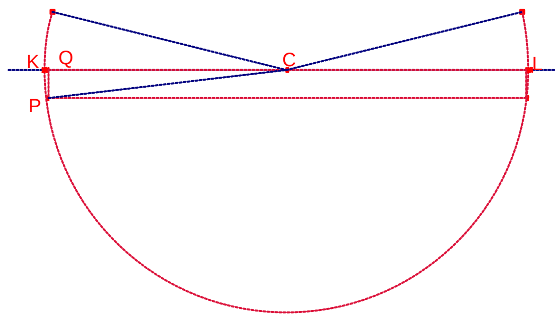
Siga el con de diàmetre $\overline{AB} = 20$ i altura $\overline{OC} = 20$ (O en centre de la circumferència base).

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{AOC}$:

$\overline{AC} = 10\sqrt{3}$ generatriu del con.

Calculem l'angle del sector circular format pel desenvolupament del con:

La longitud de l'arc, és igual a la longitud de la circumferència de radi 10.



$L_{arc} = 2\pi 10 = 20\pi = 2\pi\overline{OA}\dfrac{\alpha}{360^o}$, on α és l'angle del sector.

$20\pi = 2\pi 10\sqrt{3}\dfrac{\alpha}{360^o}$. Resolent l'equació:

$\alpha = \dfrac{360^o}{\sqrt{3}} \approx 207^o 50' 46''$.

Com que l'angle és major de 180º la longitud de la major tira estarà sobre el diàmetre $\overline{KL}$ del sector.

La tira formarà part del diàmetre més gran

La longitud màxima de la tira és $L = 2\overline{CQ}$.

$\overline{CP} = 10\sqrt{3}$, $\overline{PQ} = 2$.

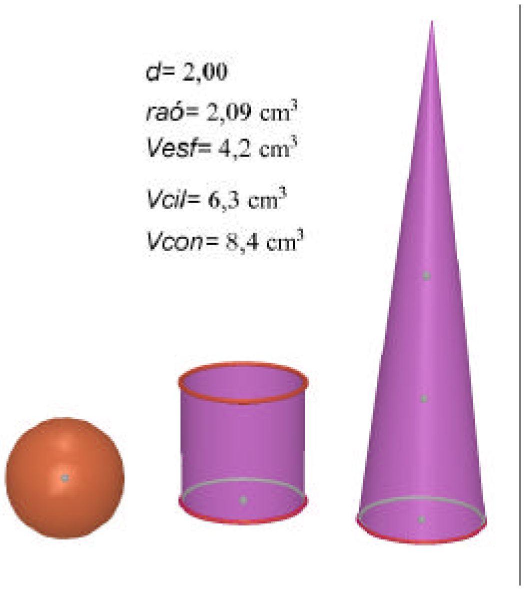
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CQP}$:

$\overline{CQ} = \sqrt{296}$.

$L = 2\overline{CQ} = 2\sqrt{296} \approx 34.41\text{cm}$.

864.- Una esfera de diàmetre d, un cilindre de diàmetre d i altura d i un con de diàmetre d, els seus volums estan en progressió aritmètica (en aquest ordre). Calculeu l'altura del con.
KöMaL, abril de 2013 C1169.

Solució:
Siga h l'altura del con.



El volum de l'esfera és:

$$V_{esf} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6}d^3 .$$

El volum del cilindre és:

$$V_{cil} = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 d = \frac{\pi}{4}d^3 .$$

El volum del con és:

$$V_{con} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 h = \frac{\pi}{12}d^2h .$$

$\frac{\pi}{6}d^3, \frac{\pi}{4}d^3, \frac{\pi}{12}d^2h$. Els volums estan en progressió geomètrica.
La diferència de la progressió és:

$$x = V_{cil} - V_{esf} = \frac{\pi}{4}d^3 - \frac{\pi}{6}d^3 = \frac{\pi}{12}d^3 .$$

El volum del con és:

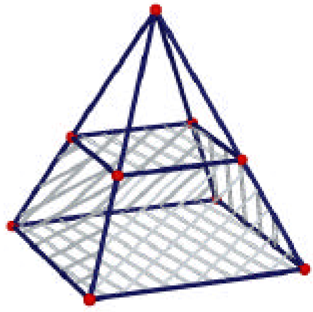
$$V_{con} = V_{esf} + 2x = \frac{\pi}{6}d^3 + 2\frac{\pi}{12}d^3 = \frac{\pi}{3}d^3 .$$

Igualant els volum del con:

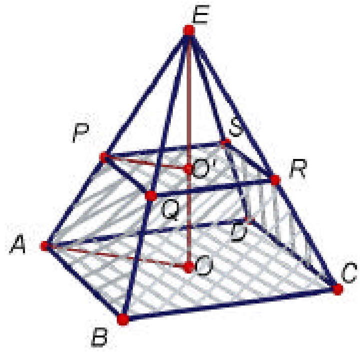
$$\frac{\pi}{12}d^2h = \frac{\pi}{3}d^3 .$$

Resolent l'equació:

$$h = 4d .$$



865.- En una piràmide regular quadrangular l'àrea de la secció paral·lela a la base és tres vegades menor que l'àrea de la base. Determineu la raó entre dels dos cossos en què queda dividida la piràmide per la secció.
Gúsiev 839.



Solució:
Siga la piràmide regular quadrangular ABCDE de base el quadrat ABCD.
Siga la secció PQRS paral·lela a la base.
Siga O el centre del quadrat ABCD.
Siga O' el centre del quadrat PQRS.
$\frac{S_{PQRS}}{S_{ABCD}}=\frac{1}{3}$. Aleshores la proporció entre els costats del quadrat és:

$$\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}=\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{PO'E}$, $\overset{\Delta}{AOE}$ són semblants i la raó és $\frac{\overline{PQ}}{\overline{AB}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, aleshores:

$$\frac{\overline{O'E}}{\overline{OE}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Calculem la proporció entre els volums de les piràmides PQRSE i ABCDE:

$$\frac{V_{PQRSE}}{V_{ABCDE}}=\frac{\frac{1}{3}S_{PQRS}\cdot\overline{O'E}}{\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot\overline{OE}}=\frac{\sqrt{3}}{9} \qquad (1)$$

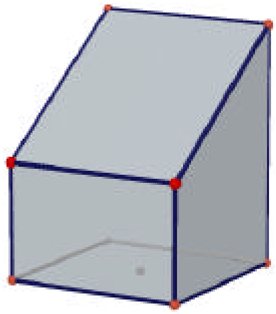
Calculem la proporció entre els volums del tronc de piràmide ABCDPQRS i la piràmide ABCDE:

$$\frac{V_{ABCDPQRS}}{V_{ABCDE}}=\frac{V_{ABCDE}-V_{PQRSE}}{V_{ABCDE}}=1-\frac{V_{PQRSE}}{V_{ABCDE}}=1-\frac{\sqrt{3}}{9} \qquad (2)$$

Dividint les expressions (1) (2) la proporció entre els volums de la piràmide PQRSE i el tron de piràmide ABCDPQRS és:

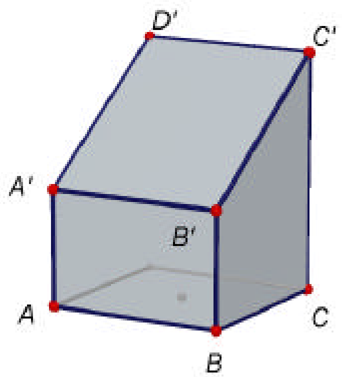
$$\frac{V_{PQRSE}}{V_{ABCDPQRS}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{9}}{\frac{9-\sqrt{3}}{9}}=\frac{1+3\sqrt{3}}{26}.$$

866.- Un prisma regular quadrangular, l'aresta de la base del qual és a, està truncat de manera que dues arestes que formen una cara lateral mesuren b i les altres dues c. Calculeu el volum del prisma truncat.
Gúsiev 805.

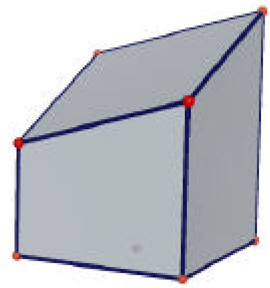


Solució:
Considerem el prisma truncar ABCDA'B'C'D'.
$\overline{AB}=\overline{BC}=a$, $\overline{AA'}=\overline{BB'}=b$, $\overline{CC'}=\overline{DD'}=c$.
La figura també es pot considerar un prisma de base trapezoidal BCC'B'.
El seu volum és:

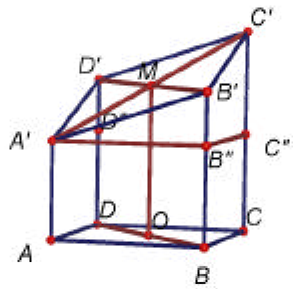
$$V=S_{BCC'B'}\cdot\overline{AB}=\left(\frac{\overline{CC'}+\overline{BB'}}{2}\overline{BC}\right)\overline{AB}=\frac{b+c}{2}a^2 .$$



867.- Un prisma regular quadrangular, l'aresta de la base del qual és a, està truncat amb un plànol paral·lel una diagonal de la base una lateral mesura b i l'aresta oposada c (veure figura)
Calculeu el volum del prisma truncat.



Solució:
Considerem el prisma truncar ABCDA'B'C'D'.
$\overline{AB}=\overline{BC}=a$, $\overline{AA'}=b$, $\overline{CC'}=c$.
El plànol A'B'C'D' és paral·lel a la diagonal $\overline{BD}$.
Siga O el centre del quadrat ABCD.
Siga M el punt mig de $\overline{A'C'}$ i $\overline{B'D'}$.
La mesura de $\overline{OA}$ és mitjana aritmètica de $\overline{AA'}=b$ i $\overline{CC'}=c$.

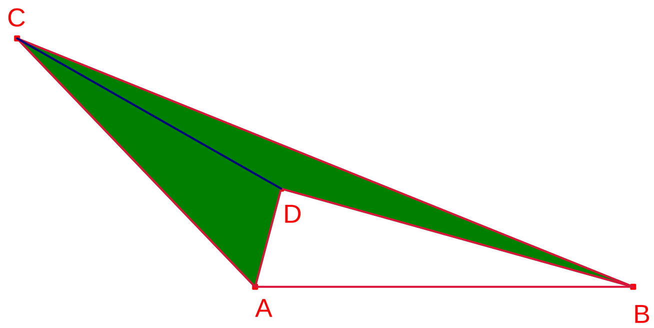


$$\overline{OM}=\frac{b+c}{2}.$$
$$\overline{BB'}=\overline{DD'}=\overline{OM}=\frac{b+c}{2}.$$
Tracem el plànol paral·lel a la base ABCD que passa per A.
El plànol talla les arestes en els punts B", C", D".
Notem que B"C"C'B'A' és una piràmide de base trapezoidal B"C"C'B' i altura $\overline{A'B''}$.

El volum del prisma truncat és igual al volum del prisma ABCDA'B"C"D" més dues vegades el volum de la piràmide B"C"C'B'A'.

El seu volum és:
$$V=\overline{AB}^2\cdot\overline{AA'}+2\left[\frac{1}{3}\left(\frac{\overline{C''C'}+\overline{B''B'}}{2}\overline{C''B''}\right)\overline{A'B''}\right]=a^2b+2\frac{1}{3}\frac{c-b+\frac{b+c}{2}-b}{2}a^2=\frac{b+c}{2}a^2.$$

868.- Siga D un punt interior del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Si $\overline{AB}=5$, $\overline{CD}=4$ i la superfície del quadrilàter ADBC és 5, determineu l'angle que formen les rectes CD i AB.



Solució:

La recta CD talla el costat $\overline{AB}$ en el punt P.

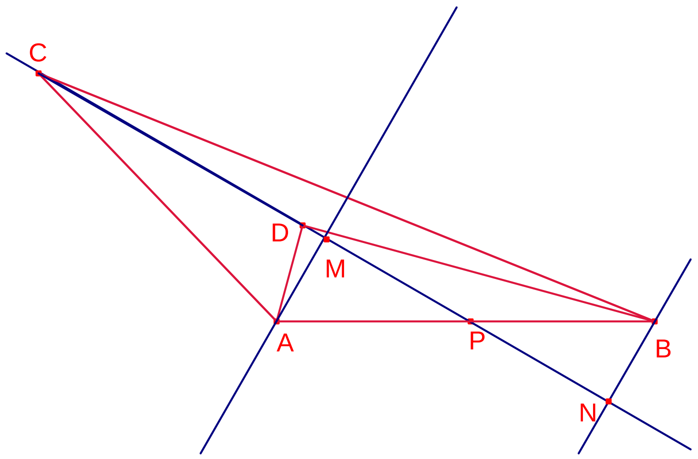
Siga $\angle APC=\alpha$.

Siga $\overline{AP}=x$, $\overline{BP}=5-x$.

Siga M la projecció de A sobre la recta CD.

Siga N la projecció de B sobre la recta CD.

Siga $\overline{AM}=y$, $\overline{BN}=z$



L'àrea del quadrilàter ADBC és:

$$S_{ADBC}=\frac{\overline{CD}\cdot\overline{AM}}{2}+\frac{\overline{CD}\cdot\overline{BN}}{2}.$$

$\frac{4y}{2}+\frac{4z}{2}=5$. Simplificant:

$$y+z=\frac{5}{2}.$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{APM}$, $\overset{\Delta}{BPN}$ són semblants.

Aplicant el teorema de tales:

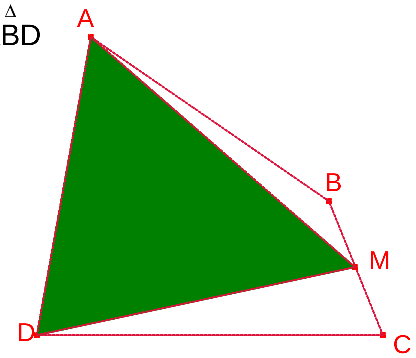
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{BP}}{\overline{BN}}.$$

$$\frac{x}{y}=\frac{5-x}{z}=\frac{5}{y+z}.$$

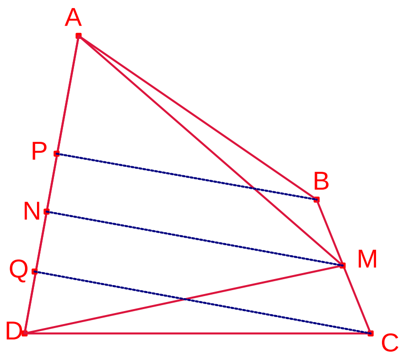
$$\frac{x}{y}=\frac{5}{\frac{5}{2}}=2.$$

$\cos\alpha=\frac{y}{x}=\frac{1}{2}$. Aleshores, $\alpha=60^{\circ}$.

869.- Siga el quadrilàter ABCD tal que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ és 7 i l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACD}$ és 9.
Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.
Calculeu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AMD}$.



Solució:
Dos triangles que tenen la mateixa base les altures són proporcionals a les àrees.
Siga h_1 l'altura del triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ sobre la base $\overline{AD}$.
Siga P la projecció de B sobre la base $\overline{AD}$.
Siga h_2 l'altura del triangle $\overset{\Delta}{ACD}$ sobre la base $\overline{AD}$.
Siga Q la projecció de C sobre la base $\overline{AD}$.
Aplicant la propietat anterior:



$$\frac{h_1}{7}=\frac{h_2}{9}.$$

$$\frac{h_1}{7}=\frac{h_2}{9}=\frac{h_1+h_2}{16}.$$

Siga h l'altura del triangle $\overset{\Delta}{AMD}$ sobre la base $\overline{AD}$.
Siga N la projecció de M sobre la base $\overline{AD}$.
Considerem el trapezi PBCN.
$\overline{MN}$ és paral·lela mitjana del trapezi.
Aleshores:

$$h=\frac{h_1+h_2}{2}.$$

$$\frac{h_1}{7}=\frac{h_2}{9}=\frac{h}{8}.$$

$$\frac{S_{AMC}}{S_{ABD}}=\frac{h}{h_1}=\frac{8}{7}.$$

$$S_{AMD}=\frac{8}{7}S_{ABD}=8.$$

870.- Siguen r i s dues rectes secants.
Siga P un punt que no pertany a cap de les dues rectes.
Siga Q el simètric de P respecte de r.
Siga R el simètric de Q respecte de s.
Siga S el simètric de R respecte de r.
Demostreu que P, Q, R i S pertanyen a una circumferència.

Solució:
Siga O la intersecció de r i s.
$\overline{PQ}$ i $\overline{RS}$ són perpendiculars a r.
Aleshores, $\overline{PQ}$ i $\overline{RS}$ són paral·lels.
$\overline{QS}$ és simètric de $\overline{PR}$ respecte de la recta r.
Aleshores, $\overline{PR} = \overline{QS}$.
Aleshores, PQSR és un trapezi isòsceles, aleshores, els angles oposats són suplementaris, per tant, el quadrilàter és inscriptible.
Notem que O és equidistant dels quatre punts ja que:
Per ser P i Q simètrics respecte r, $\overline{OP} = \overline{OQ}$.
Per set Q i R simètrics respecte de s $\overline{OQ} = \overline{OR}$.
Aleshores O és el centre de la circumferència circumscrita al quadrilàter PQSR.