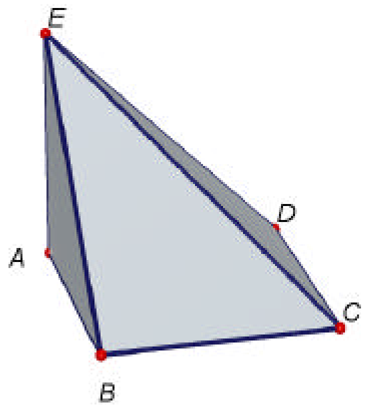
Problemes de Geometria per a l'ESO 88

871.- Siga la piràmide ABCDE de base quadrada ABCD i altura $\overline{AE}$ mesura igual que l'aresta de la base a.

a) Classifiqueu els triangles $\overset{\Delta}{EBD}$, $\overset{\Delta}{EBC}$.
b) Calculeu l'àrea i el volum de la piràmide.



Solució.
a)
Si $\overline{AE}$ és altura és perpendicular a la base ABCD.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC} = \overline{BD} = a\sqrt{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABE}$:
$\overline{BE} = \overline{DE} = a\sqrt{2}$.

Aleshores, $\overline{BE} = \overline{DE} = \overline{BD} = a\sqrt{2}$, el triangle $\overset{\Delta}{EBD}$ és equilàter.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACE}$:
$\overline{CE}^2 = a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 = a\sqrt{3}$.

Notem que $\overline{BC}^2 + \overline{BE}^2 = \overline{CE}^2$. Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{EBC}$ és rectangle $\angle EBC = 90^{o}$ i escalè.

b)

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABE}$, $\overset{\Delta}{ADE}$ són iguals.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BCE}$, $\overset{\Delta}{ADE}$ són iguals.
El volum de la piràmide ABCDE és:

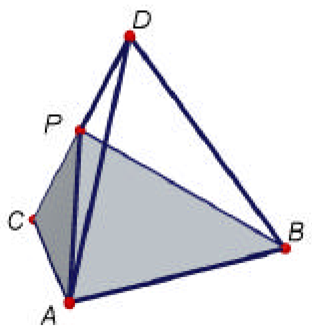
$$V = \frac{1}{3}S_b \cdot h = \frac{1}{3}\overline{AB}^2 \cdot \overline{AE} = \frac{1}{3}a^3.$$

La superfície total de la piràmide ABCDE és:

$$S = S_{ABCD} + 2 \cdot S_{ABE} + 2 \cdot S_{BCE} = \overline{AB}^2 + 2\left(\frac{\overline{AB} \cdot \overline{AE}}{2}\right) + 2\left(\frac{\overline{BC} \cdot \overline{BE}}{2}\right) = a^2 + a^2 + a^2\sqrt{2} =$$

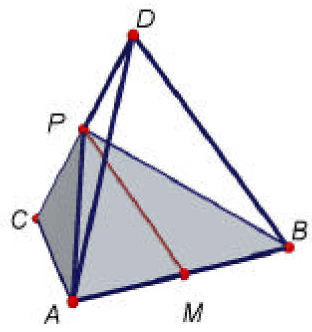
$$= a^2\left(2 + \sqrt{2}\right).$$

872.- Siga el tetraedre regular ABCD.
Siga P el punt mig de l'aresta $\overline{CD}$.
Determineu la proporció entre les àrees del tetraedre ABCP i el tetraedre regular ABCD.



Solució:
Siga $\overline{AB} = a$ aresta del tetraedre regular ABCD:.
L'àrea del tetraedre regular ABCD és:

$$S_{ABCD} = 4 \cdot S_{ABC} = 4\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = a^2\sqrt{3}$$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APC}$:

$$\overline{AP} = \overline{BP} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMP}$:

$$\overline{MP} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

L'àrea del tetraedre ABCP és igual a la suma de les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{APC}$, $\overset{\Delta}{BPC}$ i $\overset{\Delta}{APB}$:

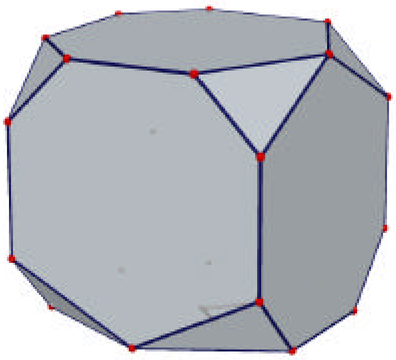
$$S_{ABCP} = S_{ABC} + 2 \cdot S_{APC} + S_{APB} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 2\left(\frac{\frac{1}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2}a}{2}\right) + \frac{a\frac{\sqrt{2}}{2}a}{2} = \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}a^2.$$

La proporció entre les àrees del tetraedre ABCP i el tetraedre regular ABCD és:

$$\frac{S_{ABCP}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}a^2}{a^2\sqrt{3}} = \frac{6+\sqrt{6}}{12} \approx 0.7041.$$

873.- Al truncar un cub per tots els vèrtexs s'ha format 8 triangles i 6 heptàgons.
Quants vèrtexs té el nou sòlid?.
KöMaL, B4362. Maig 2011.

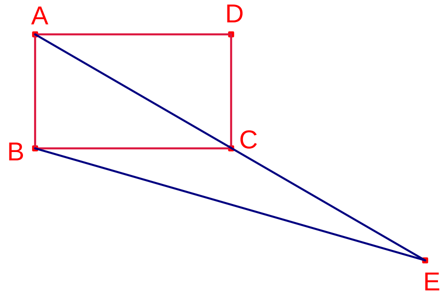
Solució:
El nombre de cares del nou poliedre és:
$C = 8 + 6 = 14$.
Una aresta està formada per la interseccció de dos costats de polígons.
Si en total el nou poliedre està format per 8 triangles i 6 heptàgons el nombre d'arestes és la meitat del total dels costats.
$$A = \frac{8 \cdot 3 + 6 \cdot 7}{2} = 33.$$
Aplicant el teorema d'Euler $C + V = A + 2$.
$14 + V = 33 + 2$.
$V = 21$.



874.- En la figura els costats del rectangle ABCD són $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$.

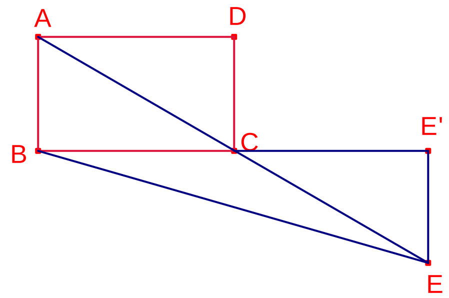
Els segments $\overline{AC}$ i $\overline{CE}$ estan alineats i són iguals.

Calculeu la mesura del segment $\overline{BE}$.



Solució:

Siga E' la projecció de E sobre la recta BC.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADC}$, $\overset{\Delta}{CE'E}$ són iguals. Aleshores:

$\overline{CE'} = b$, $EE' = a$.

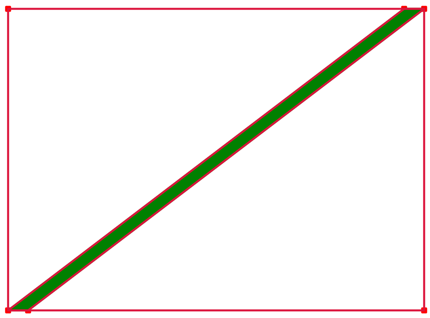
$\overline{BE'} = 2b$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BE'E}$:

$\overline{BE'}^2 = (2b)^2 + a^2$.

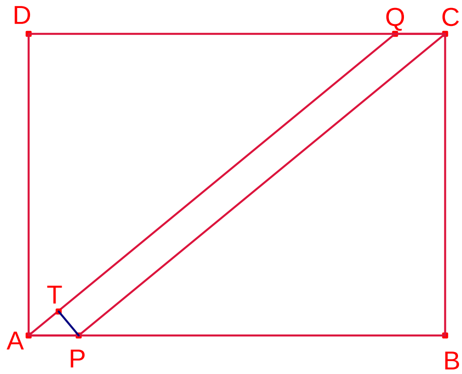
$\overline{BE'} = \sqrt{4b^2 + a^2}$.

875.- La tira ombrejada de la figura té 1cm d'ample.
Calculeu la seua àrea.



Solució:

Siga el rectangle ABCD, $\overline{AB}=55$, $\overline{BC}=40$.
Siga APCQ el paral·lelogram que forma la tira d'amplària 1.
Siga T la projecció de P sobre el segment $\overline{AQ}$. $\overline{PT}=1$.
Siga $\overline{AP}=x$.
$\overline{PB}=55-x$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ATP}$:
$\overline{AT}=\sqrt{x^2-1}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ATP}$, $\overset{\Delta}{PBC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{PT}}{\overline{AT}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{PB}}.$$

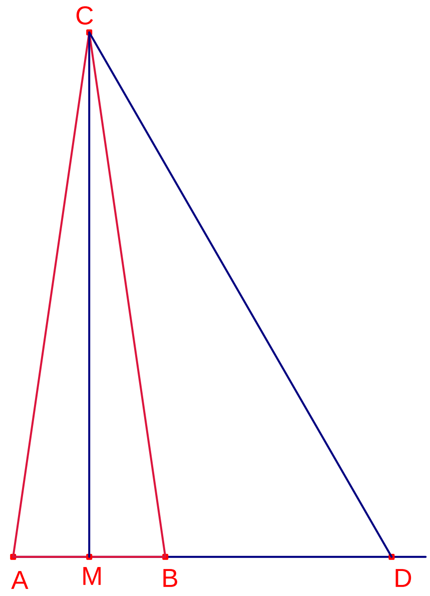
$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{40}{55-x}.$$ Resolent l'equació:

$$x=\frac{5}{3}.$$

L'altura del paral·lelogram APCQ sobre la base $\overline{AP}$ és $\overline{BC}$.
L'àrea del paral·lelogram APCQ és:

$$S_{APCQ}=\overline{AP}\cdot\overline{BC}=\frac{5}{3}40=\frac{200}{3}\approx 66.67cm^2.$$

876.- Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AC} = \overline{BC} = 7$, $\overline{AB} = 2$.
Siga D un punt de la recta AB tal que B està entre A i D i $\overline{CD} = 8$.
Calculeu la mesura del segment $\overline{BD}$.
AMC, 2005B.



Solució:
Siga $x = \overline{BD}$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

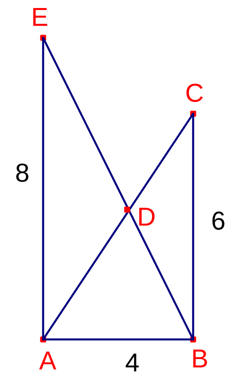
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMC}$:
$\overline{MC} = \sqrt{7^2 - 1^2} = \sqrt{48}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CMD}$:
$8^2 = \left(\sqrt{48}\right)^2 + (1 + x)^2$.
Resolent l'equació:
$x = 3$.

877.- En la figura $\angle EAB = \angle ABC = 90^{o}$, $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = 6$, $\overline{AE} = 8$, i $\overline{AC}$ i $\overline{BE}$ s'intersecten en D.

Determineu la diferència entre les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ADE}$ i $\overset{\Delta}{BDC}$.

AMC 2004A.



Solució:

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABE}$ és:

$$S_{ABE} = \frac{4 \cdot 8}{2} = 16.$$

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{4 \cdot 6}{2} = 12.$$

la diferència entre les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{ADE}$ i $\overset{\Delta}{BDC}$ és

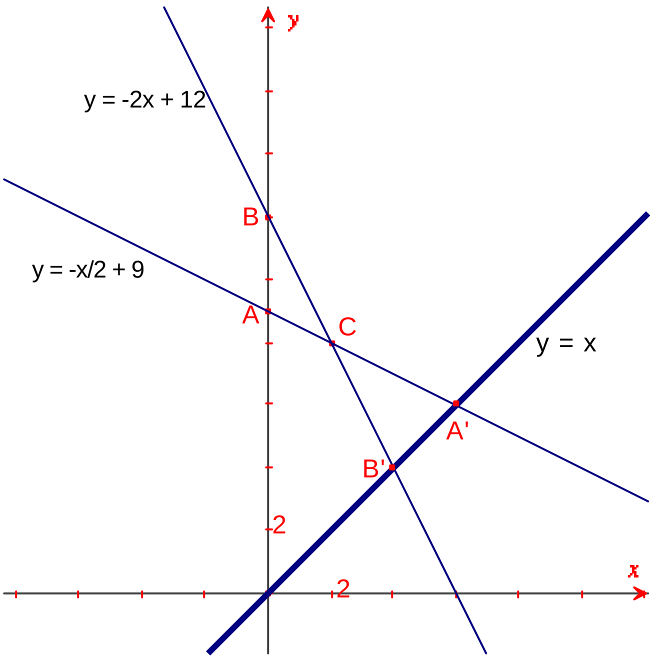
$$S_{ADE} - S_{BDC} = (S_{ABE} - S_{ABD}) - (S_{ABC} - S_{ABD}) = S_{ABE} - S_{ABC} = 16 - 12 = 4.$$

878.- Siguen els punts $A(0,9)$ i $B(0,12)$.

Els punts A', B' pertanyen a la recta $y=x$, i els segments $\overline{AA'}$ i $\overline{BB'}$ s'intersecten en el punt $C(2,8)$.

Determineu la longitud del segment $\overline{A'B'}$.

AMC 2004A.



Solució:

La recta que passa pels punts A, C té equació:

$r_{AC} \equiv y=-\frac{1}{2}x+9$.

La recta que passa pels punts B, C té equació:

$r_{BC} \equiv y=-2x+12$.

El punt A' és intersecció de les rectes $r_{AC} \equiv y=-\frac{1}{2}x+9$, $y=x$.

$\begin{cases} y=-\frac{1}{2}x+9 \\ y=x \end{cases}$, la solució del sistema és: $\begin{cases} x=6 \\ y=6 \end{cases}$. $A'(6,6)$.

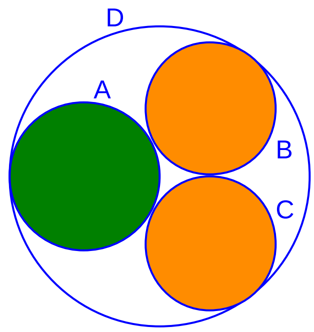
El punt B' és intersecció de les rectes $r_{BC} \equiv y=-2x+12$, $y=x$.

$\begin{cases} y=-2x+12 \\ y=x \end{cases}$, la solució del sistema és: $\begin{cases} x=4 \\ y=4 \end{cases}$. $B'(4,4)$.

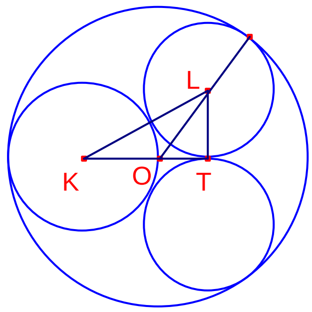
La longitud del segment $\overline{A'B'}$ és:

$\overline{A'B'}=\sqrt{(6-4)^2+(6-4)^2}=2\sqrt{2}$.

879.- Els cercles A, B i C són tangents exteriors entre ells i tangents interiors al cercle D.
El cercle B i C tenen el mateix radi.
El cercle C és de radi 1 i passa pel centre del cercle D.
Determineu el radi del cercle B.
AMC 2004A.



Solució:
Siga O el centre del cercle D. El seu radi és 2.
Siga K el centre del cercle A.
Siga L el centre del cercle B.
Siga T el punt de tangència dels cercles B i C.
Siga $\overline{LT} = r$ el radi del cercle B.
Siga $\overline{OT} = x$.

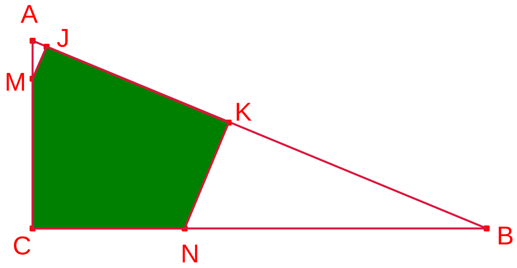


$\overline{KL} = 1 + r$, $\overline{KT} = 1 + x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KTL}$:
$(1+r)^2 = r^2 + (1+x)^2$.
$\overline{OL} = 2 - r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTL}$:
$(2-r)^2 = x^2 + r^2$.
Considerem el sistema:
$\begin{cases} (1+r)^2 = r^2 + (1+x)^2 \\ (2-r)^2 = x^2 + r^2 \end{cases}$. Resolent el sistema:
$\begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ r = \dfrac{8}{9} \end{cases}$.

880.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB}=13$, $\overline{AC}=5$, $\overline{BC}=12$.
Siguen M i N els punts dels catets $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$, respectivament, tal que $\overline{CM}=\overline{CN}=4$.
Siguen J i K de la hipotenusa $\overline{AB}$ tal que $\overline{MJ}$ i $\overline{NK}$ són perpendiculars a $\overline{AB}$.
Calculeu l'àrea del pentàgon CMJKN.
AMC 2004B.



Solució:

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC}=\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AC}}{2}=\frac{12\cdot 5}{2}=30.$$

Dos triangles que són semblants, les àrees són proporcionals al quadrat de la raó de semblança dels triangles.

Els triangles $\overset{\Delta}{AMJ}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ són semblants, aleshores:

$$\frac{S_{AMJ}}{S_{ABC}}=\left(\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}\right)^2=\left(\frac{1}{13}\right)^2.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{BNK}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ són semblants, aleshores:

$$\frac{S_{BNK}}{S_{ABC}}=\left(\frac{\overline{BN}}{\overline{AB}}\right)^2=\left(\frac{8}{13}\right)^2.$$

L'àrea del pentàgon CMJKN és:

$$S_{CMJKN}=S_{ABC}-\left(S_{AMJ}+S_{BNK}\right)=\left(1-\left(\left(\frac{1}{13}\right)^2+\left(\frac{8}{13}\right)^2\right)\right)S_{ABC}.$$

$$S_{CMJKN}=\left(1-\frac{1}{169}-\frac{64}{169}\right)30=\frac{240}{13}.$$