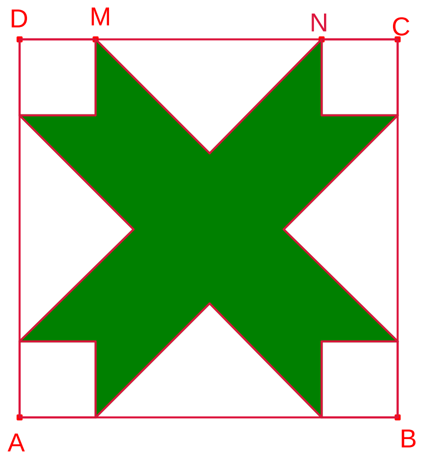
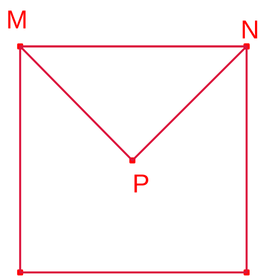
Problemes de Geometria per a l'ESO 89

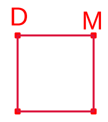
881.- En el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = 10$ s'han dibuixat quatre quadrats iguals i quatre triangles rectangles isòsceles iguals. La resta s'ha ombrejat.
Si $\overline{MN} = 6$ calculeu l'àrea de la zona ombrejada.



Solució:
Si $\overline{MN} = 6$, $\overline{AB} = 10$ i $\overline{DM} = \overline{NC}$. Aleshores:
$\overline{DM} = \overline{NC} = 2$.
L'àrea ombrejada és igual a l'àrea del quadrat ABCD menys l'àrea de 4 quadrats de costat $\overline{DM} = 2$, menys l'àrea d'un quadrat de costat $\overline{MN} = 6$.



$$S = \overline{AB}^2 - \left(4 \cdot \overline{DM}^2 + \overline{MN}^2\right) = 10^2 - \left(4 \cdot 2^2 + 6^2\right) = 48 .$$

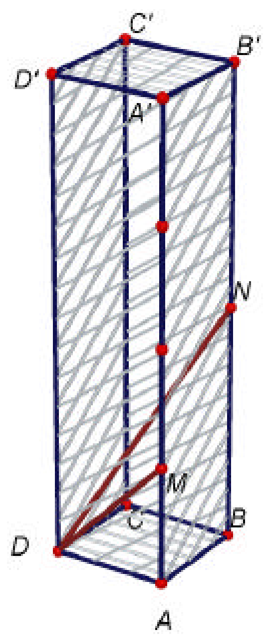


882.- Siga ABCDA'B'C'D' prisma quadrangular regular tal que l'altura és quatre vegades l'aresta de la base.

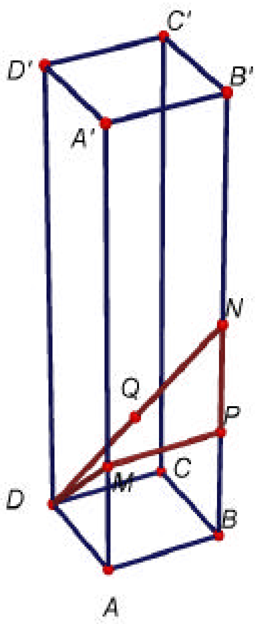
Siga M un punt de l'aresta lateral $\overline{AA'}$ tal que $\overline{AM} = \frac{1}{4}\overline{AA'}$.

Siga N un punt de l'aresta lateral $\overline{BB'}$ tal que $\overline{BN} = \frac{1}{2}\overline{BB'}$.

Calculeu la mesura de l'angle $\angle MDN$.



Solució:



Siga $\overline{AB} = a$ aresta de la base del prisma.

$\overline{AA'} = 4a$.

$\overline{AM} = a$, $\overline{BN} = 2a$.

Siga P el punt mig del segment $\overline{BN}$.

$\overline{PN} = a$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DAM}$:

$\overline{DM}^2 = 2a^2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DAB}$:

$\overline{BD}^2 = 2a^2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DBN}$:

$\overline{DN}^2 = 6a^2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MPN}$:

$\overline{MN}^2 = 2a^2$.

$\overset{\Delta}{DMN}$ és un triangle isòsceles $\overline{DM} = \overline{MN} = a\sqrt{2}$.

Siga Q el punt mig del segment $\overline{DN}$.

$\overline{DQ} = \frac{1}{2}$, $\quad \overline{DN} = \frac{\sqrt{6}}{2}a$.

Siga $\alpha = \angle MDN$. Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DQM}$.

$$\cos\alpha = \frac{\overline{DQ}}{\overline{DM}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \alpha = \arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = 30^o.$$

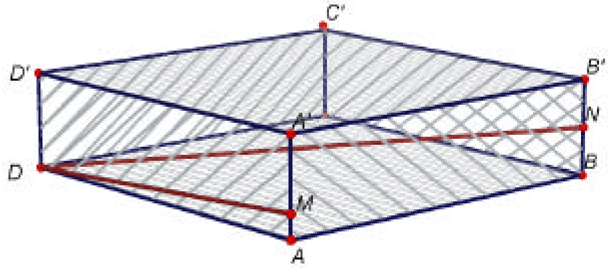
$\angle DNM = 30^o$, $\quad \angle DMN = 120^o$.

Problema:

Siga ABCDA'B'C'D' prisma quadrangular regular tal que l'aresta de la base és quatre vegades l'altura. Siga M un punt de l'aresta lateral $\overline{AA'}$ tal que $\overline{AM} = \frac{1}{4}\overline{AA'}$.

Siga N un punt de l'aresta lateral $\overline{BB'}$ tal que $\overline{BN} = \frac{1}{2}\overline{BB'}$.

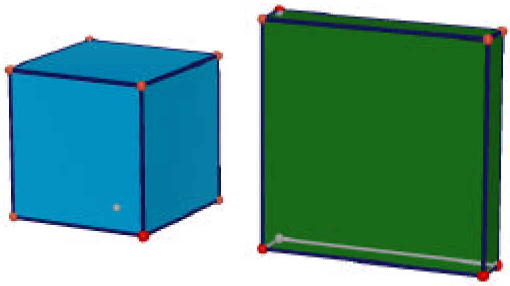
Calculeu la mesura de l'angle $\angle MDN$.



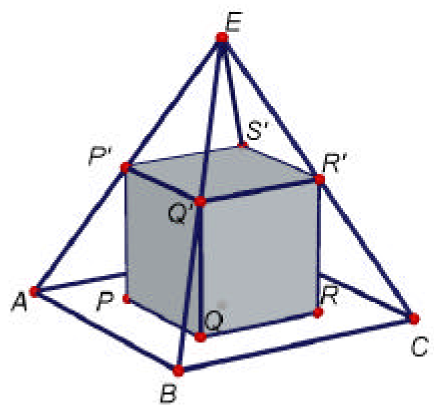
Solució: $\angle MDN = 45^o$.

883.- Un cub i un ortoedre tenen igual les àrees.
Les dimensions de l'ortoedre tenen proporció 1:6:6, i volum 562.5dm^3.
Calculeu el volum del cub.

Solució:
Siguen $x, 6x, 6x$ les dimensions de les arestes de l'ortoedre.
El volum de l'ortodedre és:
$V_o = x \cdot 6x \cdot 6x = 562.5$. Resolent l'equació:
$x = 2.5$.
L'àrea de ortoedre és:
$S_o = 2(6x^2 + 6x^2 + 36x^2) = 2(48x^2) = 600$.
Siga a l'aresta del cub.
El cub té la mateixa àrea que l'ortoedre:
$S_c = 6a^2 = 600$. Resolent l'equació:
$a = 10\text{dm}$.
El volum del cub és:
$V_c = a^3 = 10^3 = 1000\text{dm}^3 = 1\text{m}^3$.



884.- En una piràmide quadrangular regular està inscrit un cub tal que quatre vèrtexs estan en els punts migs de les arestes laterals i els altres quatre en la base de la piràmide.
Determineu la proporció entre els volums del cub i la piràmide.



Solució:
Siga la piràmide regular quadrangular ABCDE de base el quadrat ABCD.
Siga O el centre de la base ABCD.
Siga PQRSP'Q'R'S' d'aresta $\overline{PQ} = a$.
Siga M el centre de quadrat P'Q'R'S'.
$\overline{PR} = \overline{P'R'} = a\sqrt{2}$.
Els triangles $\overset{\Delta}{ACE}$, $P'\overset{\Delta}{R'}E$ són semblants i de raó 2:1.
Aleshores, $\overline{AC} = 2\overline{P'R'} = 2a\sqrt{2}$, $\overline{OE} = \overline{OM} = 2a$.

$$\overline{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AC} = 2a.$$

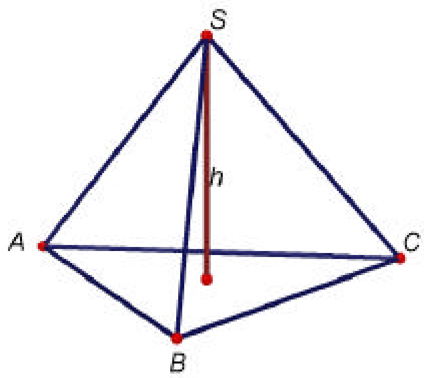
El volum de la piràmide ABCDE és:

$$V_P = \frac{1}{3}(2a)^2 2a = \frac{8}{3}a^3.$$

La proporció entre els volums del cub i la piràmide és:

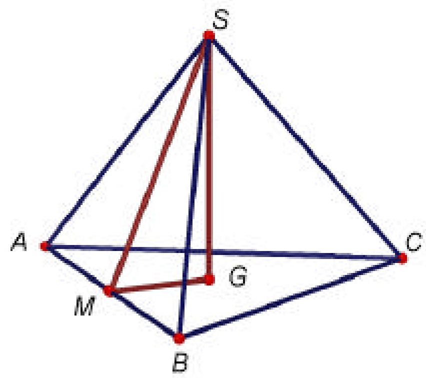
$$\frac{V_c}{V_p} = \frac{a^3}{\frac{8}{3}a^3} = \frac{3}{8}.$$

885.- Una piràmide regular trianglular té altura h i l'angle diedre entre una cara lateral i la base és α. Calculeu el seu volum.



Solució:

Siga la piràmide regular trianglular ABCS de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
Si la piràmide és regular el peu de l'altura sobre la base és el baricentre del triangle
Siga $\overline{GS} = h$.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.
L'angle diedre entre la cara lateral i la base és $\angle SMC = \alpha$.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MGS}$.

$$\overline{MG} = \frac{h}{tg\alpha}.$$

Aplicant la propietat del baricentre:

$$\overline{CM} = 3\overline{MG} = \frac{3h}{tg\alpha}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MBC}$:

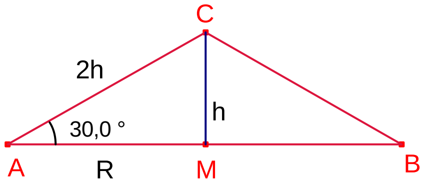
$$\overline{BC} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\overline{MC} = \frac{2\sqrt{3}}{tg\alpha}h.$$

El volum de la piràmide ABCS és:

$$V = \frac{1}{3}S_b \cdot h = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\overline{BC}^2 \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{tg^2\alpha}h^3.$$

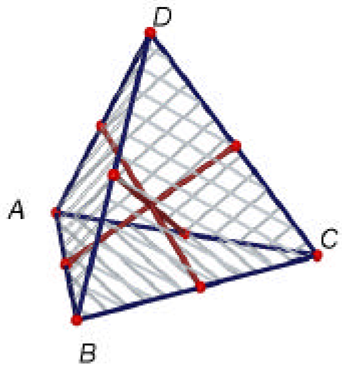
886.- L'angle màxim entre dues generatrius d'un con és 120º.
Proveu que l'àrea lateral d'aquest con és igual a l'àrea lateral d'un cilindre que té el mateix radi i altura que el con.
Gúsiev 779.

Solució:



L'angle de l'eix axial del con és $\angle ACB = 120^o$.
Siga R i h el radi i l'altura del con.
La generatriu és $g = \overline{AC} = 2h$.
L'àrea lateral del con de radi R i generatriu $g = 2h$ és:
$S = \pi Rg = 2\pi Rh$.
L'àrea lateral del cilindre de radi R i altura h és:
$S = 2\pi R \cdot h$.

887.- En un tetraedre els segments que uneixen els punts migs de les arestes oposades s'intersecten en un punt, a més a més, aquest punt és el punt mig dels tres segments.



Solució:

Siguen K i L els punts mig de les arestes oposades $\overline{AD}$ i $\overline{BC}$, respectivament.

Siguen M i N els punts mig de les arestes oposades $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, respectivament.

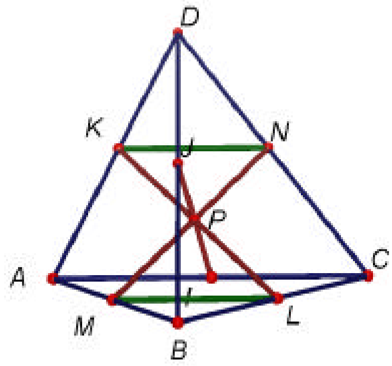
$\overline{KN}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ACD}$.

$\overline{ML}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ACB}$.
Aleshores, MLNK és un paral·lelogram.

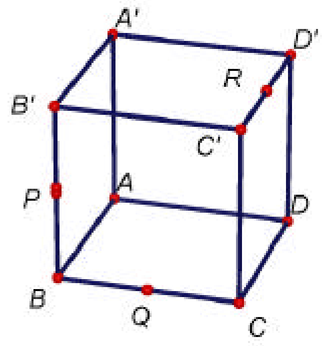
Les diagonals $\overline{KL}$, $\overline{MN}$ del paral·lelogram s'intersecten en el punt mig dels dos segments.

Anàlogament, MINJ és un paral·lelogram.

Per tant, Les diagonals $\overline{IJ}$, $\overline{MN}$ del paral·lelogram s'intersecten en el punt mig dels dos segments.

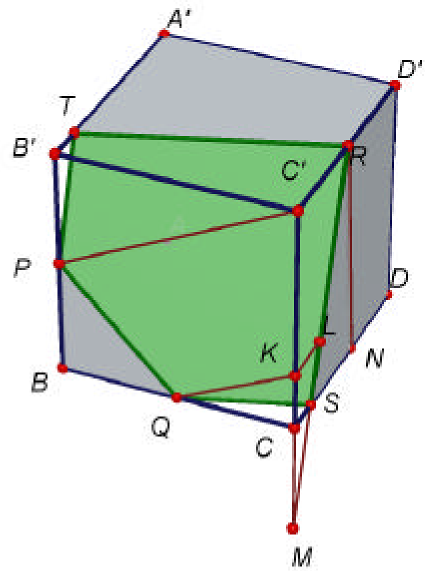


Aleshores, els segments que uneixen els punts migs de les arestes oposades s'intersecten en un punt, a més a més, aquest punt és el punt mig dels tres segments.



888.- Siga ABCDA'B'C'D' un cub d'aresta a.
Siga P el punt mig de l'aresta $\overline{BB'}$.
Siga Q el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.
Siga R el punt mig de l'aresta $\overline{C'D'}$.
Determineu el perímetre del polígon determinat per la secció del cub determinada pel plànol que passa pels punts P, Q, R.

Solució:



Siga K un punt de l'arresta $\overline{CC'}$ tal que $\overline{PC'}$ i $\overline{QK}$ siguen paral·lels.

$\overline{CK}=\frac{1}{2}\overline{PB'}=\frac{1}{4}a$.

Siga L un punt de la cara CDD'C' tal que $\overline{PR}$ i $\overline{QL}$ siguen paral·lels.

$\overline{KL}=\frac{1}{2}\overline{C'R}=\frac{1}{4}a$.

El punt L pertany a la secció determinada pel plànol que passa pels punts P, Q, R.

La recta RL talla l'aresta $\overline{CD}$ en el punt S que també pertany a la secció.

Aplicant el teorema de Tales als triangles semblants $\overset{\Delta}{MC'R}$, $\overset{\Delta}{MKL}$, $\overset{\Delta}{MCS}$:

$\overline{CS}=\frac{1}{6}a$.

Anàlogament, siga T el punt de la secció de l'aresta $\overline{A'B'}$:

$\overline{B'T}=\frac{1}{6}a$.

La secció determinada pel plànol que passa pels punts P, Q, R és el pentàgon PQSRT.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PBQ}$:

$\overline{PQ}=\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{QCS}$:

$\overline{QS}=\overline{PT}=\frac{\sqrt{10}}{6}a$.

Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{CD}$.

$\overline{SN}=\frac{1}{3}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{SNR}$:

$\overline{RS}=\overline{RT}=\frac{\sqrt{10}}{3}a$.

El perímetre del pentàgon PQSRT és:

$p=\overline{PQ}+2\overline{QS}+2\overline{RT}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{10}\right)a$.

889.- Siga ABCDE la piràmide regular quadrangular que té totes les arestes iguals a a.

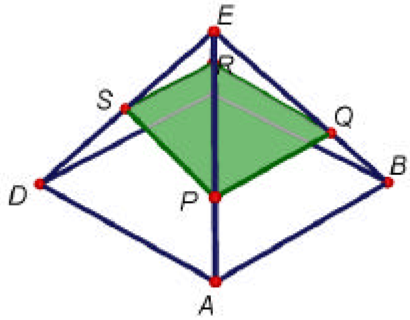
Siga P de l'aresta $\overline{AE}$ tal que $\overline{AP}=\frac{1}{3}\overline{AE}$.

Siga Q de l'aresta $\overline{AE}$ tal que $\overline{BQ}=\frac{1}{3}\overline{BE}$.

Siga R el punt mig de l'aresta $\overline{CE}$.

Siga S el punt mig de l'aresta $\overline{DE}$.

Determineu el perímetre i l'àrea del quadrilàter PQRS.



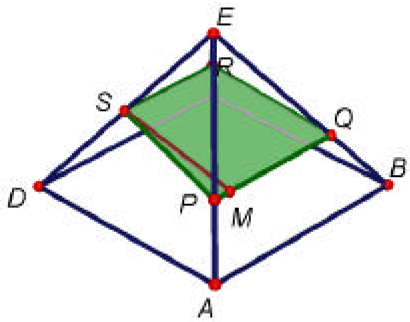
Solució:

Les cares laterals de la piràmide són triangles equilàters.

$\overline{PE}=\overline{QE}=\overline{PQ}=\frac{2}{3}a$.

$\overline{RS}=\overline{SE}=\overline{SQ}=\frac{1}{2}a$.

Considerem el triangle $\overset{\Delta}{SPE}$, $E=60^o$, $\overline{SE}=\frac{1}{2}a$, $\overline{PE}=\frac{2}{3}a$.



Aplicant el teorema del cosinus:

$$\overline{PS}^2=\left(\frac{1}{2}a\right)^2+\left(\frac{2}{3}a\right)^2-2\frac{1}{2}a\frac{2}{3}a\cdot\cos 60^o$$

$$\overline{PS}=\overline{QR}=\frac{\sqrt{13}}{6}a.$$

El perímetre del trapezi PQRS és:

$$p=\overline{PQ}+\overline{RS}+2\overline{PS}=\frac{2}{3}a+\frac{1}{2}a+2\frac{\sqrt{13}}{6}a=\left(\frac{7+2\sqrt{13}}{6}\right)a.$$

Siga M la projecció de S sobre $\overline{PQ}$.

$$\overline{PM}=\frac{\overline{PQ}-\overline{RS}}{2}=\frac{1}{12}a.$$

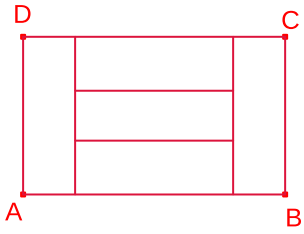
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PMS}$:

$$\overline{SM}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{13}}{6}a\right)^2-\left(\frac{1}{12}a\right)^2}=\frac{\sqrt{51}}{12}a.$$

L'àrea del trapezi PQRS és:

$$S_{PQRS}=\frac{\overline{PQ}+\overline{RS}}{2}\overline{SM}=\frac{7\sqrt{51}}{144}a^2.$$

890.- El rectangle ABCD està dividit en 5 rectangles iguals com mostra la figura.
El perímetre de cadascun dels rectangles iguals és de 48cm.
Calculeu l'àrea del rectangle ABCD.

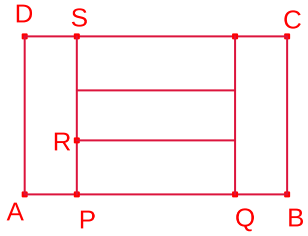


Solució:

Siga $\overline{AP} = \overline{BQ} = \overline{PR} = x$.

$\overline{AD} = \overline{PQ} = 3x$.

$\overline{AB} = 5x$.



El perímetre del rectangle APSD és 48cm.

$2x + 2 \cdot 3x = 48$.

$8x = 48$.

$x = 6$.

L'àrea del triangle ABCD és:

$S_{ABCD} = \overline{AB} \cdot \overline{AD} = 5x \cdot 3x = 15x^2 = 15 \cdot 6^2 = 540cm^2$.