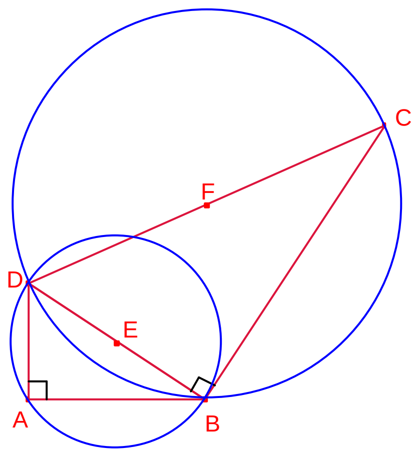
Problemes de Geometria per a l'ESO 9

81.- En un quadrilàter ABCD, $\angle DAB = 90^{o}$, $\angle DBC = 90^{o}$, $\overline{BD} = a$, $\overline{CD} = b$. Calculeu la distància entre els centres de la circumferència que passa pe A, B, D i la circumferència que passa per B, C, D.
Shariguin I 53.



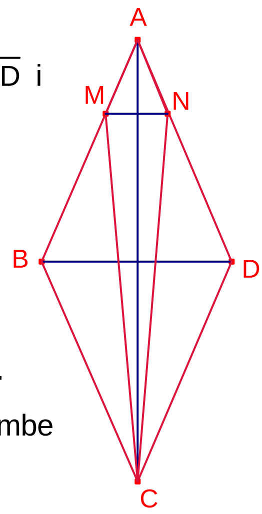
Solució:
Siga E el centre de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$, per ser el triangle rectangle el centre és el punt mig de la hipotenusa $\overline{BD}$.
Siga F el centre de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{BCD}$, per ser el triangle rectangle el centre és el punt mig de la hipotenusa $\overline{CD}$.

Notem que $\overline{EF}$ és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{BCD}$, aleshores, $\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{BC}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCD}$:
$\overline{BC} = \sqrt{b^2 - a^2}$.

Aleshores, $\overline{EF} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - a^2}$.

82.- En els costats $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ d'un rombe ABCD s'escullen dos punts M i N de forma que les rectes CM, CN divideixen el rombe en tres parts iguals. Determineu $\overline{MN}$ si $\overline{BD} = d$.
Shariguin I54



Solució:

Els triangles $\overset{\Delta}{CBM}$, $\overset{\Delta}{CDN}$ tenen la mateixa àrea i la mateixa base $\overline{CB} = \overline{CD}$ i $\angle CBM = \angle CDN$, aleshores són iguals.
Per tant, $\overline{BM} = \overline{CN}$, aleshores, $\overline{MN}$ és paral·lel a $\overline{BD}$.

Siga $\overline{AC} = 2x$.

L'àrea del rombe ABCD és $S_{ABCD} = \frac{d \cdot 2x}{2} = dx$.

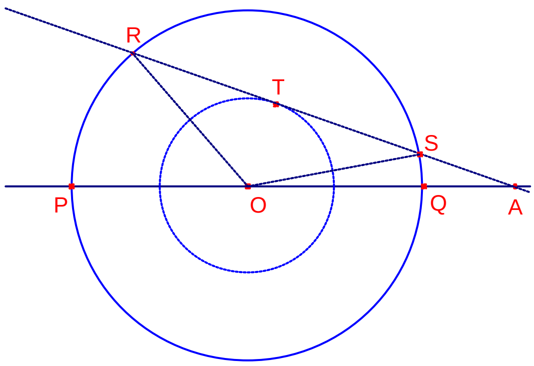
L'àrea del quadrilàter AMCN és: $S_{AMCN} = S_{AMN} + S_{MNC} = \frac{\overline{MN} \cdot 2x}{2} = x \cdot \overline{MN}$.

Per hipòtesi l'àrea del quadrilàter AMCN és la tercera part de l'àrea del rombe ABCD.

$x \cdot \overline{MN} = \frac{1}{3} dx$.

Aleshores, $\overline{MN} = \frac{1}{3} d$.

83.- Fora d'una circumferència de radi r s'agafa un punt A, des d'aquest punt estan traçades dues secants, una d'elles passa pel centre, mentre que l'altra passa a una distància $\frac{r}{2}$ del centre. Determineu l'àrea de la part del cercle disposada entre aquestes secants.
Shariguin I52.



Solució:
Siga O el centre de la circumferència de radi r.
La recta AO talla la circumferència en els punts P, Q.
L'altra recta secant talla la circumferència en els punts R, S.
$\overline{OR} = \overline{OS} = r$

Siga T la projecció de O sobre la recta AR, $\overline{OT} = \frac{r}{2}$

Notem que els triangles rectangles $\overset{\Delta}{OTR}$, $\overset{\Delta}{OTS}$ són iguals i a més a més

$\angle TOS = \arccos\frac{\overline{OT}}{\overline{OS}} = 60^\circ$.

Per tant, $\angle ROS = 120^\circ$

Siga $\alpha = \angle POR$, $\beta = \angle SOQ$.

Aleshores, $\alpha + \beta = 60^\circ$.

L'àrea de la part del cercle disposada entre aquestes secants és igual a l'àrea dels sectors POR i SOQ més l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ROS}$.
L'àrea del sector POR és:

$\pi r^2 \frac{\alpha}{360^\circ}$.

L'àrea del sector SOQ és:

$\pi r^2 \frac{\beta}{360^\circ}$.

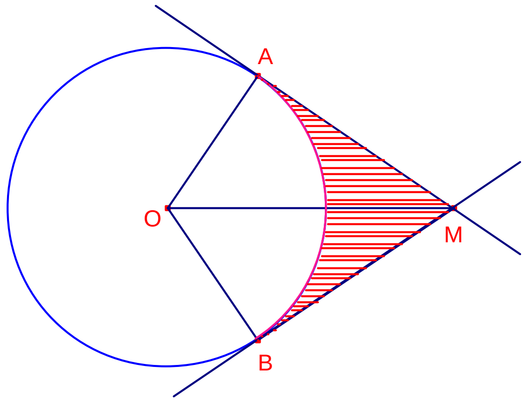
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ROS}$ és igual a l'àrea d'un triangle equilàter de costat r:

$\frac{r^2\sqrt{3}}{4}$.

Aleshores l'àrea que cerquem és:

$$S = \pi r^2 \frac{\alpha}{360^\circ} + \pi r^2 \frac{\beta}{360^\circ} + r^2\frac{\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) r^2.$$

84.- Des d'un punt M exterior a una circumferència de radi R s'ha traçat dues tangents MA, MB que formen un angle α. Determineu l'àrea afitada per les tangents i el menor arc de la circumferència.
Shariguin I64.



Solució:
Siga O el centre de la circumferència de radi R.
Siga $\alpha = \angle AMB$ mesurat en radiants.

El triangle $\overset{\Delta}{OAM}$ és rectangle aplicant raons trigonomètriques:

$$\overline{MA} = \frac{R}{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAM}$ és:

$$S_{OAM} = \frac{\overline{OA}\cdot\overline{MA}}{2} = \frac{R\cdot\frac{R}{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}}{2} = \frac{1}{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}R^2.$$

$\angle AOB = \pi - \alpha$.
L'àrea del sector circular AOB és:

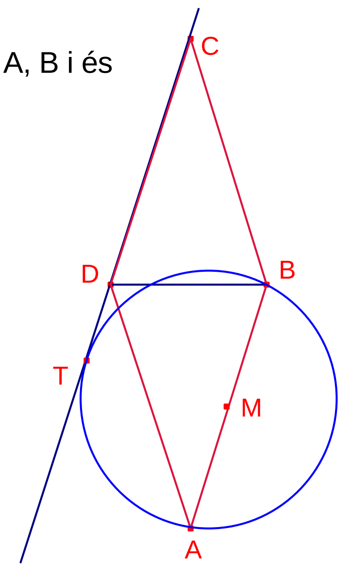
$$S_{\sec\,tor} = \pi R^2\frac{\pi-\alpha}{2\pi} = \frac{\pi-\alpha}{2}R^2.$$

L'àrea afitada per les tangents i el menor arc de la circumferència és:

$$S = 2\cdot S_{OAM} - S_{\sec\,tor} = \left(\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}} - \frac{\pi-\alpha}{2}\right)R^2.$$

85.- Siga el rombe de costat a i angle agut α. Determineu el radi de la circumferència que passa per dos vèrtexs veïns i és tangent al costat oposat (o a la seua prolongació).
Shariguin I 66

Solució:
Siga el rombe ABCD d'angle agut $\alpha = BAD$.
Siga la circumferència de radi desconegut R que passa pels punts A, B i és tangent a la recta CD en el punt T.



Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.
$\overline{TM}$ és igual a l'altura del rombe ABCD.
Per tant, $\overline{TM} = a \cdot \sin\alpha$ (1)
Siga $\beta = \angle TAB$.

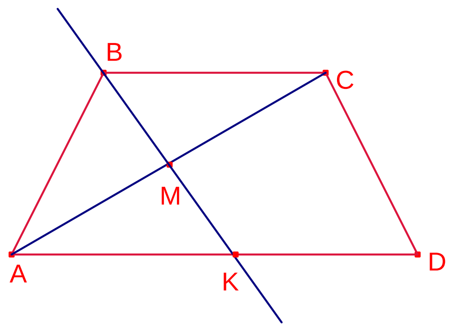
El triangle $\overset{\Delta}{TAB}$ és isòsceles, aleshores:
$\angle ATB = 180^{o} - 2\beta$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMT}$:
$$\overline{TM} = \frac{a}{2}\mathrm{tg}\beta \qquad (2)$$
De les expressions (1) i (2)
$\mathrm{tg}\beta = 2 \cdot \sin\alpha$.

Aleshores, $\sin\beta = \dfrac{2 \cdot \sin\alpha}{\sqrt{1+4 \cdot \sin^2\alpha}}$, $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1+4 \cdot \sin^2\alpha}}$ (3)

Aplicant el teorema del sinus al triangle $\overset{\Delta}{TAB}$:
$\dfrac{a}{\sin(180^{o} - 2\beta)} = 2R$. Aïllant R:
$$R = \frac{a}{2}\frac{1}{\sin 2\beta} = \frac{a}{2}\frac{1}{2\sin\beta \cdot \cos\beta} \qquad (4)$$
Substituint les expressions (3) en l'expressió (4)
$$R = \frac{a}{2}\frac{1}{2\sin\beta \cdot \cos\beta} = \frac{a}{2}\frac{1}{2\dfrac{2\sin\alpha}{1+4\sin^2\alpha}} = \frac{1+4\sin^2\alpha}{8 \cdot \sin\alpha}a.$$

86.- Els costats paral·lels d'un trapezi isòsceles ABCD mesuren $a = \overline{AD}$, $b = \overline{BC}$ i els no paral·lels mesuren d. Una recta que passa per B talla la diagonal $\overline{AC}$ pel punt mig i el costat $\overline{AD}$ en el punt K. Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BDK}$.
Shariguin I82



Solució:
Suposem $a \geq b$. Siga M el punt mig de la diagonal $\overline{AC}$.
Siga $\overline{BH}$ altura del trapezi ABCD.
$\overline{AH} = \dfrac{a-b}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AHB}$:
$\overline{BH} = \sqrt{d^2 - \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2}$.

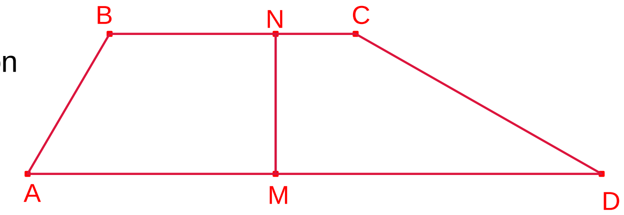
Els triangles $\overset{\Delta}{BCM}$, $\overset{\Delta}{KAM}$ són iguals ja que tenen un costat igual $\overline{AM} = \overline{CM}$ i els angles constiugus al costat iguals.
Aleshores, $\overline{AK} = b$.
Per tant, $\overline{KD} = a - b$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BDK}$ és:
$$S_{BDK} = \frac{\overline{KD} \cdot \overline{BH}}{2} = \frac{(a-b)\sqrt{4d^2 - (a-b)^2}}{4}.$$

Si $a \leq b$.
$$S_{BDK} = \frac{(b-a)\sqrt{4d^2 - (a-b)^2}}{4}.$$

Aleshores, $S_{BDK} = \dfrac{|a-b|\sqrt{4d^2 - (a-b)^2}}{4}$.

87.- Els angles A i D del trapezi ABCD contigus a la base $\overline{AD}$ són 60º i 30º, respectivament. Siga el punt N que pertany a la base $\overline{BC}$ tal que $\overline{BN}:\overline{NC}=2:1$. Siga el punt M sobre la base $\overline{AD}$ tal que la recta MN és perpendicular a les dues bases paral·leles i que divideix l'àrea en dues parts iguals. Determineu $\overline{AM}:\overline{MD}$.
Shariguin I101



Solució:
Com que les àrees dels trapezis AMNB, MDCN són iguals:

$$\frac{\overline{AM}+\overline{BN}}{2}\overline{MN}=\frac{\overline{MD}+\overline{CN}}{2}\overline{MN}$$. Simplificant:

$$\overline{MD}=\overline{AM}+\overline{CN} \qquad (1)$$

Siga P la projecció de B sobre la base $\overline{AD}$.
Siga Q la projecció de C sobre la base $\overline{AD}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APB}$:

$$\overline{AP}=\overline{MN}\cdot \text{ctg}60^{o}=\overline{MN}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CQD}$:

$$\overline{DQ}=\overline{MN}\cdot \text{ctg}30^{o}=\overline{MN}\cdot\sqrt{3}.$$

$$\overline{AM}=\overline{AP}+\overline{BN}=\overline{AP}+2\cdot\overline{CN}.$$

$$\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{3}\overline{MN}+2\cdot\overline{CN}.$$

$$3\overline{AM}=\sqrt{3}\cdot\overline{MN}+6\cdot\overline{CN} \qquad (2)$$

$$\overline{MD}=\overline{CN}+\overline{DQ}.$$

$$\overline{MD}=\overline{CN}+\sqrt{3}\cdot\overline{MN} \qquad (3)$$

Restant les expressions (2) (3):

$$5\cdot\overline{CN}=3\cdot\overline{AM}-\overline{MD}$$

$$\overline{CN}=\frac{1}{5}\left(3\cdot\overline{AM}-\overline{MD}\right) \qquad (4)$$

Substituint l'expressió (4) en l'expressió (1):

$$\overline{MD}=\overline{AM}+\frac{1}{5}\left(3\cdot\overline{AM}-\overline{MD}\right)$$

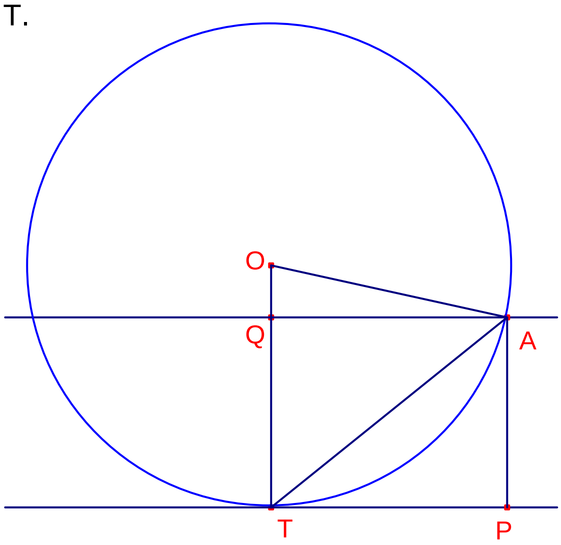
$$5\cdot\overline{MD}=5\overline{AM}+3\overline{AM}-\overline{MD}.$$

$$8\cdot\overline{AM}=6\cdot\overline{MD}.$$

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{MD}}=\frac{3}{4}.$$

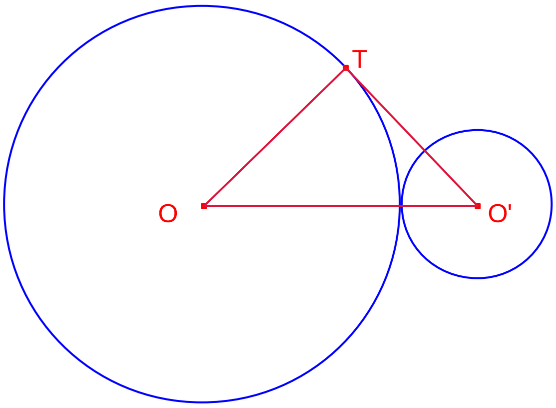
88.- Calculeu el radi d'una circumferència que és tangent a una recta i passa per un punt que dista 5m de la recta i 8m del punt de tangència.
García Ardura 441.

Solució:
Siga O el centre de la circumferència. Siga T el punt de tangència i A un punt de la circumferència que dista 5m de la recta i 8m del punt T.



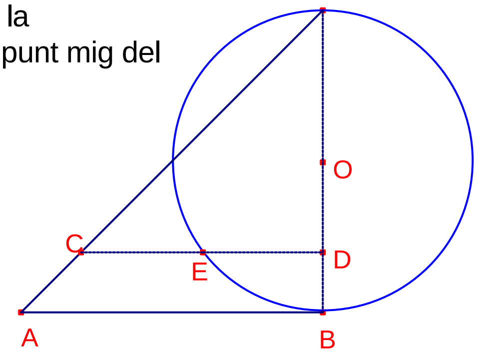
Siga $r = \overline{OT}$ radi de la circumferència.
Siga P el punt projecció de A sobre la recta.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ATP}$:
$\overline{TP} = \sqrt{8^2 - 5^2} = \sqrt{39}$.
Siga Q la projecció de A sobre la recta OT.
$\overline{QA} = \overline{TP} = \sqrt{39}$. $\overline{OQ} = r - 5$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OQA}$:
$r^2 = \left(\sqrt{39}\right)^2 + (r-5)^2$.
Resolent l'equació:
$r = \frac{32}{5}m$.

89.- Calculeu el radi d'una circumferència de centre O, que és tangent a una circumferència de centre O' i radi 2m, sabent que la tangent traçada a la primera circumferència des del punt O' mesura 5m.
García Ardura 442.

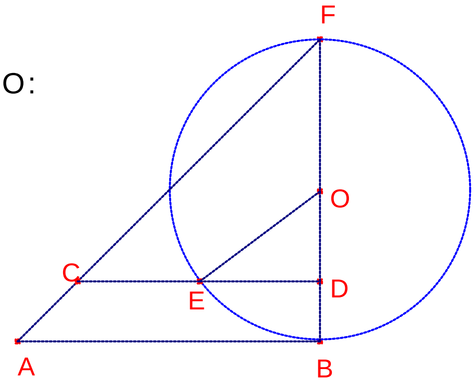


Solució:
Amb aquestes condicions les dues circumferències són tangents exteriors.
Siga T el punt de tangència. $\overline{O'T} = 5$.
Siga $r = \overline{OT}$ radi de la primera circumferència.
$\overline{OO'} = r + 2$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTO'}$:
$(r+2)^2 = r^2 + 5^2$. Resolent l'equació:
$r = \frac{21}{4}m$.

90.- En la figura calculeu $\overline{OD}$, essent $\overline{AB}=4$ tangent a la circumferència de centre O i igual al seu diàmetre i E el punt mig del segment $\overline{CD}$, ($\overline{CD}$ paral·lel a $\overline{AB}$).
García Ardura 88.

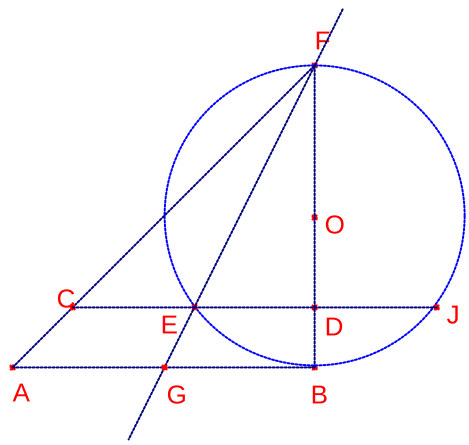


Solució 1:
Siga $x=\overline{CE}=\overline{ED}$.
Siga $\overline{BF}$ diàmetre de la circumferència.
El triangle $\overset{\Delta}{ABF}$ és rectangle i isòsceles.
$\overline{CD}=\overline{DF}=2x$.
Aleshores, $\overline{OD}=\overline{DF}-\overline{OF}=2x-2$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EDO}$:
$2^2=x^2+(2x-2)^2$.
Resolent l'equació:
$x=\frac{8}{5}$.
Per tant, $\overline{OD}=2x-2=\frac{6}{5}$.

Solució 2:



Siga $\overline{BF}$ diàmetre de la circumferència.
Per ser E el punt mig de $\overline{CD}$, G és el punt mig de $\overline{AB}$.
Els triangles $\overset{\Delta}{FGB}$, $\overset{\Delta}{FED}$. Aleshores, $\frac{\overline{ED}}{\overline{DF}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.
Siga $x=\overline{OD}$.
$\overline{DF}=2+x$. $\overline{BD}=2-x$.
$\overline{DE}=\frac{1}{2}(2+x)$.
Aplicant la potència de D respecte de la circumferència:
$\overline{DE}\cdot\overline{DJ}=\overline{BD}\cdot\overline{DF}$.
$\overline{DE}^2=\overline{BD}\cdot\overline{DF}$.
$\left(\frac{2+x}{2}\right)^2=(2-x)(2+x)$.
Resolent l'equació:
$x=\frac{6}{5}$.