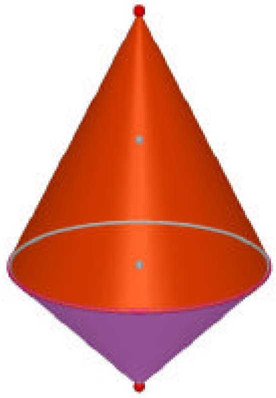
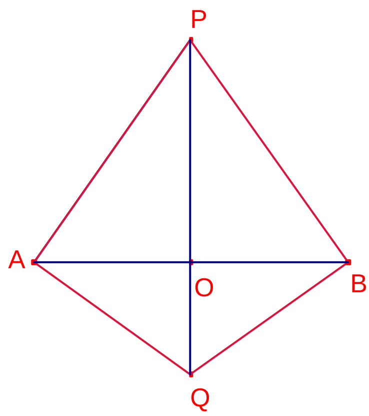
Problemes de Geometria per a l'ESO 90

891.- Dos cons tenen base comuna.
En la secció axial comuna la generatriu d'un dels cons és perpendicular a l'altra.
El volum d'un con es dues vegades menor que el volum de l'altre.
Determineu l'angle que forma la generatriu del con major i la base del con.
Gúsiev 872.



Solució.
Dos cons que tenen la mateixa base els volum són proporcionals a les altures.
Siga h l'altura del con menor.
L'altura del con major és 2h.
La secció axial dels dos cons és el quadrilàter APBQ, $AB = 90^o$.
On $\overline{AB} = 2r$ és el diàmetre dels dos cons.
Siga O el centre de la circumferència base.
$\overline{OP} = 2h$, $\overline{OQ} = h$.



Els triangles $\overset{\Delta}{POB}$, $\overset{\Delta}{BOQ}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{2h}{r} = \frac{r}{x}.$$

$$r = h\sqrt{2}.$$

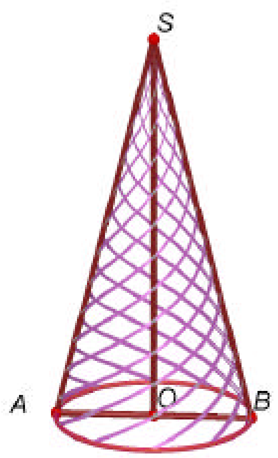
Siga $\alpha = \angle ABP$ angle que forma la generatriu del con major i la base.

$$\text{tg}\alpha = \frac{\overline{OP}}{\overline{OB}} = \frac{2h}{h\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

$$\alpha = \text{arctg}\sqrt{2}.$$

892.- L'àrea lateral d'un con és un quart de cercle enrotllat en forma de superfície cònica,
Determineu la raó entre l'àrea total de la superfície del con i l'àrea de la superfície de la secció axial del con.
Gúsiev 780.

Solució:



Siga $\overset{\Delta}{ABS}$ la secció axial del con.
Siga O el centre del cercle base.
Siga $\overline{OA} = R$ radi del con.
Siga $\overline{AS} = g$ generatriu del con.
La generatriu g és el radi del quart de cercle.
La longitud del quart de circumferència és igual a la longitud de la circumferència base del con.

$$2\pi R = \frac{1}{4}(2\pi g).$$

Aleshores, $R = \frac{g}{4}$.

Siga $\overline{OS} = h$ altura del con.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOS}$:

$$h = \sqrt{g^2 - R^2} = \frac{1}{4}g\sqrt{15}.$$

L'àrea de la secció axial $\overset{\Delta}{ABS}$ del con és:

$$S_{S.axial} = \frac{1}{2}2Rh = \frac{g^2}{16}\sqrt{15}.$$

L'àrea total del con és:

$$S_{con} = \pi R^2 + \pi Rg = \frac{5\pi}{16}g^2.$$

La raó entre l'àrea total de la superfície del con i l'àrea de la superfície de la secció axial del con és:

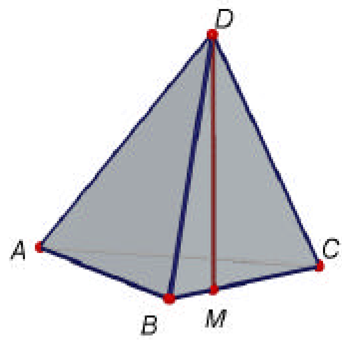
$$\frac{S_{con}}{S_{S.axial}} = \frac{\frac{5\pi}{16}g^2}{\frac{g^2}{16}\sqrt{15}} = \frac{\pi\sqrt{15}}{3} \approx 4.06.$$

893.- En una piràmide triangular, dues de les cares són perpendiculars i l'aresta comuna és b i les àrees respectives, P i Q. Calculeu el volum de la piràmide.
Gúsiev 818.

Solució:

Siga la piràmide triangular ABCD tal que les cares $\overset{\Delta}{ABC}$ i $\overset{\Delta}{BCD}$ són perpendiculars.
Siga $\overline{BC} = b$, $S_{ABC} = P$, $S_{BCD} = Q$.

Siga $\overline{DM} = h$ altura de la cara $\overset{\Delta}{BCD}$ i de la piràmide.



$Q = \frac{1}{2}bh$. Aleshores:

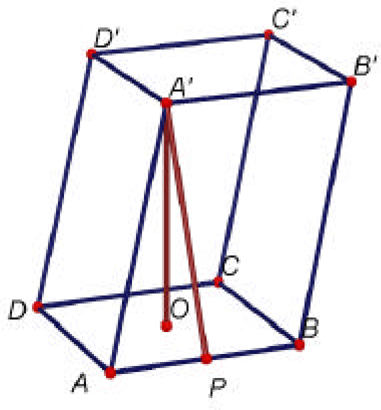
$h = \frac{2Q}{b}$.

El volum de la piràmide és:

$V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3}P \cdot \frac{2Q}{b} = \frac{2}{3}\frac{PQ}{b}$.

894.- La base d'un paral·lelepípede, l'aresta lateral del qual és b, és un quadrat de costat a.
Un dels vèrtexs de la base superior és equidistant dels vèrtexs de la base inferior.
Determineu l'àrea total del paral·lelepípede.
Gúsiev 797.

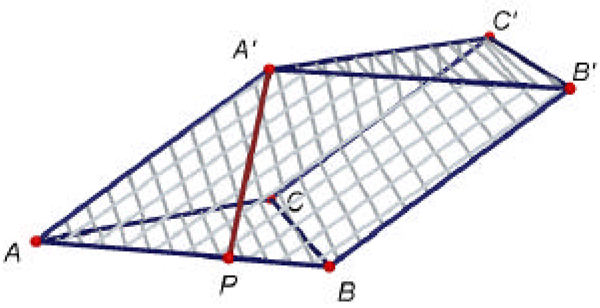
Solució:
Siga el paral·lelepípede ABCDA'B'C'D' de base el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = a$.
$\overline{AA'} = b$.
Siga A' el vèrtex de la base superior que equidista dels vèrtexs A, B, C, D.
A' pertany a la recta perpendicular a la base ABCD que passa pel centre O.
Siga P la projecció de A' sobre l'aresta $\overline{AB}$.
P és el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{APA'}$:



$\overline{A'P}^2 = b^2 - \frac{1}{4}a^2$, altura de la cara ABB'A'.
La superfície total del paral·lelepípede és:
$$S = 2 \cdot S_{ABCD} + 4 \cdot S_{ABB'A'} = 2a^2 + 4a\sqrt{b^2 - \frac{1}{4}a^2}\ .$$

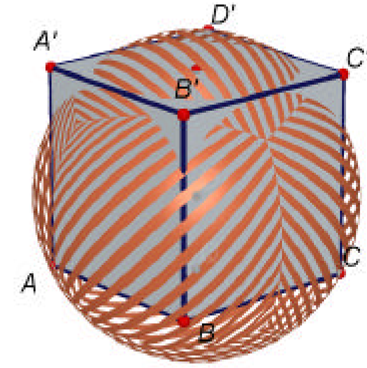
895.- La base d'un prisma és un triangle equilàter de costat a.
Cadascuna de les arestes laterals mesura b.
L'angle entre una de les arestes laterals i els costats de la base adjacents a aquesta, és igual a 45º.
Determineu l'àrea lateral del prisma.
Gúsiev 798.

Solució:
Siga el prisma ABCA'B'C'de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = a$.
$\overline{AA'} = b$.
Siga el vèrtex A' tal que $\angle A'AB = \angle A'AC = 45^o$
A' pertany al plànol mediador del segment $\overline{BC}$.
BB'C'C és un rectangle.
Siga P la projecció de A' sobre l'aresta $\overline{AB}$.
$\overset{\Delta}{APA'}$ és un triangle rectangle i isòsceles:
$\overline{A'P} = \frac{\sqrt{2}}{2}b$.



L'àrea lateral del prisma és:
$$S_L = 2 \cdot S_{ABB'A'} + S_{BB'C'C} = 2\left(a\frac{\sqrt{2}}{2}b\right) + ab = \left(\sqrt{2}+1\right)ab.$$

896.- Una esfera passa pels vèrtexs de la cara inferior d’un cub i és tangent a les arestes de la cara superior.
Determineu la proporció entre l’aresta del cub i el radi de l’esfera.
Gúsiev 885

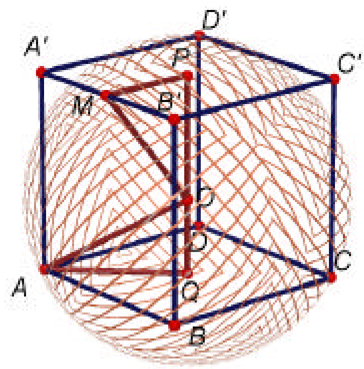


Solució:

Siga el cub ABCDA’B’C’D’ d’aresta $\overline{AB} = a$
Siga P el centre de la cara A’B’C’D’.
Siga Q el centre de la cara ABCD.
El centre de l’esfera pertany a la recta PQ.
Siga M el punt mig de l’aresta $\overline{A'B'}$, punt de tangència de l’esfera i l’aresta.
Siga $\overline{OA} = \overline{OM} = r$ el radi de l’esfera.

$\overline{AQ} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, $\overline{PM} = \frac{1}{2}a$.

Siga $\overline{OQ} = x$, $OP = a - x$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OQA}$:

$$r^2 = x^2 + \frac{1}{2}a^2.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPM}$:

$$r^2 = (a-x)^2 + \frac{1}{4}a^2.$$

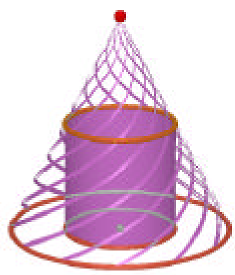
Resolent el sistema format per les dues expressions:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{8}a \\ r = \frac{\sqrt{41}}{8}a \end{cases}.$$

La proporció entre l’aresta i el radi de l’esfera és:

$$\frac{a}{r} = \frac{8}{\sqrt{41}} = \frac{8\sqrt{41}}{41} \approx 1.2494.$$

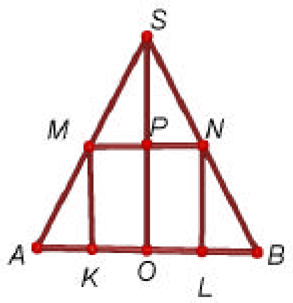
897.- Un con té inscrit un cilindre tal que l'altura del cilindre és igual a radi de la base del con i la raó entre les àrees de la superfície total del cilindre i la base del con és 3:2.
Calculeu la raó entre els volums del cilindre i el con.



Solució:

Siga el con de centre de la base O i de diàmetre de la base $\overline{AB} = 2R$.
Siga S el vèrtex del con.
La secció ABS del con forma la secció KLNM del cilindre tal que l'altura és $\overline{KM} = R$.
Siga $\overline{OK} = r$ radi del cilindre.
La raó entre les àrees de la superfície total del cilindre i la base del con és 3:2, aleshores:

$\frac{S_{T.cilindre}}{S_{baseCon}} = \frac{2\pi r^2 + 2\pi rR}{\pi R^2} = \frac{3}{2}$. Simplificant:



$4r^2 + 4Rr - 3R^2 = 0$. Resolent l'equació en la incògnita r:

$r = \frac{1}{2}R$.

$\overline{LB} = R - r = \frac{1}{2}R$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BOS}$, $\overset{\Delta}{BLN}$ són semblants i la raó 2:1.
Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{SO} = 2R$.

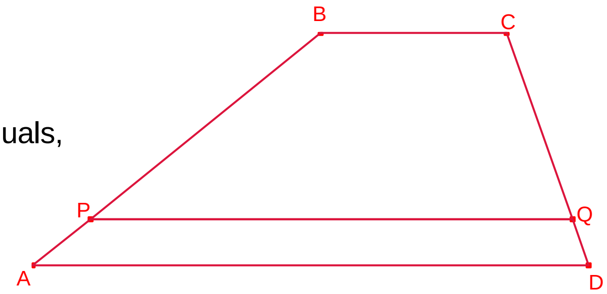
La proporció entre els volums del cilindre i el con és:

$$\frac{V_{cilindre}}{V_{con}} = \frac{\pi r^2 \overline{KM}}{\frac{1}{3}\pi R^2 \overline{SO}} = \frac{\pi\left(\frac{1}{2}R\right)^2 R}{\frac{1}{3}\pi R^2 2R} = \frac{3}{8}.$$

898.- Siga ABCD un trapezi de base $\overline{AD}=9$, $\overline{BC}=3$ i els costats no paral·lels $\overline{AB}=6$ i $\overline{CD}=4$.

Siguen P en el costat $\overline{AB}$ i Q en el costat $\overline{CD}$ tal que $\overline{PQ}$ i $\overline{AD}$ són paral·lels i a més a més els trapezis APQD i PBCQ tenen els perímetres iguals. Calculeu les mesures dels segments $\overline{AP}$ i $\overline{DQ}$.

Olimpiada Argentina intercolegial 2013. Nivell 3.



Solució:

Siguen $\overline{PQ}=x$, $\overline{AP}=y$ i $\overline{DQ}=z$.

Els perímetres dels trapezis APQD i PBCQ són iguals, aleshores:

$x+y+z+9=x+6-y+4-z+3$.

Simplificant:

$y+z=2$ (1)

$\overline{BC}$, $\overline{PQ}$ i $\overline{AD}$ són paral·lels. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{DQ}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}.$$

$$\frac{y}{z}=\frac{6}{4} \qquad (2)$$

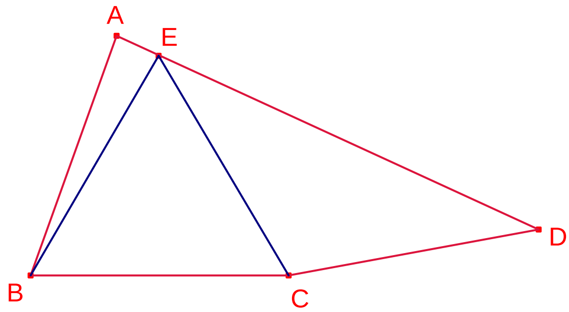
considerem el sistema format per les expressions (1) (2):

$\begin{cases} y+z=2 \\ \dfrac{y}{z}=\dfrac{6}{4} \end{cases}$. Resolent el sistema:

$$\begin{cases} y=\overline{AP}=\dfrac{6}{5} \\ z=\overline{DQ}=\dfrac{4}{5} \end{cases}.$$

899.- Siga el quadrilàter ABCD tal que $\overline{BC} = \overline{CD}$, $\angle ABC = 70º$ i $\angle BCD = 170º$.
Siga E del costat $\overline{AD}$ tal que $\angle ABE = 10º$ i $\overline{CE} = \overline{CD}$.
Calculeu les mesures dels angles $\angle BAD$ i $\angle ADC$
Olimpiada Argentina intercolegial 2013. Nivell 1.

Solució:



$\angle EBC = \angle ABC - \angle ABE = 60º$.
$\overline{CE} = \overline{BC}$.
Aleshores, $\angle EBC = \angle BEC = 60º$.
Per tant, el triangle $\overset{\Delta}{BCE}$ és equilàter.
$\angle ECD = \angle BCD - \angle BCE = 170º - 60º = 110º$.
El triangle $\overset{\Delta}{ECD}$ és isòsceles, aleshores:
$$\angle CDE = \angle CED = \frac{180º - \angle ECD}{2} = 35º.$$
Aleshores, $\angle ADC = 35º$.

$\angle BEA = 180º - (\angle CED + \angle BEC) = 180º - (35º + 60º) = 85º$.
$\angle BAE = 180º - (\angle ABE + \angle BEA) = 180º - (10º + 85º) = 85º$.
Aleshores, $\angle BAD = 85º$.

900.- Siga el quadrilàter ABCD

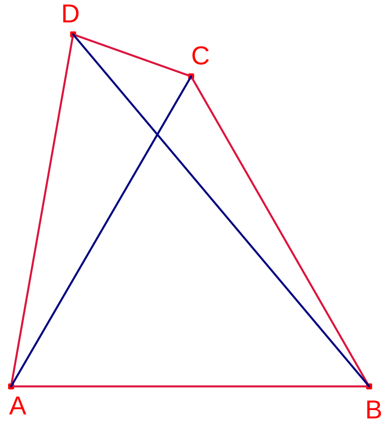
$\angle CAB = 60º$, $\angle CAD = 20º$, $\angle ABD = 50º$ i $\angle DBC = 10$

Calculeu les mesures de l'angle $\angle ACD$

Olimpiada Argentina intercolegial 2013. Nivell 2.

Solució:

$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = 50º + 10º = 60º$.



Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és equilàter.

$\overline{AC} = \overline{AB}$.

$\angle DAB = \angle CAB + \angle CAD = 60º + 20º = 80º$.

$\angle ADB = 180º - (\angle DAB + \angle ABD) = 180º - (80º + 50º) = 50º$

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ és isòsceles.

$\overline{AD} = \overline{AB}$.

Per tant, $\overline{AD} = \overline{AC}$.

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ACD}$ és isòsceles.

$$\angle ACD = \frac{180º - \angle CAD}{2} = \frac{180º - 20º}{2} = 80º .$$