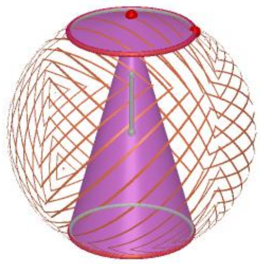
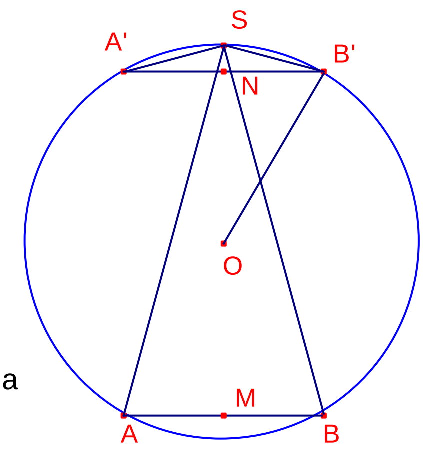
901.- Una esfera té inscrits dos tipus de cons distints que tenen per radi la meitat del radi de l'esfera.
Calculeu la proporció entre els volums dels dos cons.



Solució:
Siga l'esfera de radi r i centre O.
Siguen ABS, A'B'S les seccions axials dels dos cons.
$\overline{AB} = \overline{A'B'} = r$.
Siga M el punt mig el segment $\overline{AB}$.
Siga N el punt mig del segment $\overline{A'B'}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ONA'}$:

$\overline{ON} = \frac{\sqrt{3}}{2} r$.

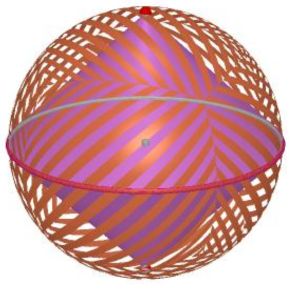
$\overline{SN} = r - \overline{ON} = \frac{2-\sqrt{3}}{2} r$.

$\overline{SM} = r + \overline{ON} = \frac{2+\sqrt{3}}{2} r$.

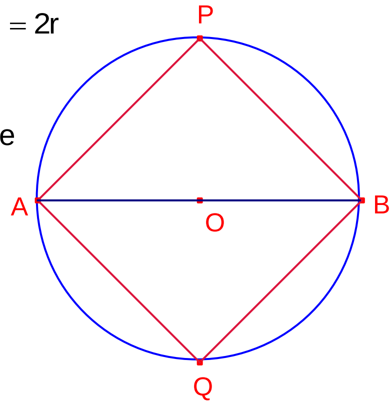
Siguen V_m, V_g els volums dels cons menut i gran, respectivament.
Dos cons que tenen la mateixa base els volums són proporcionals a les altures:

$$\frac{V_m}{V_g} = \frac{\overline{SN}}{\overline{SM}} = \frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 7 - 4\sqrt{3} \approx 0.07197 .$$

902.- Un cos està format per dos cons iguals que tenen base comuna i tots dos estan inscrits en una esfera.
Determineu la proporció entre els volums del cos i l'esfera.



Solució:
La base dels dos cons és circumferència màxima de l'esfera.
Siga l'esfera de centre O i radi r



La secció axial dels dos cons és el quadrat APBQ on $\overline{AB} = \overline{PQ} = 2r$ diàmetre de l'esfera.
$\overline{OP} = r$.
El volum del cos és igual a la suma dels volums de dos cons de radi r i altura r.

$$V_{cos} = 2\left(\frac{1}{3}\pi r^2 r\right) = \frac{2}{3}\pi r^3 .$$

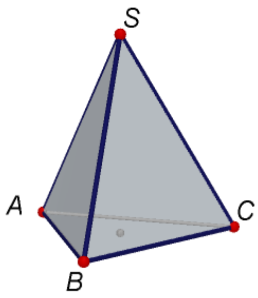
El volum de l'esfera és:

$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 .$$

La proporció entre els volums és:

$$\frac{V_{cos}}{V_{esfera}} = \frac{\frac{2}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{1}{2} .$$

903.- Una piràmide triangular regular l'altura mesura igual que l'aresta de la base.
Calculeu la proporció entre les àrees de la superfície lateral de la piràmide i l'àrea de la base.



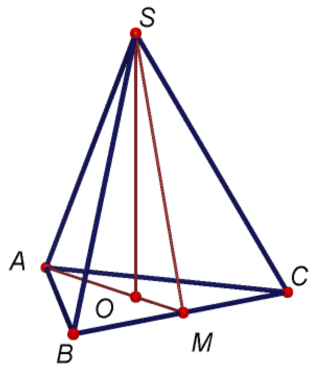
Solució:

Siga la piràmide ABCS de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB}=a$.

Siga O el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

L'altura de la piràmide és $\overline{OS}=a$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.



$$\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Aplicant la propietat del baricentre:

$$\overline{AO}=\frac{2}{3}\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{3}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOS}$.

$$\overline{AS}=\overline{BS}=\frac{2\sqrt{3}}{3}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMS}$:

$$\overline{MS}=\frac{\sqrt{39}}{6}a.$$

L'àrea lateral de la piràmide és:

$$S_L=3\left(\frac{\overline{BC}\cdot\overline{MS}}{2}\right)=3\frac{a\frac{\sqrt{39}}{6}a}{2}=\frac{\sqrt{39}}{4}a^2.$$

L'àrea de la base $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

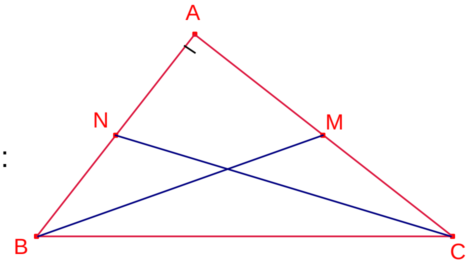
$$S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

La proporció entre les àrees de la superfície lateral de la piràmide i l'àrea de la base de la piràmide és:

$$\frac{S_L}{S_{ABC}}=\frac{\frac{\sqrt{39}}{4}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2}=\sqrt{13}\approx 3.6056.$$

904.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90º$.
Siguen M, N els punts migs dels catets $\overline{AC}$, $\overline{AB}$, respectivament.
Si $\overline{BM} = 19$, $\overline{CN} = 22$, calculeu la mesura de la hipotenusa $\overline{BC}$.
Olimpíada XXXIII Brasil nivell 2, primera fase.

Solució 1:



Aplicant la mesura de la mitjana d'un triangle:

$$19^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}, \quad 22^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$a^2 = b^2 + c^2$.

Resolent el sistema format per les tres equacions anteriors:

$\overline{BC} = a = 26$, $b = 2\sqrt{105}$, $c = 16$.

Solució 2:

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABM}$:

$$19^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACN}$:

$$22^2 = b^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$a^2 = b^2 + c^2$.

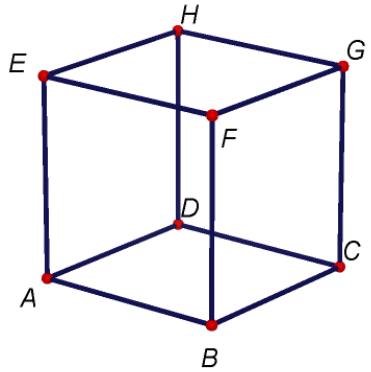
Resolent el sistema format per les tres equacions anteriors:

$\overline{BC} = a = 26$, $b = 2\sqrt{105}$, $c = 16$.

905.- En cadascun dels vèrtexs d’un cub s’ha escrit un nombre.
Calculem la suma dels nombres dels vèrtexs de cada cara i trobem els nombres 8, 10, 11, 12, 13 i x.
La cara que suma 8 és oposada a la cara que suma x.
Determineu el valor de x.
Olimpíada XXXIII Brasil nivell 1, segona fase.

Solució:
Siga el cub ABCDEFGH.
Siga ABCD la cara que suma 8, per tant, EFGH és la cara que suma x.

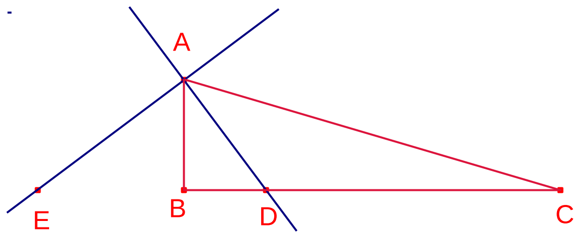
$$\begin{aligned} A+B+C+D&=8\\ A+B+E+F&=10\\ B+C+F+G&=11\\ A+D+E+H&=12\\ C+D+G+H&=13\\ E+F+G+H&=x \end{aligned}.$$



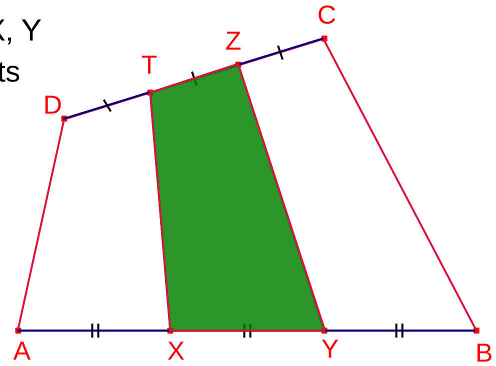
Sumant les 5 primeres expressions:
$3(A+B+C+D)+2(E+F+G+H)=8+10+11+12+13$.
$3\cdot 8+2\cdot x=54$.
Resolent l’equació:
$x=15$.

906.- Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $B = 90º$.
Les bisectrius interiors i exteriors de l'angle $\angle BAC$ tallen la recta BC en els punts D i E, respectivament.
Si $\overline{AD} = 360$ i $\overline{AE} = 480$, determineu la mesura del costat $\overline{AB}$.
Olimpíada XXXIII Brasil nivell 2, segona fase.

Solució:
Siga $\overline{AB} = x$.
Les bisectrius interiors i exteriors de l'angle d'un triangle són perpendiculars.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADE}$:
$\overline{DE} = \sqrt{360^2 + 480^2} = 600$.
L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADE}$ és:
$S_{ADE} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{AE}}{2} = \frac{\overline{DE} \cdot x}{2}$.
$360 \cdot 480 = 600x$.
Resolent l'equació:
$x = 288$.



907.- En el quadrilàter convex ABCD d'àrea S els punts X, Y divideixen el costat $\overline{AB}$ en tres segments iguals i els punts Z, T divideixen el costat $\overline{CD}$ en tres segments iguals.
Calculeu l'àrea del quadrilàter XYZT.
Olimpíada XXXIII Brasil nivell 2, segona fase.



Solució:

Siga M l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{XTZ}$.

Siga N l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{XYZ}$.

L'àrea del quadrilàter XYZT és $S_{XYZT} = M + N$.

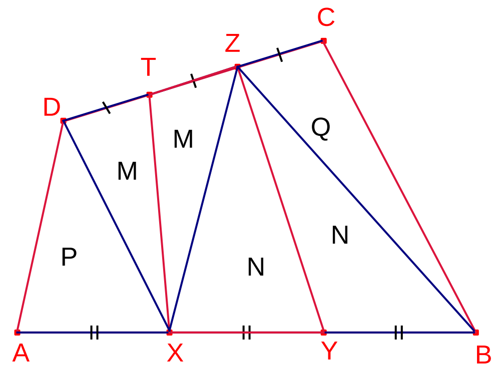
Siga P l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AXD}$.

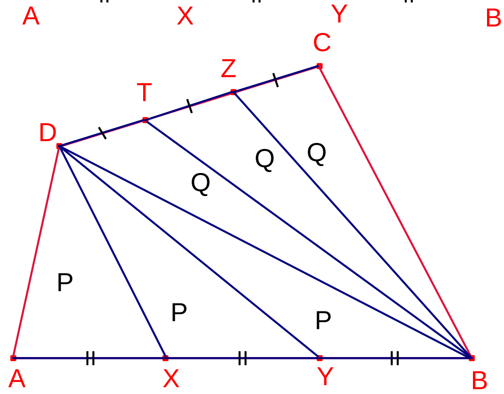
Siga Q l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCZ}$.

$S_{DTZ} = S_{XTZ} = M$, $S_{YBZ} = S_{XYZ} = N$.

$S_{XYD} = S_{YBD} = S_{AXD} = P$.

$S_{ZTB} = S_{TDB} = S_{BCZ} = Q$.





L'àrea del quadrilàter ABCD és S:

$$2(M+N)+(P+Q)=S \qquad (1)$$

$$3(P+Q)=S \qquad (2)$$

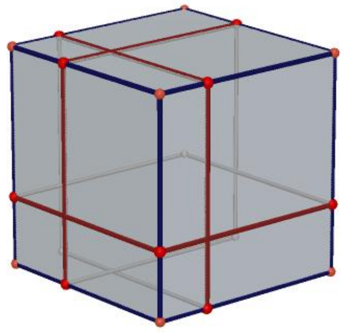
$$P+Q=\frac{1}{2}S \qquad (3)$$

Substituint l'expressió (3) en l'expressió (1):

$$2(M+N)+\frac{1}{3}S=S \qquad (4)$$

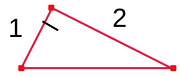
$$S_{XYZT}=M+N=\frac{S-\frac{1}{3}S}{2}=\frac{1}{3}S.$$

908.- En un cub s’han fet tres talls que el divideixen en vuit prismes rectangular.
Calculeu la raó entre l’àrea total dels vuit prismes i l’àrea del cub original.



Solució:
Cadascun dels tres talls del cub forma dos quadrats de costat l’aresta del cub.
L’àrea total dels vuit prismes és igual a l’àrea dels 6 quadrats que formen els talls i els 6 quadrats del cub inicial, en total 12 quadrats iguals.
L’àrea del cub és igual a l’àrea de 6 quadrats.
Aleshores, la raó entre l’àrea total dels vuit prismes i l’àrea del cub original és 2:1

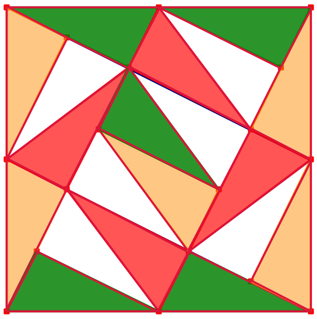
909.- Amb 20 triangles rectangles de catets 1, 2 formeu un quadrat.
Joan Jareño



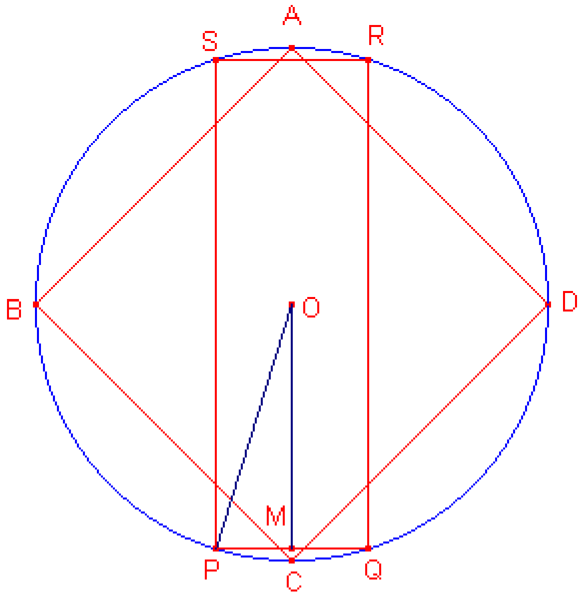
Solució:

La hipotenusa del triangle rectangle de catets 1, 2 mesura $\sqrt{5}$.
L'àrea del triangle de catets 1, 2 és 1.
L'àrea del quadrat és 20.
El costat del quadrat mesura $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.
Cadascun dels costats del quadrat està format per dues hipotenuses.

Una de les solucions és:



910.- En una circumferència hi ha inscrit un quadrat i un rectangle de costat 2cm. Si la diferència de les àrees del quadrat i del rectangle és $10cm^2$ calculeu el radi de la circumferència.



Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi r.
Siga ABCD el quadrat inscrit en la circumferència.
El diàmetre del quadrat és $\overline{BC} = 2r$.
El quadrat del quadrat és $\overline{AB} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\overline{BC} = r\sqrt{2}$.
L'àrea del quadrat és:
$S_{ABCD} = 2r^2$.
Siga PQRS el rectangle inscrit en la circumferència tal que $\overline{PQ} = 2$.
Siga $\overline{PS} = 2x$.
L'àrea del rectangle PQRS és:
$S_{PQRS} = 4x$.
Siga M el punt mig del costat $\overline{PQ}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PMO}$:
$r^2 = x^2 + 1^2$.
Aleshores, l'àrea del rectangle és:
$S_{PQRS} = 4\sqrt{r^2 - 1}$.
La diferència de les àrees del quadrat i del rectangle és $10cm^2$, aleshores:
$2r^2 - 4\sqrt{r^2 - 1} = 10$.
$2\sqrt{r^2 - 1} = r^2 - 5$, $r \geq \sqrt{5}$.
Elevant al quadrat:
$r^4 - 14r^2 + 29 = 0$. Resolent l'equació:
$r^2 = 7 + 2\sqrt{5}$, l'altra solució $r^2 = 7 - 2\sqrt{5}$ no és vàlida ja que $r \geq \sqrt{5}$.
El radi de la circumferència és:
$r = \sqrt{7 + 2\sqrt{5}} \approx 3.39cm$.