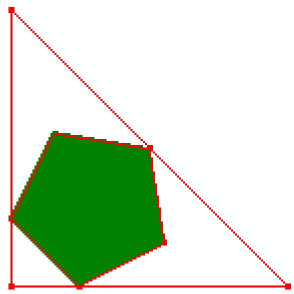
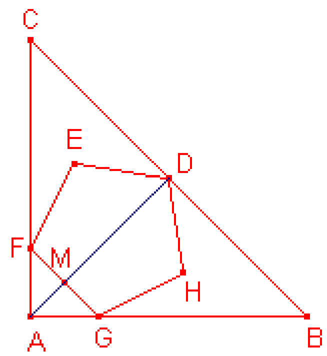
Problemes de Geometria per a l'ESO 92

911.- En un triangle rectangle i isòsceles s'ha inscrit un pentàgon regular que té un vèrtex en els punt mig de la hipotenusa.
Calculeu la proporció entre la hipotenusa del triangle i el costat del pentàgon.



Solució:

Siga el triangle rectangle i isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ d'hipotenusa $\overline{BC}=a$.
Siga DEFGH el pentàgon regular, tal que D és el punt mig de la hipotenusa.
Siga $\overline{DE}=x$ costat del pentàgon regular.
Siga M el punt mig del costat $\overline{FG}$.



$\overline{AD}=\frac{a}{2}$.

$\overline{AM}=\frac{x}{2}$.

$\overline{DF}=\Phi x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}x$, $\overline{FM}=\frac{x}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{FMD}$:

$$\overline{MD}^2=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}x\right)^2-\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{5+2\sqrt{5}}{4}x^2.$$

$$\overline{MD}=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}x.$$

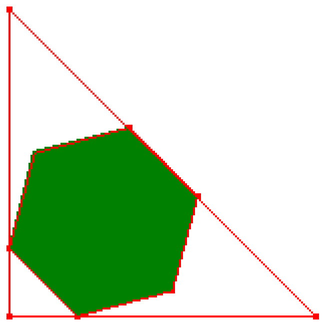
$$\overline{AD}=\overline{AM}+\overline{MD}.$$

$\frac{a}{2}=\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}x$. Simplificant:

$$a=\left(1+\sqrt{5+2\sqrt{5}}\right)x$$

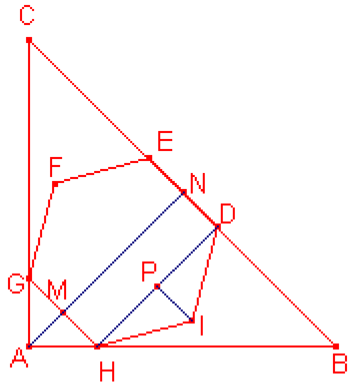
$$\frac{a}{x}=1+\sqrt{5+2\sqrt{5}}\approx 4.08.$$

912.- En un triangle rectangle i isòsceles s'ha inscrit un hexàgon regular que té un costat en la hipotenusa i els vèrtexs del costat oposat en els catets.
Calculeu la proporció entre les àrees de l'hexàgon i del triangle.



Solució:

Siga el triangle rectangle i isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ d'hipotenusa $\overline{BC} = a$.
Siga DEFGHI l'hexàgon regular, tal que D és el punt mig de la hipotenusa.
Siga $\overline{DE} = x$ costat de l'hexàgon regular.
Siga M el punt mig del costat $\overline{GH}$, N el punt mig del costat $\overline{DE}$.



$\overline{AN} = \frac{a}{2}$.

$\overline{AM} = \frac{x}{2}$.

Siga P el punt mig del segment $\overline{DH}$. $\angle PDE = 30°$.

Aleshores, $\overline{DP} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$.

$\overline{DH} = \overline{MN} = x\sqrt{3}$.

$\overline{AD} = \overline{AM} + \overline{MN}$.

$\frac{a}{2} = \frac{x}{2} + x\sqrt{3}$. Resolent l'equació:

$$x = \frac{2\sqrt{3}-1}{11}a.$$

L'àrea del triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AN}}{2} = \frac{1}{4}a^2.$$

L'àrea de l'hexàgon regular DEFGHI és:

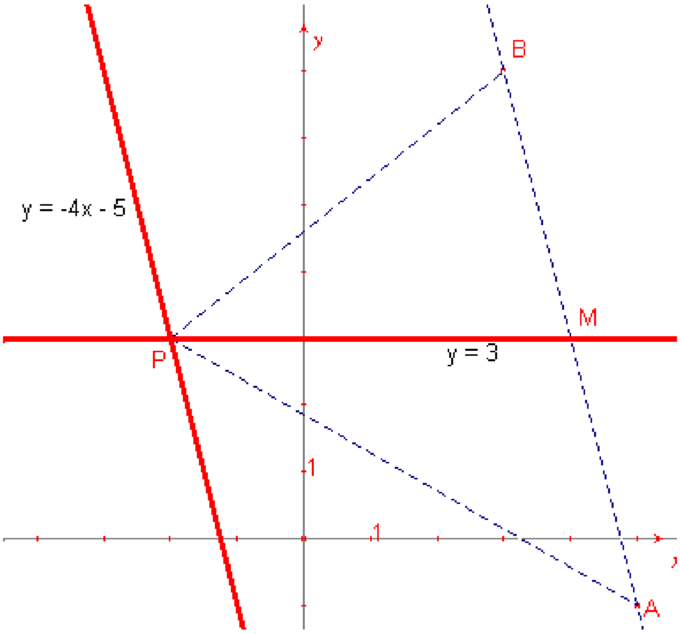
$$S_{DEFGHI} = 6\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{11}\right)^2 a^2 = \frac{39\sqrt{3}-36}{242}a^2.$$

La proporció entre les àrees de l'hexàgon i del triangle és:

$$\frac{S_{DEFGHI}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{39\sqrt{3}-36}{242}a^2}{\frac{1}{4}a^2} = \frac{78\sqrt{3}-72}{121} \approx 0.52.$$

913.- Determineu l'equació de la recta que passa pel punt $P(-2, 3)$ i està a igual distància dels punts $A(5, -1)$ i $B(3, 7)$.

Solució 1:
Les rectes que equidisten de dos punts són les paral·leles a la recta que passa pels dos punts o bé les rectes que passen pel punt mig del segment que formen els dos punts.



Aleshores una de les rectes solució de l'exercici és la recta que passa pel punt P i és paral·lela a la recta que passa pels punts A, B que té pendents -4. La seua equació és:

$y-3=-4(x+2)$.

$y=-4x-5$.

L'altra solució és la recta que passa pel punt mig dels punts A, B que té coordenades $M(4, 3)$. La seua equació és:

$y=3$.

Solució 2:
La recta d'equació $x=-2$ que passa pel punt P no equidista dels punts A i B.
Siga la recta $y-3=m(x+2)$ que passa pel punt P i té pendent m.
Determinem m a fi que els punts A, B equidisten de la recta $y-3=m(x+2)$.
L'equació general de la recta és: $mx-y+3+2m=0$.
Les distàncies de A i B a la recta són respectivament:

$$\left|\frac{5m+1+3+2m}{\sqrt{m^2+1}}\right|, \left|\frac{3m-7+3+2m}{\sqrt{m^2+1}}\right|.$$

Aquestes dues mesures són iguals:

$$\left|\frac{5m+1+3+2m}{\sqrt{m^2+1}}\right|=\left|\frac{3m-7+3+2m}{\sqrt{m^2+1}}\right|.$$ Simplificant:

$|7m+4|=|5m-4|$. Resolent l'equació:

$m=-4, 0$.

Les rectes solució del problema són:

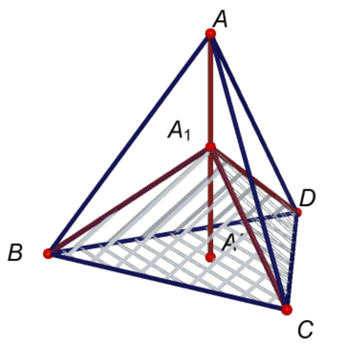
$y-3=-4(x+2)$, $y-3=0$.

914.- Siga el tetraedre ABCD d'aresta a.

Siga A' la projecció de A sobre la base $\overset{\Delta}{BCD}$.

Siga A_1 el punt mig del segment $\overline{AA'}$.

Proveu que el tetraedre A_1BCD té tres cares triangles rectangles.



Solució:

Els triangles $\overset{\Delta}{AA'B}$, $\overset{\Delta}{AA'C}$, $\overset{\Delta}{AA'D}$ són rectangles i d'hipotenusa a, aleshores:

$$\overline{BA'} = \overline{CA'} = \overline{DA'} = \sqrt{a^2 - \overline{AA'}^2} .$$

Aleshores, A' és el circumcentre (també el baricentre)del triangle equilàter $\overset{\Delta}{BCD}$.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{CD}$.

$$\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2} a .$$

Per la propietat del baricentre:

$$\overline{BA'} = \frac{2}{3}\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{3} a .$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BA'A}$:

$$\overline{AA'} = \sqrt{\frac{2}{3}} a .$$

$$\overline{A'A_1} = \frac{1}{2}\overline{AA'} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} a .$$

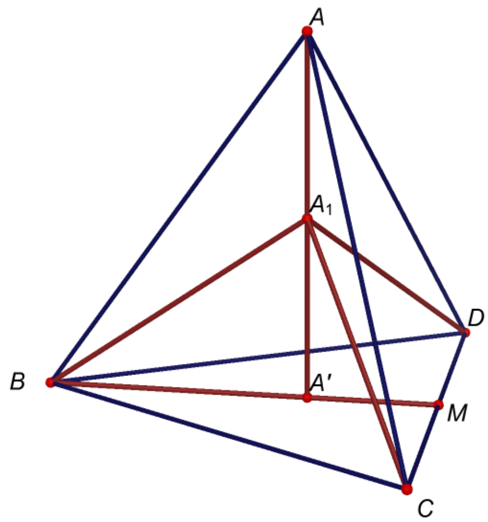
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BA'A_1}$:

$$\overline{BA_1} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a .$$

$$\overline{BA_1} = \overline{CA_1} = \overline{DA_1} = \frac{\sqrt{2}}{2} a .$$

Notem que $\overline{BA_1}^2 + \overline{CA_1}^2 = \overline{BC}^2$. Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{BA_1C}$ és rectangle.

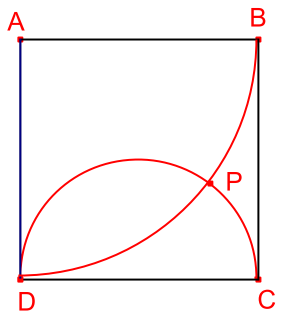
Aleshores, el tetraedre A_1BCD té tres cares triangles rectangles.



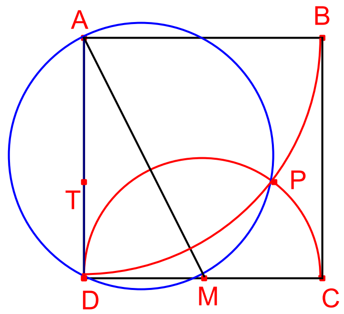
915.- Els costats d'un triangle són 12,16, x. Determineu els valors de x a fi que:
a) Siga un triangle.
b) Siga un triangle rectangle.
c) Siga un triangle acutangle.
d) Siga un triangle obtusangle.

Solució:
a)
Ha d'acomplir les desigualtats triangulars:
$\begin{cases} 12+16>x \\ 12+x>16 \end{cases}$. Resolent el sistema d'inequacions:
$4<x<28$.
b)
Un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle en A si i només si $a^2=b^2+c^2$.
$x^2=12^2+16^2$, o bé $16^2=12^2+x^2$. Resolent les dues equacions:
$x=20$, o bé, $x=4\sqrt{7}$.
c)
Un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és acutangle en A si i només si $a^2<b^2+c^2$.
$\begin{cases} x^2<12^2+16^2 \\ 16^2<12^2+x^2 \end{cases}$. Resolent el sistema d'inequacions:
$4\sqrt{7}<x<20$.
Un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és obtusangle en A si i només si $a^2>b^2+c^2$.
$\begin{cases} x^2>12^2+16^2 \\ 4<x<28 \end{cases}$, o bé, $\begin{cases} 16^2>12^2+x^2 \\ 4<x<28 \end{cases}$. Resolent el dos sistemes d'inequacions:
$20<x<28$, o bé, $4<x<4\sqrt{7}$.

916.- Siga el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = a$.
Dibuixem la semicircumferència de diàmetre $\overline{CD}$ interior al quadrat i l'arc de centre A que passa pels punts B, D interior al quadrat.
Els dos arcs s'intersecten en el punt P.
Calculeu la distància de P a D, i la distància de P al costat $\overline{AD}$.



Solució:
Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$ centre de la semicircumferència.



$\overline{MD} = \overline{MP} = \frac{a}{2}$.

$\overline{AD} = \overline{AP} = a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADM}$:

$\overline{AM} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ADM}$, $\overset{\Delta}{APM}$ són iguals.
El quadrilàter ADMP és inscriptible en una circumferència ja que té els angles oposats suplementaris $D = P = 90°$.
Aplicant el teorema de Tolomeu:

$\overline{AD} \cdot \overline{MP} + \overline{AP} \cdot \overline{MD} = \overline{AM} \cdot \overline{PD}$.

$a\frac{a}{2} + a\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a \cdot \overline{PD}$. Resolent l'equació:

$\overline{PD} = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$.

Siga T la projecció de P sobre el costat $\overline{AD}$.
La distància de P al costat $\overline{AD}$ és igual a la mesura del segment $\overline{PT}$.
Siga $\angle DAM = \beta$.
$\angle TAP = 2\beta$.

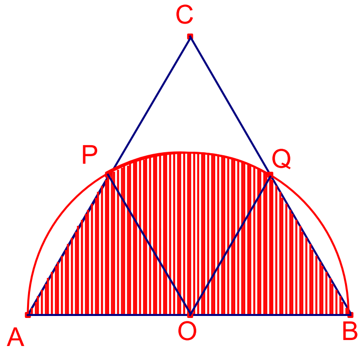
Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ATP}$:

$$\overline{PT} = a \cdot \sin 2\beta = a \cdot 2\sin\beta \cdot \cos\beta = 2a\frac{\overline{DM}}{\overline{AM}} \cdot \frac{\overline{AD}}{\overline{AM}} = 2a\frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}a}\frac{a}{\frac{5}{2}a} = \frac{4}{5}a.$$

917.- Donat el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga T un punt interior al triangle.
Determineu la probabilitat que l'angle $\angle ATB$ siga obtús.

Solució:

Siga $\overline{AB} = a$ el costat del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.



L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 .$$

Considerem l'arc capaç de 90º sobre el costat $\overline{AB}$.
El centre de l'arc és O el punt mig del costat $\overline{AB}$.
L'arc talla els costats $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ en els punts P i Q, respectivament.

Notem que els triangles $\overset{\Delta}{AOP}$, $\overset{\Delta}{BOP}$ són equilàters.
$\angle POQ = 60^\circ$.
A fi que el punt T forme un angle obtús $\angle ATB$ ha de pertànyer a la intersecció del semicercle de diàmetre $\overline{AB}$ i el triangle.

Aquesta intersecció està formada per dos triangles equilàters de costat $\frac{a}{2}$ i un sector circular de radi $\frac{a}{2}$ i 60º.

L'àrea és:

$$S_o = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2\right) + \frac{1}{6}\left(\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\right).$$

La probabilitat cercada és:

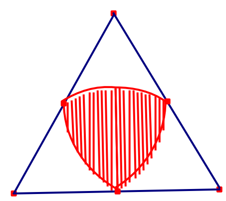
$$p = \frac{S_o}{S_{ABC}} = \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^2\right) + \frac{1}{6}\left(\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2} = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}} \approx 0.8023 .$$

Problema

Donat el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga T un punt interior al triangle.
Determineu la probabilitat que els angles $\angle ATB$, $\angle ATC$, $\angle BTC$ siguen obtusos.

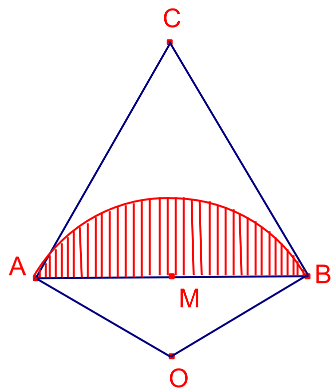
Solució:

$$p = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{1}{2} \approx 0.4069 .$$



918.- Donat el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga T un punt interior al triangle.
Determineu la probabilitat que l'angle $\angle ATB$ siga major de 120º.

Solució:



Siga $\overline{AB} = a$ el costat del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.

L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Considerem l'arc capaç de 120º sobre el costat $\overline{AB}$.
El centre de l'arc és O pertany a la mediatriu del segment $\overline{AB}$ tal que $\angle AOB = 120^\circ$.
$\angle BAO = 30^\circ$.
El costat $\overline{AC}$ és tangent a l'arc ja que $\angle CAO = 90^\circ$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOM}$:

$\overline{OA} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, radi de l'arc.

A fi que el punt T forme un angle major de 120º $\angle ATB$ ha de pertànyer al segment circular de radi $\overline{OA} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$ i 120º

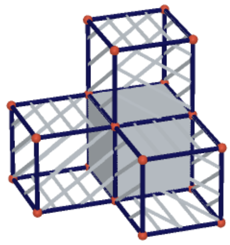
L'àrea és:

$$S_o = \frac{1}{3}\left(\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2.$$

La probabilitat cercada és:

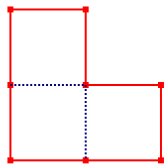
$$p = \frac{S_o}{S_{ABC}} = \frac{\frac{\pi}{9}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}a^2}{\frac{\sqrt{3}}{4}a^2} = \frac{4\pi}{9\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \approx 0.4728.$$

919.- La figura està formada per quatre cubs.
El valor numèric del volum de la figura és igual al valor numèric de la seua àrea.
Determineu la mesura de l'aresta d'un cub.



Solució:
Siga a la mesura de l'aresta d'un cub.
El volum de la figura és:
$V = 4 \cdot a^3$.

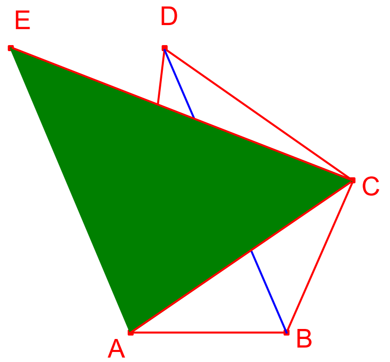
La planta, alçat i perfil de la figura està formada per tres quadrats de costat a.



L'àrea de la figura és:
$S = 6 \cdot 3a^2$.
El valor numèric del volum de la figura és igual a la seua àrea, aleshores:
$4 \cdot a^3 = 18a^2$. Resolent l'equació:
$a = \frac{9}{2}$.

920.- Donat el quadrilàter ABCD de 9cm^2 d'àrea, pel punt A es dibuixa el segment $\overline{AE}$ paral·lel a la diagonal $\overline{BD}$ i d'igual longitud que aquesta.

Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACE}$.



Solució:

Pel punt C tracem una paral·lela a la diagonal $\overline{BD}$ que talla la recta AB en el punt P.

$9 = S_{ABCD} = S_{APD}$.

$S_{APE} = S_{APD}$.

$S_{APE} = S_{APD}$.

Aleshores, $S_{ACE} = S_{ABCD} = 9$.