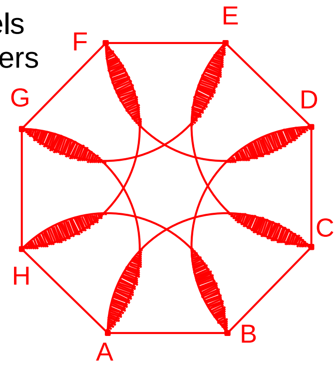
921.- En un octògon regular de costat c, fent centre en cadascun dels vèrtexs es dibuixen vuit arcs que passen pels dos vèrtexs més propers del vèrtex que fa de centre.
Determineu l'àrea de la zona ombrejada que determinen els vuit arcs.

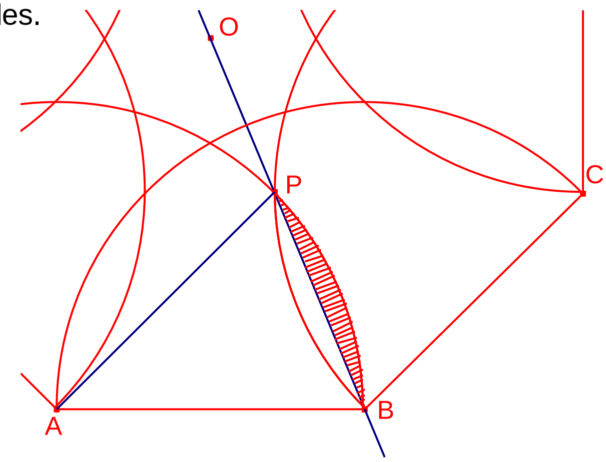


Solució:
Siga ABCDEFGH l'octògon regular de costat $\overline{AB} = c$ i centre O.
Siga P la intersecció dels arcs de entre A i C.
Notem que P pertany a la recta OB.
L'àrea ombrejada és igual a 16 vegades l'àrea del segment circular BP.

$\overline{AP} = \overline{AB} = c$, aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABP}$ és isòsceles.

$\angle ABP = \frac{135^o}{2}$.

$\angle BAP = 45^o$.



L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABP}$ és:

$$S_{ABP} = \frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AP}\cdot\sin 45^o = \frac{1}{2}c^2\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

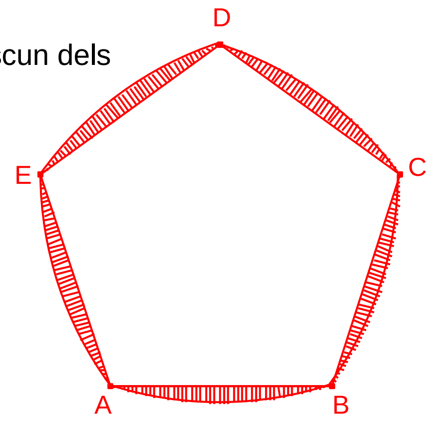
L'àrea del segment circular BP és igual a l'àrea del sector circular de centre A i radi c de 45º menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABP}$:

$$S_{seg} = \frac{1}{8}\pi c^2 - \frac{1}{2}c^2\frac{\sqrt{2}}{2} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)c^2.$$

L'àrea de la zona ombrejada és:

$$S_o = 16\cdot S_{seg} = 16\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)c^2 = \left(2\pi - 4\sqrt{2}\right)c^2.$$

922.- En un pentàgon regular de costat c, fent centre en cadascun dels vèrtexs es dibuixen vuit arcs que passen pels dos vèrtexs del costat oposat..

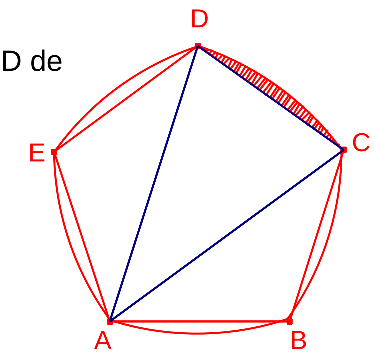


Determineu l'àrea de la zona ombrejada que determinen els cinc arcs i el pentàgon.

Solució:

Siga ABCDE el pentàgon regular de costat $\overline{AB} = c$.

L'àrea ombrejada és igual a 5 vegades l'àrea del segment circular CD de centre A i 36º i radi $\overline{AC}$.



$\overline{AC} = \overline{AD} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}c$, diagonal d'un pentàgon regular.

$\cos 36^{o} = \dfrac{\Phi}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$, $\sin 36^{o} = \sqrt{1-\cos^{2}36^{o}} = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABP}$ és:

$$S_{ACD} = \frac{1}{2}\overline{AC}\cdot\overline{AD}\cdot\sin 36^{o} = \frac{1}{2}\frac{3+\sqrt{5}}{2}c^{2}\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{4}c^{2}.$$

L'àrea del segment circular CD és igual a l'àrea del sector circular menys l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACD}$:

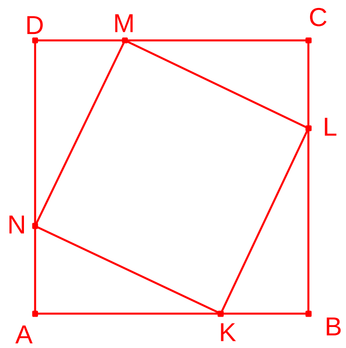
$$S_{seg} = \frac{1}{10}\pi c^{2} - \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{4}c^{2} = \left(\frac{\pi}{10} - \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{4}\right)c^{2}.$$

L'àrea de la zona ombrejada és:

$$S_{o} = 5\cdot S_{seg} = 5\left(\frac{\pi}{10} - \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{4}\right)c^{2}.$$

923.- Un quadrat de costat 12 té inscrit un quadrat de costat 9.

Determineu l'angle que formen els costats dels dos quadrats.



Solució:

Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB}=12$.

Siga KLMN el quadrat inscrit de costat $\overline{KL}=9$.

Notem que $\overline{AK}=\overline{BL}$, $\overline{AN}=\overline{BK}$.

Suposem que $\overline{AK}\geq\overline{AN}$.

Siga $\overline{AK}=x$, $\overline{AN}=12-x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKN}$:

$9^2=x^2+(12-x)^2$.

Resolent l'equació:

$$x=\frac{12+3\sqrt{2}}{2}.$$

Siga $\alpha=\angle AKN$ angle que formen els costats dels dos quadrats.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKN}$:

$$\cos\alpha=\frac{\frac{12+3\sqrt{2}}{2}}{9}=\frac{4+\sqrt{2}}{6}.$$

$$\alpha=\arccos\left(\frac{4+\sqrt{2}}{6}\right)\approx 25^{o}31'44''.$$

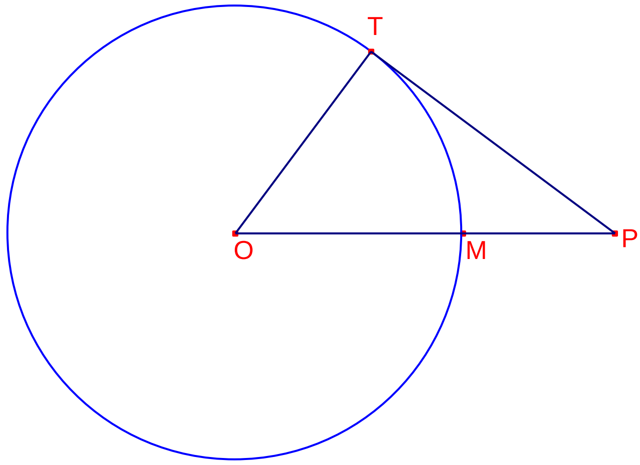
El complementari d'aquest angle és també l'angle que formen els costats dels dos quadrats:

$$90^{o}-\alpha=90^{o}-\arccos\left(\frac{4+\sqrt{2}}{6}\right)\approx 64^{o}28'16''.$$

924.- La tangent d’un punt a una circumferència mesura t i la mínima distància entre el punt i la circumferència és m.

Calculeu el radi de la circumferència.

Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi r.
Siga P un punt exterior a la circumferència.
Siga $\overline{PT} = t$ la tangent a la circumferència que passa pel punt P.
$\angle OTP = 90^o$.
Siga M el punt de la circumferència de mínima distància $\overline{PM} = m$.
Notem que la recta PM passa pel centre de la circumferència.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OTP}$:
$t^2 + r^2 = (r + m)^2$
Resolent l’equació:
$r = \dfrac{t^2 - m^2}{2m}$.

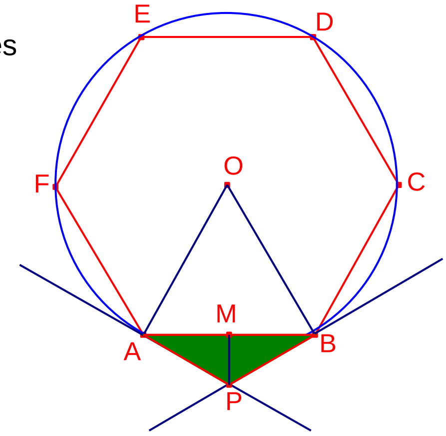


925.- El costat d'un hexàgon regular de costat 10 està inscrit en una circumferència.

Determineu l'àrea del triangle format per un costat de l'hexàgon i les rectes tangents a la circumferència pels extrems d'aquest costat.

Solució:

Siga l'hexàgon regular ABCDEF de costat $\overline{AB} = 10$ inscrit en la circumferència de centre O.



Les rectes tangents a la circumferència en els punts A i B es tallen en el punt P.

$\angle OAP = \angle OBP = 90^o$, $\angle AOB = 60^o$.

$\angle APB = 120^o$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{AB}$.

$\overline{AM} = 5$.

$\angle MAP = 30^o$.

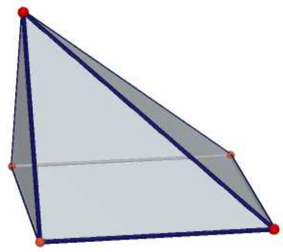
$\frac{\overline{PM}}{5} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$\overline{PM} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$.

La superfície del triangle $\overset{\Delta}{ABP}$:

$S_{ABP} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{PM} = \frac{1}{2}10\frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{25\sqrt{3}}{3}$.

926.- La base d'una piràmide és un quadrat de costat a i una cara lateral és perpendicular a la base i és un triangle equilàter.

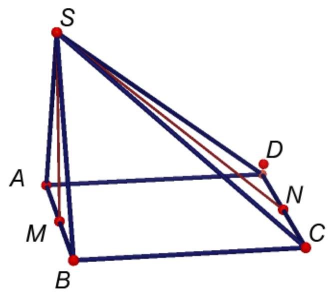


Determineu l'àrea i el volum de la piràmide.

Solució:

Siga la piràmide ABCDS de base el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = a$.

Siga $\overset{\Delta}{ABS}$ la cara que és un triangle equilàter i perpendicular a la base.



$\overline{AS} = \overline{BS} = a$.

$\angle SBC = \angle SAD = 90º$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{SBC}$:

$\overline{SC} = \overline{SD} = a\sqrt{2}$.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.

$\overline{MS}$ és l'altura de la piràmide.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMS}$:

$$\overline{MS} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

El volum de la piràmide és:

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot \overline{MS} = \frac{1}{3}a^2\frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a^3.$$

L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABS}$ és:

$$S_{ABS} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

L'àrea del triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{BCS}$ és:

$$S_{BCS} = \frac{1}{2}a^2.$$

Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{CD}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CNS}$.

$$\overline{NS} = \frac{\sqrt{7}}{2}a.$$

L'àrea del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{CDS}$ és:

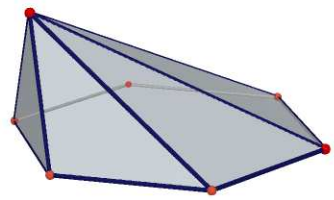
$$S_{CDS} = \frac{1}{2}a\frac{\sqrt{7}}{2}a = \frac{\sqrt{7}}{4}a^2.$$

L'àrea total de la piràmide és:

$$S_{total} = S_{ABCD} + 2 \cdot S_{BCS} + S_{ABS} + S_{CDS} = a^2 + 2\frac{1}{2}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{7}}{4}a^2 =$$

$$= \left(2 + \frac{\sqrt{3}+\sqrt{7}}{4}\right)a^2.$$

927.- La base d'una piràmide és un hexàgon regular de costat a i una cara lateral és perpendicular a la base i és un triangle equilàter.



Determineu l'àrea i el volum de la piràmide.

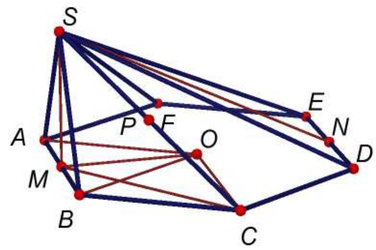
Solució:
Siga la piràmide ABCDEFS de base l'hexàgon regular ABCDEF de costat $\overline{AB} = a$.

Siga $\overset{\Delta}{ABS}$ la cara que és un triangle equilàter i perpendicular a la base.

$\overline{AS} = \overline{BS} = a$.

$\angle SBD = \angle SAE = 90^{o}$.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.



$\angle SMC = \angle SMF = 90^{o}$

$\overline{MS}$ és l'altura de la piràmide.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMS}$:

$$\overline{MS} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Siga O el centre de l'hexàgon ABCDEF.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$:

$$\overline{MO} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

$\overline{BD} = 2 \cdot \overline{MO} = a\sqrt{3}$.

El volum de la piràmide és:

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCDEF} \cdot \overline{MS} = \frac{1}{3}6 \cdot S_{ABO} \cdot \overline{MS} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{3}{4}a^3.$$

L'àrea del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABS}$ és:

$$S_{ABS} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{SBD}$:

$\overline{SD} = \overline{SE} = 2a$.

Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{CD}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DNS}$.

$$\overline{NS} = \frac{\sqrt{15}}{2}a.$$

L'àrea del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{DES}$ és:

$$S_{DES} = \frac{1}{2}a\frac{\sqrt{15}}{2}a = \frac{\sqrt{15}}{4}a^2.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MOC}$:

$$\overline{MC} = \frac{\sqrt{7}}{2}a.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{SMC}$:

$$\overline{SC} = \frac{\sqrt{10}}{2}a.$$

Siga P el punt mig del segment $\overline{SC}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BPC}$:

$$\overline{BP} = \frac{\sqrt{6}}{4}a.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{BCS}$ és:

$$S_{BCS} = \frac{1}{2}\overline{CS}\cdot\overline{BP} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{10}}{2}a\frac{\sqrt{6}}{4}a = \frac{\sqrt{15}}{8}a^2.$$

Siga $\alpha = \angle SCD$. Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CDS}$:

$$(2a)^2 = a^2 + \left(\frac{\sqrt{10}}{2}a\right)^2 - 2\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}\cos\alpha.$$

$$\cos\alpha = \frac{-\sqrt{10}}{20}.$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{390}}{20}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{CDS}$ és:

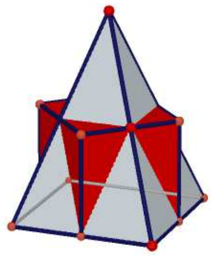
$$S_{CDS} = \frac{1}{2}\overline{CD}\cdot\overline{CS}\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}a\frac{\sqrt{10}}{2}a\frac{\sqrt{390}}{20} = \frac{\sqrt{39}}{8}a^2.$$

L'àrea total de la piràmide és:

$$S_{total} = S_{ABCDEF} + 2\cdot S_{BCS} + S_{ABS} + 2\cdot S_{CDS} + S_{DES} =$$
$$= \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} + 2\frac{\sqrt{15}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4} + 2\frac{\sqrt{39}}{8} + \frac{\sqrt{15}}{4}\right)a^2 = \left(\frac{7\sqrt{3} + 2\sqrt{15} + \sqrt{39}}{4}\right)a^2.$$

928.- Siguen donats un cub i una piràmide quadrangular regular, l’aresta lateral de la qual és b.

Els vèrtexs d’una de les bases del cub són els puts migs de les arestes de la base de la piràmide, mentre que cadascuna de la cara oposada del cub talla una de les arestes laterals de la piràmide.
Determineu el volum de la part del cub situada fora de la piràmide.
Gúsiev, 915.

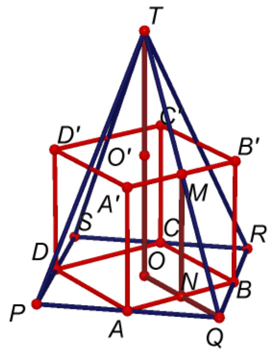


Solució:
Siga PQRST la piràmide quadrangular regular de base el quadrat ABCD i d’aresta lateral $\overline{PT} = b$
Siga el cub ABCDA’B’C’D’ d’aresta $\overline{AB} = x$.
Siga O el centre del quadrat ABCD.

$\overline{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2}x$, $\overline{OQ} = x$.

$\overline{PQ} = x\sqrt{2}$.

Siga M el punt mig de l’aresta $\overline{A'B'}$.
Siga N el punt mig de l’aresta $\overline{AB}$.



$\overline{MN} = x$, $\overline{NQ} = \frac{1}{2}x$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{TOQ}$, $\overset{\Delta}{MNQ}$ són semblants i de raó 2:1.
Aplicant el teorema de tales:
$\overline{OT} = 2\overline{MN} = 2x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{TOQ}$:
$b^2 = x^2 + (2x)^2$.
Resolent l’equació:

$x = \frac{\sqrt{5}}{5}x$.

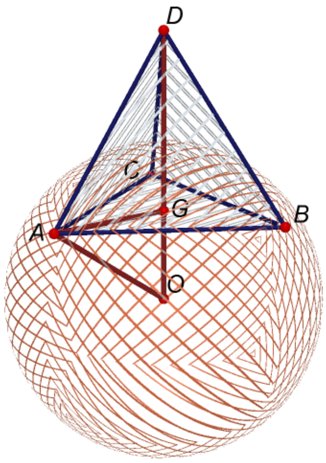
El volum de la part del cub situada fora de la piràmide és igual al volum de quatre piràmides triangulars de base el triangle rectangle de catet $\overline{A'M} = \frac{1}{2}x$ i altura $\overline{A'A} = x$.

$$V = 4\left(\frac{1}{3}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\right)^2 x\right) = \frac{1}{6}x^3.$$

$$V = \frac{1}{6}\left(\frac{\sqrt{5}}{5}b\right)^3 = \frac{\sqrt{5}}{150}b^3.$$

929.- L’aresta d’un tetraedre regular és a.

Determineu el radi de l’esfera tangent a les arestes laterals del tetraedre en els vèrtexs de la base.
Gúsiev 890.



Solució:

Siga el tetraedre regular ABCD d’aresta $\overline{AB}$ i base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga G el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\overline{AG} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.

Aplicat el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AGD}$:

$\overline{GD} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$.

El radi de l’esfera tangent a les arestes laterals del tetraedre en els vèrtexs de la base pertany a la recta GD.
Siga O el centre de l’esfera.
Siga $\overline{OA} = r$ radi de l’esfera.
Per ser l’esfera tangent en el punt A a l’aresta $\overline{AD}$, $\angle DAO = 90º$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AGD}$, $\overset{\Delta}{OGA}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{DG}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{OA}}$.

$\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}a}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}a}{r}$. Resolent l’equació:

$r = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

930.- L'aresta d'un tetraedre regular és a.

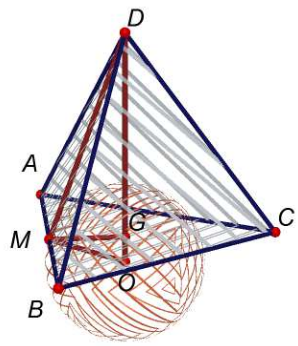
Determineu el radi de l'esfera tangent a les cares laterals del tetraedre en els punts migs de les arestes de la base.
Gúsiev 891.

Solució:

Siga el tetraedre regular ABCD d'aresta $\overline{AB}$ i base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$

Siga G el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\overline{GM} = \frac{\sqrt{3}}{6}a$.



Aplicat el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DMB}$:

$\overline{MD} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Aplicat el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AGD}$:

$\overline{GD} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$.

El radi de l'esfera tangent a les arestes laterals del tetraedre en els vèrtexs de la base pertany a la recta GD.
Siga O el centre de l'esfera.
Siga $\overline{OM} = r$ radi de l'esfera.

Per ser l'esfera tangent en el punt M a la cara $\overset{\Delta}{ABD}$, $\angle DMO = 90º$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{MGD}$, $\overset{\Delta}{OGM}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\overline{MD}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{MG}}{\overline{OM}}$.

$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{\sqrt{6}}{3}a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}a}{r}$. Resolent l'equació:

$r = \frac{\sqrt{6}}{8}a$.