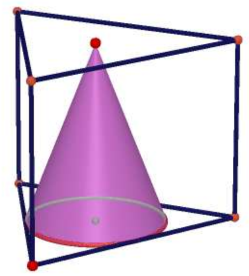
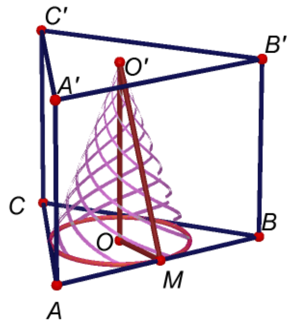
Problemes de Geometria per a l'ESO 94

931.- En un prisma triangular regular hi ha inscrit un con de radi r i l'angle de la generatriu i la base és α .
Calculeu el volum del prisma.



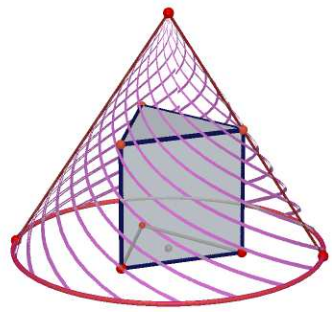
Solució:
Siga el prisma ABCA'B'C'.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.
Siga O el baricentre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:
$S_b = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.



Siga O' el baricentre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{A'B'C'}$
$\overline{OM} = r$.
Siga el con de radi r de generatriu $\overline{MO'}$, $\angle O'MO = \alpha$ angle que forma la generatriu i la base del con.
Siga $\overline{AB} = a$ aresta de la base, $\overline{OO'} = h$ altura del con.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{O'MO}$:
$h = r \cdot tg\alpha$.
$\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $\overline{CM} = 3r$.
$a = 2r\sqrt{3}$.
El volum del prisma és:
$$V_{prisma} = S_b \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot r \cdot tg\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(2r\sqrt{3}\right)^2 r \cdot tg\alpha = 3\sqrt{3} \cdot tg\alpha \cdot r^3$$

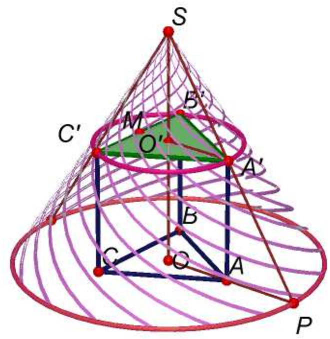
932.- En un con de radi R i l'angle de la generatriu i la base és α hi ha inscrit un prisma triangular regular que té totes les arestes iguals. Calculeu el volum del prisma.



Gúsiev 909.

Solució:
Siga el prisma ABCA'B'C'.

Siga O el baricentre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.



Siga O' el baricentre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{A'B'C'}$

Siga $\overline{AB} = a$ aresta de la base, $\overline{OO'} = a$ altura del prisma.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és: $S_b = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

El volum del prisma és: $V_{prisma} = S_b \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^3$.

Siga $\overline{OA'} = r$ radi de la secció del con que determina els plànol A'B'C'.

Siga el con de radi R de generatriu $\overline{PS}$, $\angle SPO = \alpha$ angle que forma la generatriu i la base del con.

Siga $\overline{OS} = h$ altura del con.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{SPO}$:

$h = R \cdot \text{tg}\alpha$.

Els triangles $\overset{\Delta}{SPO}$, $\overset{\Delta}{SAO'}$ són semblants.

$$\frac{h-a}{r} = \text{tg}\alpha .$$

$$r = \frac{R \cdot \text{tg}\alpha - a}{\text{tg}\alpha} \qquad (1)$$

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{B'C'}$.

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a, \quad \overline{AM} = \frac{3}{2}r .$$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{3}a \qquad (2)$$

Substituint l'expressió (2) en l'expressió (1):

$\frac{\sqrt{3}}{3}a = \frac{R \cdot \text{tg}\alpha - a}{\text{tg}\alpha}$. Resolent l'equació:

$$a = \frac{3R \cdot \text{tg}\alpha}{\sqrt{3}\text{tg}\alpha + 3} .$$

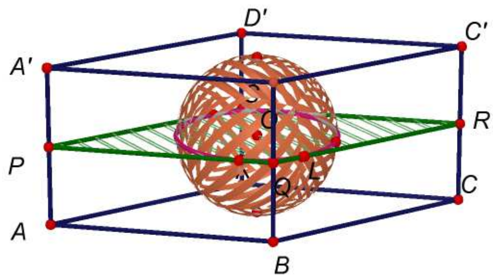
El volum del prisma és:

$$V_{prisma} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^3 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{3R \cdot \text{tg}\alpha}{\sqrt{3}\text{tg}\alpha + 3}R\right)^3 = \frac{9\text{tg}^3\alpha}{4\left(\text{tg}\alpha + \sqrt{3}\right)^3}R^3 .$$

933.- Una esfera té circumscrit un paral·lelepípede recte (les bases són paral·lelograms i les cares laterals rectangles).

El volum del paral·lelepípede és m vegades el volum de l'esfera.
Determineu els angles de les bases del paral·lelepípede.
Gúsiev, 889.

Solució:
Siga el paral·lelepípede ABCDA'B'C'D' circumscrit a l'esfera de centre O i radi r.
Considerem la secció PQRT del paral·lelepípede paral·lela a les bases que passa pel punt O.



Siga K el punt de tangència de l'esfera i $\overline{PQ}$.
Siga L el punt de tangència de l'esfera i $\overline{QR}$.
Siga $x=\overline{PK}=\overline{RL}$, $y=\overline{KQ}=\overline{QL}$.
L'àrea del paral·lelogram (rombe) ABCD és:
$S_{ABCD}=(x+y)2r$.
$\overline{AA'}=2r$.
El volum del paral·lelepípede és:
$V=(x+y)2r\cdot 2r$.

$$V=m\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right).$$

$4(x+y)r^2=m\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$. Simplificant:

$$x+y=m\frac{\pi}{3}r \qquad (1)$$

Siga $\alpha=\angle DAB$ angle que forma les arestes de la base.

$$\angle OPQ=\frac{\alpha}{2}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKP}$:

$$x=\frac{r}{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}} \qquad (2)$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKQ}$:

$$y=\frac{r}{\mathrm{tg}\left(90^o-\frac{\alpha}{2}\right)} \qquad (3)$$

Substituint les expressions (2) (3) en l'expressió (1):

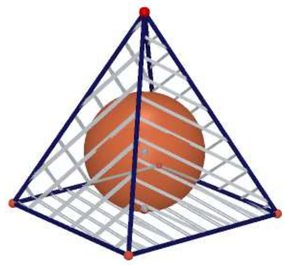
$\left(\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)r=m\frac{\pi}{3}r$. Simplificant:

$$\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=m\frac{\pi}{3}.$$

$\frac{2}{\sin\alpha}=m\frac{\pi}{3}$. Aleshores, els angles de la base són $\alpha=\arcsin\left(\frac{6}{m\pi}\right)$ i el seu suplementari.

934.- Una piràmide regular quadrangular d'aresta de la base a i altura h té inscrita una esfera (tangent a totes les cares).

Determineu el radi de l'esfera.



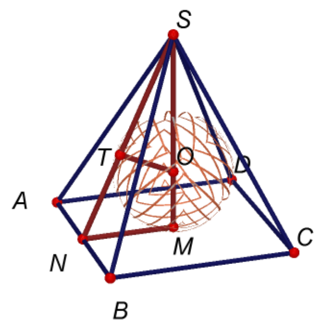
Solució:

Siga ABCDS la piràmide de base el quadrat ABCD, $\overline{AB} = a$ i altura $\overline{SM} = h$.

Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.

Siga T el punt de tangència de l'esfera i la cara ABS.

Siga O el centre de l'esfera i $r = \overline{OM} = \overline{OT}$ el seu radi.



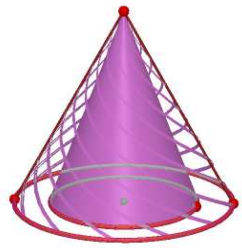
Els triangles $\overset{\Delta}{NMS}$, $\overset{\Delta}{OTS}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{(h-r)^2 - r^2}}{2}$. Elevant al quadrat i simplificant:

$4h^2r^2 + 2a^2hr - a^2h^2 = 0$. Resolent l'equació:

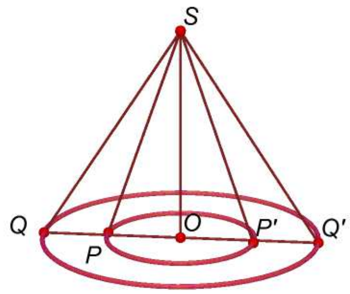
$$r = \frac{-2a^2h + \sqrt{4a^4h^2 + 16a^2h^4}}{8h^2} = \frac{a}{4h}\left(-a + \sqrt{a^2 + 4h}\right).$$

935.- Siguen dos cons concèntrics d'altura H.



La diferència entre els angles que formen les generatrius amb l'eix és igual a β, l'angle entre la generatriu del con interior i la base és igual a α.
Determineu el volum de la part de l'espai compresa entre les superfícies dels dos cons.
Gúsiev 912.

Solució:
Siga el con de diàmetre $\overline{PP'} = 2r$, centre O i altura $\overline{OS} = H$.
Siga el con de diàmetre $\overline{QQ'} = 2R$, centre O i altura $\overline{OS} = H$.
Siga $\beta = \angle PSQ$ la diferència entre els angles que formen les generatrius amb l'eix $\overline{OS}$.
Siga $\alpha = \angle OPS$ l'angle entre la generatriu del con interior i la base és igual a α.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPS}$:

$$r = \frac{H}{tg\alpha}.$$

$$90 - (\alpha - \beta) = \angle OQS.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OQS}$:

$$R = \frac{H}{tg(\alpha - \beta)}.$$

El volum de la part de l'espai compresa entre les superfícies dels dos cons és:

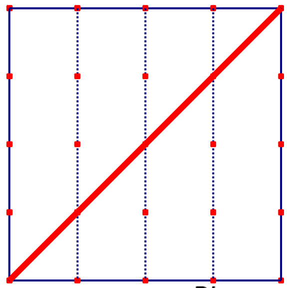
$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{\pi}{3}H^3\left(\frac{1}{tg^2(\alpha-\beta)} - \frac{1}{tg^2\alpha}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{3}H^3\,\frac{tg^2\alpha - tg^{2(}(\alpha-\beta)}{tg^2\alpha \cdot tg^2(\alpha-\beta)} = \frac{\pi}{3}H^3\,\frac{\sin^2\alpha \cdot \cos^2(\alpha-\beta) - \cos^2\alpha \cdot \sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2\alpha \cdot \sin^2(\alpha-\beta)} =$$

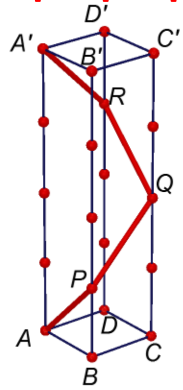
$$= \frac{\pi}{3}H^3\,\frac{\sin(2\alpha-\beta)\cdot\sin\beta}{\sin^2\alpha \cdot \sin^2(\alpha-\beta)}.$$

936.- Un quadrat en el qual s’ha dibuixat una diagonal s’ha enrotllat en forma de superfície lateral d’un ortoedre. La diagonal s’ha transformat en una línia poligonal- Determineu el angles que formen dos segments consecutius d’aquesta línia poligonal.

Gúsiev 653.



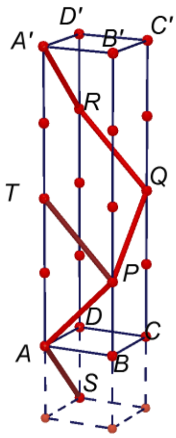
Solució:
Siga el quadrat inicial de costat 4a.
Siga ABCDA’B’C’D’ l’ortoedre format tal que ABCD és un quadrat de costat $\overline{AB}=a$ i altura $\overline{AA'}=4a$.
Siga APQRA’ la línia poligonal.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABP}$:
$\overline{AP}=\overline{PQ}=\overline{QR}=\overline{RA'}=\overline{AC}=a\sqrt{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACQ}$:
$\overline{AQ}=\overline{PR}=\overline{QA'}=a\sqrt{6}$.
Notem que $\angle APQ=\angle PQR=\angle QRA'=\alpha$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{APQ}$:
$\left(a\sqrt{6}\right)^2=\left(a\sqrt{2}\right)^2+\left(a\sqrt{2}\right)-2\cdot a\sqrt{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\cos\alpha$.
$\cos\alpha=\frac{-1}{2}$.
$\alpha=120^o$.

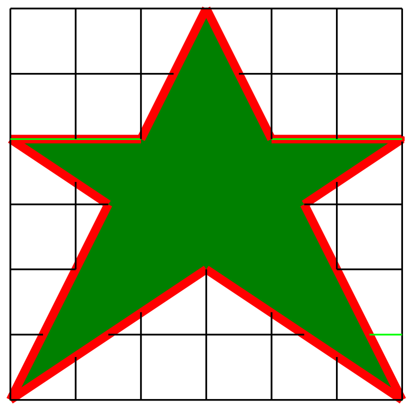


Amb el trasllat de direcció $\overrightarrow{QP}$ el segment $\overline{QR}$ és transforma en el segment $\overline{PT}$.
Siga $\angle APT=\beta$ angle que formen $\overline{AP}$, $\overline{QR}$.
$\overline{AT}=2a$.
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{APT}$ és rectangle, $\beta=90^o$.

Anàlogament, l’angle que formen els segments $\overline{PQ}$, $\overline{A'R}$ és $\beta=90^o$.

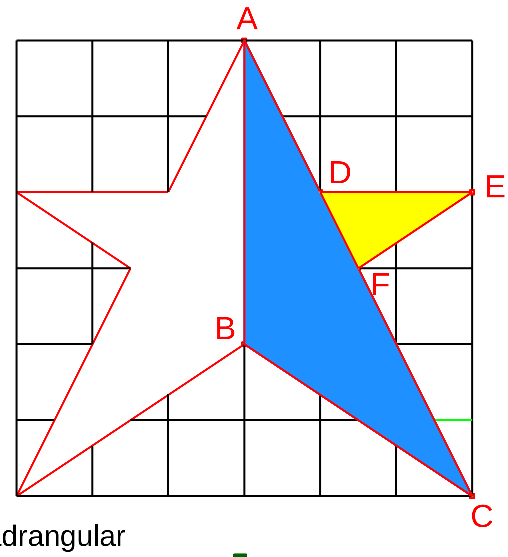
Amb el trasllat de direcció $\overrightarrow{A'A}$ el segment $\overline{A'R}$ és transforma en el segment $\overline{AS}$.
Siga $\angle PAS=\gamma$ angle que formen $\overline{AP}$, $\overline{A'R}$.
$\overline{PS}=\overline{AQ}=a\sqrt{6}$.
Aleshores, $\gamma=60^o$.

937.- En la figura hi ha dibuixat una estrella de cinc puntes en una graella quadrangular 6×6.



La superfície de cada quadrat menut és de 25mm^2.
Determineu l'àrea de l'estel.

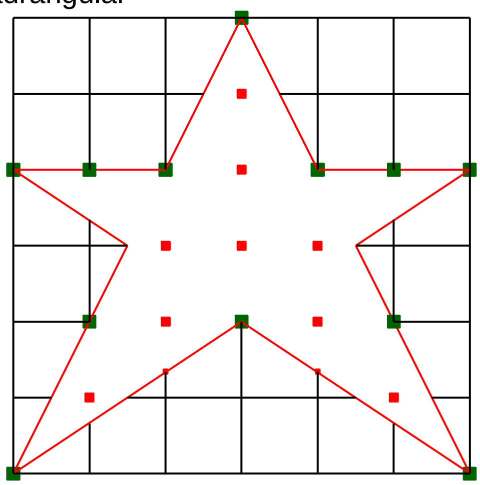
Solució 1:
El costat del quadrat de la graella és 5mm.
L'àrea de l'estrella és igual a dues vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ més dues vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DEF}$



$$S=2\frac{20\cdot 15}{2}+2\frac{10\cdot 5}{2}=350\text{mm}^2.$$

Solució 2.
Teorema de Pick.
Si els vèrtexs d'un polígon pertanyen a una graella quadrangular l'àrea del polígon en funció de l'àrea de quadrat menut de la graella és:

$S=I+\frac{B}{2}-1$, on I és igual als punts de la graella interiors al polígon. B els punts de la graella que pertanyen a la vora.



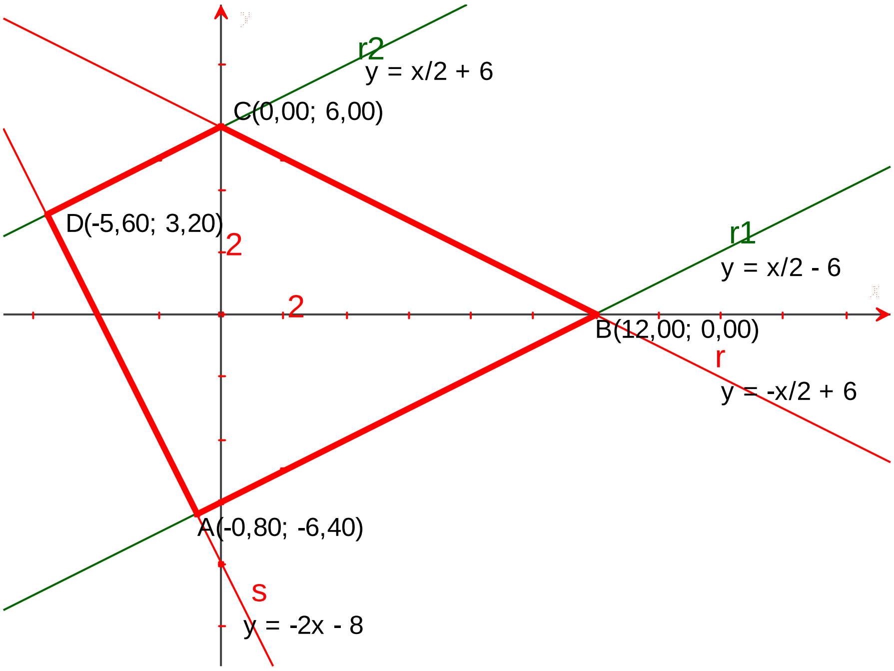
Notem que:
$I=9$, $B=12$.
L'àrea de l'estrella és:

$$S=\left(9+\frac{12}{2}-1\right)25=350\text{mm}$$

938.- La recta $r \equiv x + 2y - 12 = 0$, les rectes simètriques d'aquesta respecte dels eixos coordenats i la recta $s \equiv 2x + y + 8 = 0$.

Temes Grau. Problema 1426.

Solució:



La recta $r \equiv x + 2y - 12 = 0$, té equació explícita:

$r \equiv y = -\frac{1}{2}x + 6$. Té pendent $\frac{-1}{2}$ i ordenada en l'origen 6

La recta talla l'eix d'ordenades en el punt $(0, 6)$ i a l'eix d'abscisses en el punt $(12, 0)$.

La recta simètrica de r respecte de l'eix d'abscisses té pendent $\frac{1}{2}$ i passa pel punt $(12, 0)$. La seua equació és:

$r_1 \equiv y = \frac{1}{2}(x - 12)$.

La recta simètrica de r respecte de l'eix d'ordenades té pendent $\frac{1}{2}$ i passa pel punt $(0, 6)$. La seua equació és:

$r_2 \equiv y - 6 = \frac{1}{2}x$.

Determinem els punts dels vèrtexs del quadrilàter que formen les quatre rectes.
Siga A la intersecció de les rectes s i r_1.

$\begin{cases} 2x + y = -8 \\ y = \frac{1}{2}(x - 12) \end{cases}$ la solució del sistema és $\begin{cases} x = \frac{-4}{5} \\ y = \frac{-32}{5} \end{cases}$.

Les coordenades de A són $A\left(\frac{-4}{5}, \frac{-32}{5}\right)$.

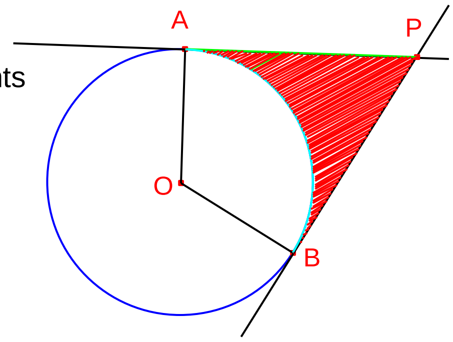
Siga B la intersecció de les rectes r i r_1.Les coordenades de B són $B(12, 0)$.
Siga C la intersecció de les rectes r i r_2.Les coordenades de C són $C(0, 6)$.

Siga D la intersecció de les rectes s i r_2 .

$\begin{cases} 2x + y = -8 \\ y = \frac{1}{2}x + 6 \end{cases}$ la solució del sistema és $\begin{cases} x = \frac{-28}{5} \\ y = \frac{16}{5} \end{cases}$.

Les coordenades de A són $D\left(\frac{-28}{5}, \frac{16}{5}\right)$.

939.- Siguen A i B dos punts d'una circumferència de radi R que formen un arc de 120º.
Les tangents dibuixades a la circumferència des dels dos punts es tallen en el punt P.
Determineu l'àrea de la superfície afitada per l'arc i les dues tangents.



Solució:

Siga O el centre de la circumferència $R = \overline{OA} = \overline{OB}$,
$\angle AOB = 120º$.

El triangle $\overset{\Delta}{OAP}$ és rectangle $\angle AOP = 60º$

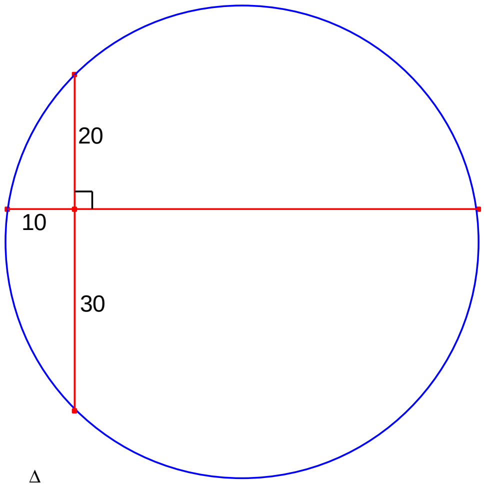
Aleshores, $\overline{AP} = \overline{OA}\sqrt{3} = R\sqrt{3}$.

L'àrea ombrejada és igual al doble de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OAP}$ menys el l'àrea del sector de radi R i 120º.

$$S = 2\left(\frac{1}{2}R \cdot R\sqrt{3}\right) - \frac{1}{3}\pi R^2 = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)R^2 .$$

940.- Determineu el radi de la circumferència sabent que

dues cordes són perpendicular i es coneixen les tres mesures.



Solució 1:

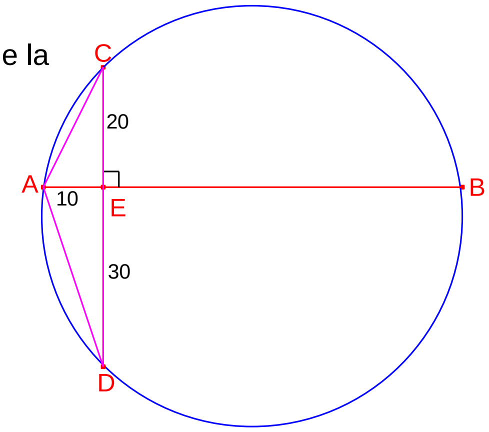
Siguen les cordes $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ que es tallen en el punt E.

Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{AEC}$, $\overset{\Delta}{AED}$.

$\overline{AC} = 10\sqrt{5}$, $\overline{AD} = 10\sqrt{10}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACD}$ és:

$S_{ACD} = \frac{1}{2}\overline{CD}\cdot\overline{AE} = \frac{\overline{AC}\cdot\overline{AD}\cdot\overline{CD}}{4R}$, on R és el radi de la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ACD}$.



$\frac{1}{2}50\cdot 10 = \frac{10\sqrt{5}\cdot 10\sqrt{10}\cdot 50}{4R}$.

Resolent l'equació:

$R = 25\sqrt{2}$.

Solució 2:

Aplicant la potència del punt E respecte de la circumferència:

$\overline{AE}\cdot\overline{BE} = \overline{CE}\cdot\overline{DE}$.

$10\cdot\overline{BE} = 20\cdot 30$.

Aleshores, $\overline{BE} = 60$.

$\overline{AB} = 70$.

Siga O el centre de la circumferència i R el radi.

Siga la madiatriu a la corda $\overline{AB}$ que passa pel centre O.

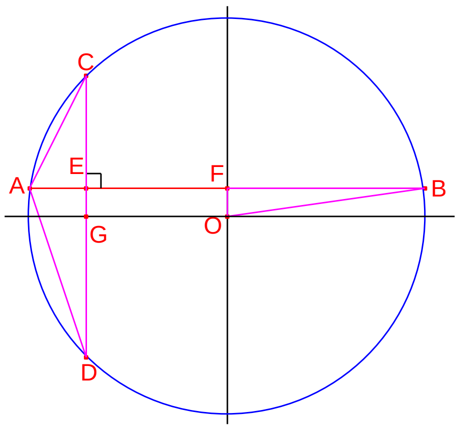
Siga F la intersecció de la mediatriu i la corda $\overline{AB}$.

$\overline{BF} = 35$.

Siga la madiatriu a la corda $\overline{CD}$ que passa pel centre O.

Siga G la intersecció de la mediatriu i la corda $\overline{CD}$.

$\overline{CG} = 25$, aleshores, $\overline{EG} = \overline{OF} = 5$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BFO}$:

$R = \overline{OB} = \sqrt{35^2 + 5^2} = 25\sqrt{2}$.