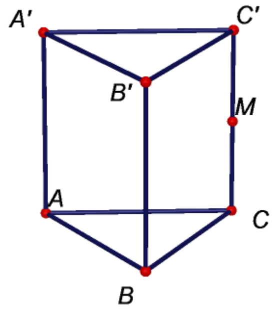
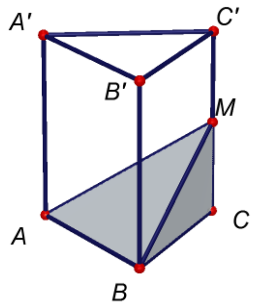
941.- Siga el prisma regular triangular ABCA'B'C'.
El plànol que passa pels vèrtexs A, B i el punt mig de l'aresta $\overline{CC'}$ divideix el prisma en dues parts.
Determineu la proporció entre els volums de les dues parts.



Solució:
Siga el prisma regular triangular ABCA'B'C' de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = a$ i altura $\overline{CC'} = h$.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{CC'}$.
El plànol ABM de termina el tetraedre ABCM i el prima truncat A'B'C'ABM.



El volum del tetraedre ABCM és:

$$V_{ABCM} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\frac{h}{2}.$$

$$V_{ABCM} = \frac{\sqrt{3}}{24}a^2h.$$

El volum del truncat A'B'C'ABM és:

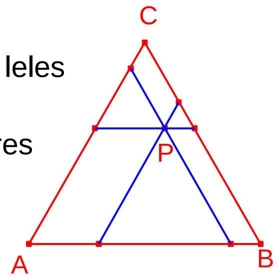
$$V_{A'B'C'ABM} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(\frac{h+h+\frac{h}{2}}{3}\right).$$

$$V_{A'B'C'ABM} = \frac{5\sqrt{3}}{24}a^2h.$$

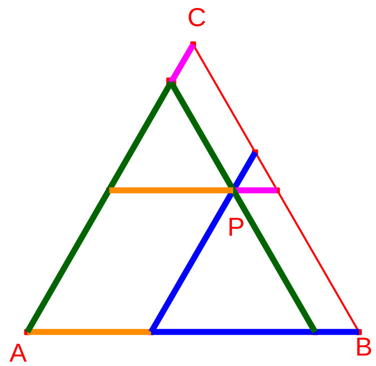
La proporció entre el dos volums és:

$$\frac{V_{ABCM}}{V_{A'B'C'ABM}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{24}a^2h}{\frac{5\sqrt{3}}{24}a^2h} = \frac{1}{5}.$$

942.- En un punt interior d'un triangle equilàter es dibuixen paral·leles als costats.
La suma dels segments interiors al triangle que determinen les tres paral·leles és igual al doble del costat del triangle.

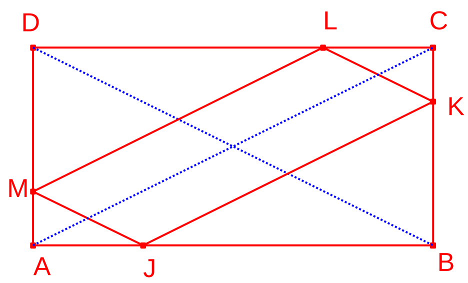


Solució:



943.- Tots el paral·lelograms que estan inscrits en un rectangle i que tenen els costats paral·lels a les diagonals del rectangle tenen perímetre constant.

Solució 1:



Siga el rectangle ABCD de costats $\overline{AB} = a$, $\overline{AD} = b$.
Siga el paral·lelogram JKLM de costats paral·lels a les diagonals del rectangle.
Siga $\overline{AM} = x$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABD}$, $\overset{\Delta}{AJM}$ són semblants aplicant el teorema de Tales:

$$\overline{MJ} = \frac{x}{b}\overline{BD}.$$

$$\overline{DM} = b - x.$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADC}$, $\overset{\Delta}{MDL}$ són semblants aplicant el teorema de Tales:

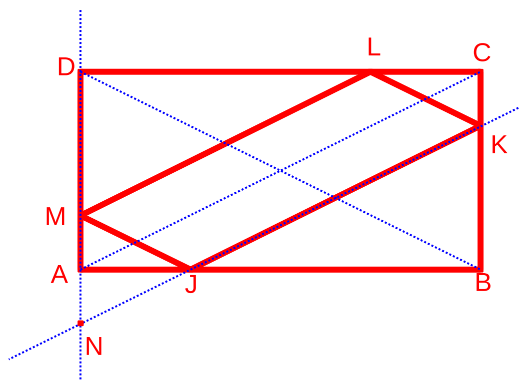
$$\overline{ML} = \frac{b-x}{b}\overline{BD}.$$

El perímetre del paral·lelogram JKLM és:

$$p = 2\left(\overline{MJ} + \overline{ML}\right) = 2\left(\frac{x}{b}\overline{BD} + \frac{b-x}{b}\overline{BD}\right) = 2 \cdot \overline{BD} = 2\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Aleshores, el perímetre del paral·lelogram JKLM és constant i igual a dues vegades la diagonal del rectangle ABCD.

Solució 2:



Les rectes AD i JK es tallen en el punt N.

$\angle KJB = \angle AJM = \angle AJN = \angle CAB$.

Aleshores els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AJM}$, $\overset{\Delta}{AJN}$ són iguals, aleshores:

$\overline{JM} = \overline{JN}$.

$\overline{AN} = \overline{AM} = \overline{CK}$ i són paral·lels, aleshores:

ANKC és un paral·lelogram, per tant:

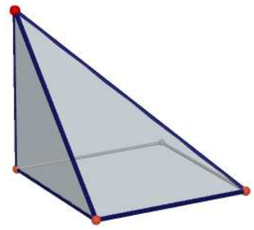
$\overline{AC} = \overline{NK}$.

El perímetre del paral·lelogram JKLM és:

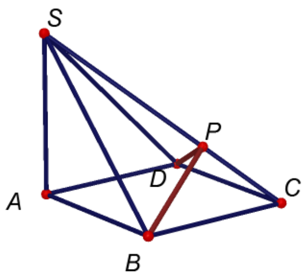
$$p = 2\left(\overline{MJ} + \overline{JK}\right) = 2\left(\overline{NJ} + \overline{JK}\right) = 2 \cdot \overline{NK} = 2 \cdot \overline{AC}.$$

Aleshores, el perímetre del paral·lelogram JKLM és constant i igual a dues vegades la diagonal del rectangle ABCD.

944.- Una piràmide de base un quadrat de costat 1 i dues cares consecutives estan formades per dos triangles rectangles isòsceles amb els angles rectes en la base.
Determineu l'angle que formen les altres dues cares laterals.



Solució:
Siga ABCDS la piràmide de base el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = 1$.



Siguen les cares laterals els triangles rectangles isòsceles $\overset{\Delta}{ABS}$, $\overset{\Delta}{ADS}$, $\overline{AD} = 1$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABS}$:
$\overline{BS} = \sqrt{2}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{BCS}$, $\overset{\Delta}{DCS}$ són iguals.

El triangle $\overset{\Delta}{BCS}$ és rectangle $\angle SBC = 90º$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCS}$:
$\overline{CS} = \sqrt{3}$.

Siga P la projecció de B sobre l'aresta $\overline{CS}$.

L'angle que formen les cares $\overset{\Delta}{BCS}$, $\overset{\Delta}{DCS}$ és $\alpha = \angle BPD$.

Siga $\overline{BP} = \overline{DP} = x$.

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCS}$ és:

$$S_{BCS} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{BS}}{2} = \frac{\overline{CS} \cdot \overline{BP}}{2}.$$

$1 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3}x$. Resolent l'equació:

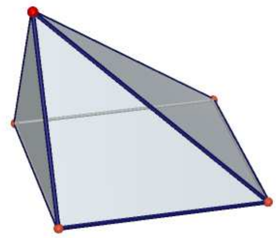
$$x = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BPD}$:

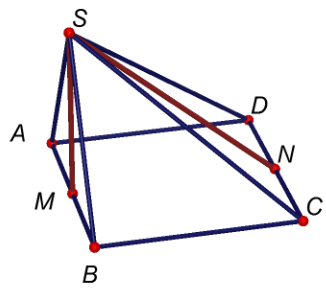
$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cos\alpha.$$

$\cos\varepsilon = \frac{-1}{2}$, aleshores, $\alpha = 120º$.

945.- Una piràmide de base un quadrat de costat a i una de les cares laterals és perpendicular a la base i és un triangle equilàter. Determineu la superfície total i el volum del sòlid.



Solució:
Siga ABCDS la piràmide de base el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = a$.



Siga la cara $\overset{\Delta}{ABS}$ un triangle equilàter perpendicular a la base.
Siga M el punt mig de l'aresta de la base $\overline{AB}$.
$\overline{MS}$ és l'altura de la piràmide.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMS}$:

$$\overline{MS} = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

El volum de la piràmide és:

$$V = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{6}a^3.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{BCS}$, $\overset{\Delta}{ADS}$ són rectangles i isòsceles, $\angle CBS = \angle DAS = 90º$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BCS}$:

$$\overline{CS} = \overline{DS} = a\sqrt{2}.$$

Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{CD}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CNS}$:

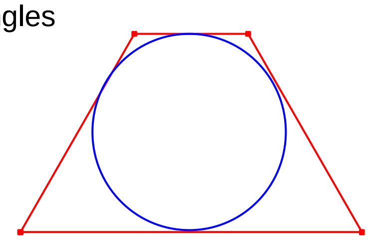
$$\overline{NS} = \frac{\sqrt{7}}{2}a.$$

La superfície total de la piràmide és:

$$S_{ABCDS} = S_{ABCD} + S_{ABS} + 2 \cdot S_{BCS} + S_{CDS}.$$

$$S_{ABCDS} = a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 2\frac{a^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{2}a^2 = \frac{8+\sqrt{3}+\sqrt{7}}{4}a^2.$$

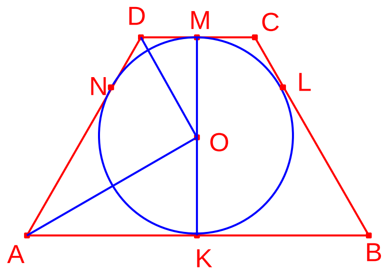
946.- Un trapezi isòsceles de perímetre 24cm i un dels angles de 60º té inscrita una circumferència.
Determineu la seua àrea.



Solució:
Siga el trapezi isòsceles ABCD.
Siga O el centre de la circumferència inscrita i r el seu radi.
Siguen K, L, M, N els punts de tangència de la circumferència i el trapezi.

$\overline{MN} = 2r$.

$\overline{OK} = r$, $\angle OAK = 30º$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{AKO}$:

$\overline{AK} = \overline{AN} = r\sqrt{3}$.

$\overline{OM} = r$, $\angle ODM = 60º$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{DMO}$:

$$\overline{DM} = \overline{DN} = \frac{\sqrt{3}}{3}r \,.$$

El perímetre del trapezi és 24:

$4\left(\overline{AK} + \overline{DM}\right) = 24$.

$r\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}r = 6$. Resolent l'equació:

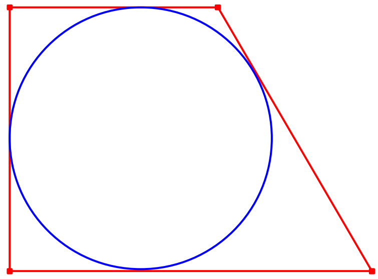
$$r = \frac{3\sqrt{3}}{2} \,.$$

L'àrea del trapezi és:

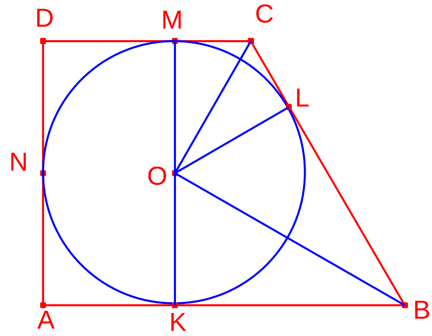
$$S_{ABCD} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}\overline{MN} = \left(\overline{AK} + \overline{DM}\right)2r \,.$$

$$S_{ABCD} = \left(r\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}r\right)2r = \frac{8\sqrt{3}}{3}r^2 = \frac{8\sqrt{3}}{3}\frac{27}{4} = 18\sqrt{3} \approx 31.18cm^2 \,.$$

947.- Un trapezi rectangle de perímetre 15cm i un dels angles
de 60º té inscrita una circumferència.
Determineu la seua àrea.



Solució:
Siga el trapezi rectangle ABCD, $A = D = 90º$, $B = 60º$.
Siga O el centre de la circumferència inscrita i r el seu radi.
Siguen K, L, M, N els punts de tangència de la circumferència i el trapezi.



$\overline{MN} = \overline{AD} = 2r$.

$\overline{ON} = \overline{AK} = \overline{DM} = r$.

$\overline{OK} = r$, $\angle OBK = 30º$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{BKO}$:

$\overline{BK} = \overline{AL} = r\sqrt{3}$.

$\overline{OL} = r$, $\angle OCL = 60º$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{CLO}$:

$$\overline{CL} = \overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{3}r.$$

El perímetre del trapezi és 15:

$\overline{AD} + 2\overline{AK} + 2\overline{BK} + 2\overline{CL} = 15$.

$4r + 2\sqrt{3}r + 2\frac{\sqrt{3}}{3}r = 15$. Resolent l'equació:

$$r = \frac{15\left(2\sqrt{3} - 3\right)}{4}.$$

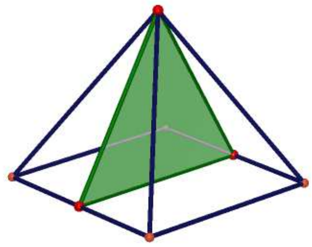
L'àrea del trapezi és:

$$S_{ABCD} = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}\overline{AD}.$$

$$S_{ABCD} = \left(\frac{\left(1 + \sqrt{3}\right)r + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)r}{2}\right)2r = \frac{6 + 4\sqrt{3}}{3}r^2 = \frac{6 + 4\sqrt{3}}{3}\left(\frac{15\left(2\sqrt{3} - 3\right)}{4}\right)^2 =$$

$$= \frac{450\sqrt{3} - 675}{8} \approx 13.05cm^2.$$

948.- La secció produïda en una piràmide regular quadrangular per un plànol que passa pel vèrtex i pels punts migs de dues arestes de la base oposades és un triangle equilàter de costat 6cm. Calculeu l'àrea i el volum de la piràmide.



Solució:

Siga la piràmide ABCDS de base el quadrat ABCD.

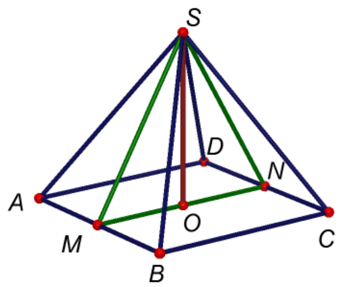
Siga O el centre del quadrat.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$ i N el punt mig de l'aresta $\overline{CD}$.

$\overline{MN} = \overline{MS} = \overline{NS} = 6$.

Aleshores, l'aresta de la base és $\overline{AB} = 6$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MOS}$:



$\overline{OS} = 3\sqrt{3}$.

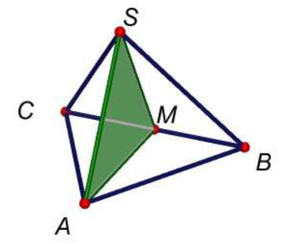
El volum de la piràmide és:

$$V_{ABCDS} = \frac{1}{3}6^2 \cdot 3\sqrt{3} = 36\sqrt{3} \approx 62.354\text{cm}^3.$$

L'àrea de la piràmide ABCDS és:

$$S_{ABCDS} = S_{ABCD} + 4 \cdot S_{ABS} = 6^2 + 4\frac{6 \cdot 6}{2} = 108\text{cm}^2.$$

949.- Siga la piràmide ABCS de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ La secció produïda en la piràmide ABCS per un plànol que passa pel vèrtexs S i a i pel punt mig M de l'aresta de la base $\overline{BC}$ és un triangle equilàter de costat 6cm. Calculeu l'àrea i el volum de la piràmide.



Solució:

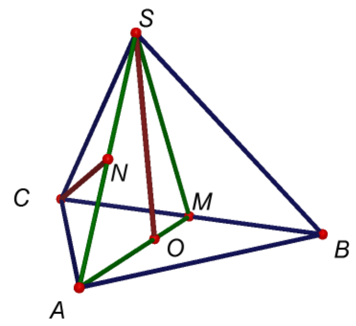
$\overline{AM} = \overline{AS} = \overline{MS} = 6$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMB}$:

$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BS} = \overline{BC} = \overline{CS} = 4\sqrt{3}$.

Siga O el punt mig del segment $\overline{AM}$.

$\overline{OS}$ és l'altura de la piràmide ABCS.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOS}$:

$\overline{OS} = 3\sqrt{3}$.

El volum de la piràmide és:

$$V_{ABCS} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(4\sqrt{3}\right)^2 \cdot 3\sqrt{3} = 36cm^3.$$

Notem que el triangle $\overset{\Delta}{BCS}$ és equilàter de costat $\overline{BC} = 4\sqrt{3}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{ABS}$, $\overset{\Delta}{ACS}$ són iguals.

Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{AS}$.

$\overline{AN} = 3$, $\overline{AC} = 4\sqrt{3}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ANC}$:

$\overline{CN} = \sqrt{39}$.

L'àrea del triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ACS}$ és:

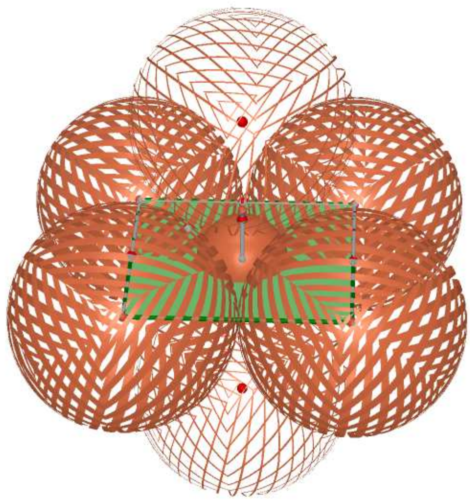
$$S_{ACS} = \frac{1}{2}6\sqrt{39}$$

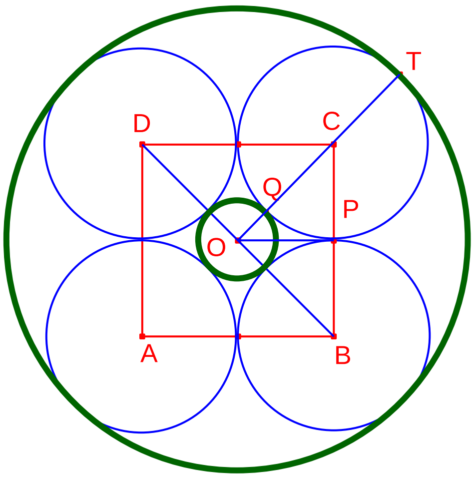
L'àrea de la piràmide ABCDS és:

$$S_{ABCDS} = 2 \cdot S_{ABC} + 2 \cdot S_{ACS} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(4\sqrt{3}\right)^2\right) + 6\sqrt{39} = 79.04cm^2.$$

950.- Sis esferes de radi r es disposen de forma que són tangent i els centres són els vèrtexs d'un octaedre regular.
Determineu els radis de l'esfera tangent interior a les sis esferes i l'esfera tangent exterior a les sis esferes.

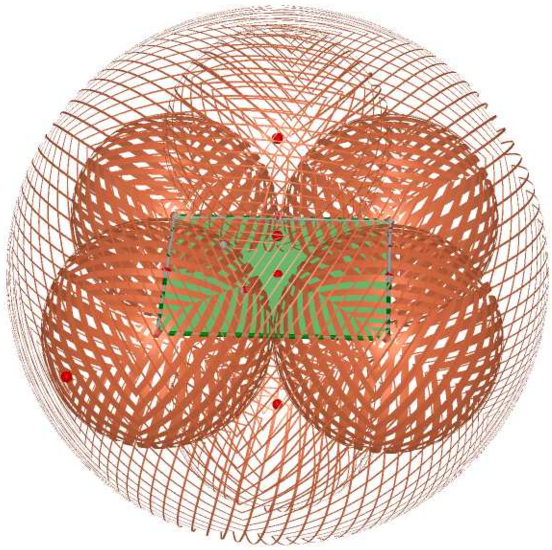
Solució:
Siga ABCD el quadrat que formen els centres de les quatre esferes en el plànol horitzontal del gràfic.
Siga O el centre de l'octaedre que formen els centres de les 6 esferes.





El plànol que ABCD talla les esferes en quatre circumferències de radi r.

El plànol ABCD talla l'esfera tangent interior formant una circumferència de radi s.
Siga P el punt mig de $\overline{BC}$, punt de tangència de dues esferes.
$\overline{OP} = r$
Siga Q el punt de tangència de l'esfera interior a l'octaedre.
$s = \overline{OQ}$.
$\overline{OC} = s + r = \sqrt{2}r$.
Resolent l'equació:
$s = \left(\sqrt{2} - 1\right)r$.



El plànol ABCD talla l'esfera tangent interior formant una circumferència de radi S.
Siga T el punt de tangència de l'esfera exterior a l'octaedre.
$\overline{OT} = S = s + 2r = \left(1 + \sqrt{2}\right)r$.