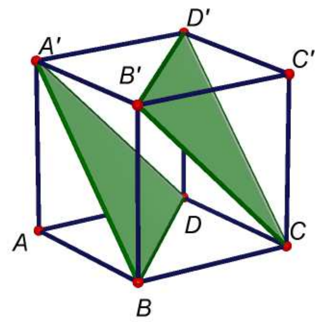
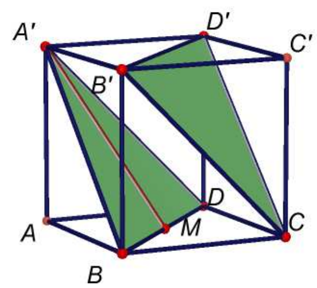
951.- Calculeu el volum i la superfície de la part del cub ABCDA'B'C'D' d'aresta a compresa entres els plànols determinats pels punts A'BD i CB'D'.



Solució:
Els tetraedres ABDA', C'D'B'C són iguals.
El volum de l'antipisma A'BDCB'D' (de base paral·leles A'BD i CB'D') és igual al volum del cub ABCDA'B'C'D' menys dues vegades el volum del tetraedre ABDA':

$$V = a^3 - 2\left(\frac{1}{3}\frac{a^2}{2}a\right) = \frac{2}{3}a^3 .$$



Siga M el punt mig del segment $\overline{BD}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABM}$:

$\overline{BM} = \overline{AM} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$. $\overline{BD} = 2 \cdot \overline{BM} = a\sqrt{2}$.

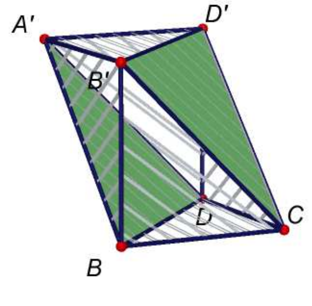
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMA'}$:

$\overline{MA'} = \frac{\sqrt{6}}{2}a$.

L'àrea de l'antiprisma està formada per la suma de les àrees de dos triangles $\overset{\Delta}{BDA'}$ i sis triangles rectangles $\overset{\Delta}{BB'A'}$:

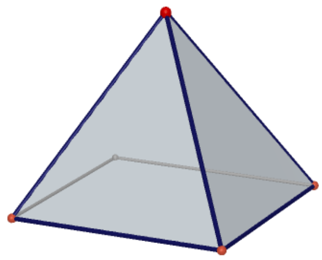
$$S = 2\left(\frac{1}{2}\overline{BD} \cdot \overline{MA'}\right) + 4\left(\frac{1}{2}\overline{B'A'} \cdot \overline{BB'}\right).$$

$$S = 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}\right) + 6\left(\frac{1}{2}a \cdot a\right) = \left(\sqrt{3} + 3\right)a^2 .$$



952.- L'àrea de la superfície lateral d'una piràmide regular quadrangular és el doble de l'àrea de la base.

Si l'aresta de la base mesura 6cm determineu el volum de la piràmide.



Solució:

Siga la piràmide ABCDS de base el quadrat ABCD de costat $\overline{AB} = 6$.

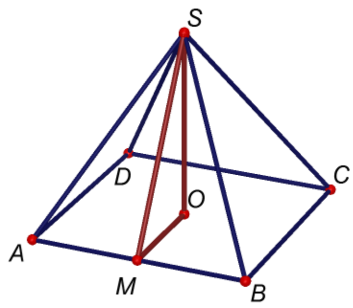
Siga O el centre de la base.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.

Siga $a = \overline{MS}$ apotema d'una cara lateral.

L'àrea de la superfície lateral d'una piràmide regular quadrangular és el doble de l'àrea de la base, aleshores:

$$4\left(\frac{1}{2}6a\right) = 2 \cdot 6^2.$$



Resolent l'equació:

$a = 6$.

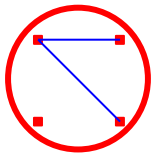
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MOS}$:

$\overline{OS} = 3\sqrt{3}$.

El volum de la piràmide és:

$$V = \frac{1}{3}6^2 \cdot 3\sqrt{3} = 36\sqrt{3} \approx 62.35\text{cm}^2.$$

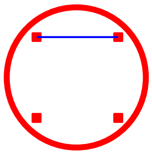
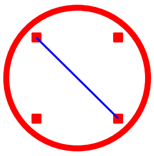
953.- Per cosir botons amb quatre forats es poden formar diversos patrons. Un d'ells és el de la figura. Quants patrons distints és poden formar.



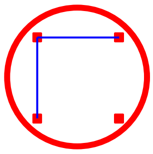
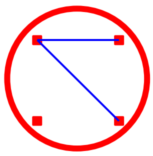
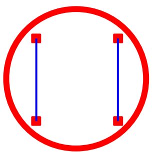
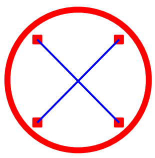
KöMaL, K 379, setembre 2013.

Solució:

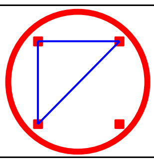
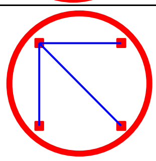
Amb 1 segment de fil:

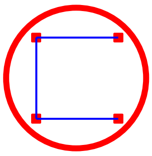
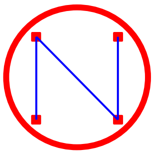
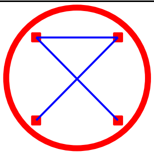
	Total
	4
	2

Amb 2 segments de fil:

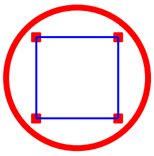
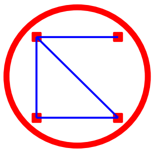
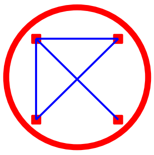
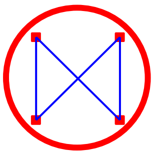
	Total
	4
	8
	2
	1

Amb 3 segments de fil:

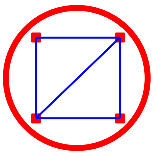
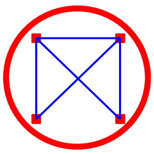
	Total
	4
	4

	4
	4
	4

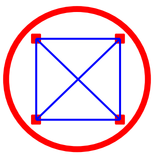
Amb 4 segments de fil:

	Total
	1
	8
	4
	2

Amb 5 segments de fil:

	Total
	2
	4

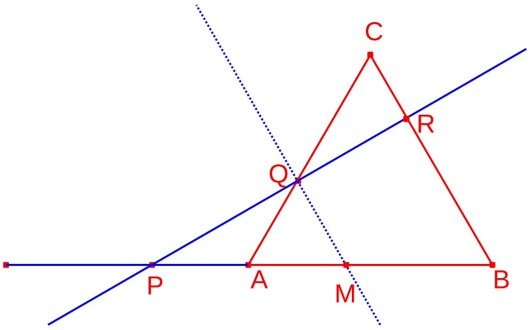
Amb 6 segments de fil:

	Total
	1

Total: 63 patrons distints.

954.- La base $\overline{AB}$ del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ es prolonga més enllà del vèrtex A per dues cinquenes parts de la longitud $\overline{AB}$ per obtenir el punt P.

El punt P està enllaçat amb el punt Q que es troba en el costat $\overline{AC}$ (més prop de A) i divideix el costat en la raó 2:3.
La recta PQ talla el costat $\overline{BC}$ en el punt R.
Si $\overline{AP} = 2684$, determineu la longitud del segment $\overline{CR}$.
KöMaL, K383.



Solució:
Siga $\overline{AB} = 5a$ costat del triangle equilàter.
$\overline{AP}$ és dues cinquenes parts de la longitud $\overline{AB}$:
$\overline{AP} = 2a = 2684$.
Aleshores, $a = 1342$.
Com que $\overline{AQ} : \overline{CQ} = 2 : 3$.
$\overline{AQ} = 2a$.
Pel punt Q tracem una paral·lela al costat $\overline{BC}$ que talla el costat $\overline{AB}$ en el punt M.
$\overline{AM} = \overline{AQ} = 2a$.
Els triangles $\overset{\Delta}{PBR}$, $\overset{\Delta}{PMQ}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{BR}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{QM}}{\overline{PM}}.$$

$$\frac{\overline{BR}}{7a} = \frac{2a}{4a}.$$

$$\overline{BR} = \frac{7}{2}a.$$

$$\overline{CR} = 5a - \overline{BR} = \frac{3}{2}a.$$

$$\overline{CR} = \frac{3}{2}1342 = 2013.$$

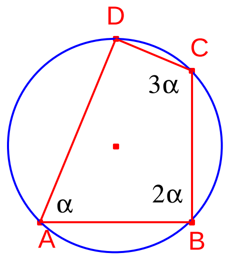
955.- Tres dels angles d'un quadrilàter inscriptible són $\alpha, 2\alpha, 3\alpha$.

Determineu els angles del quadrilàter.
KöMaL B4554.

Solució:
Teorema de Tolomeu.
Un quadrilàter és inscriptible si i només si els angles oposats són suplementaris.

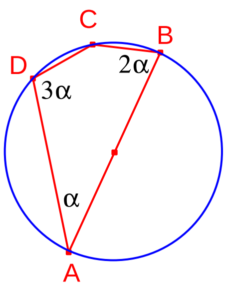
Siga el quadrilàter inscriptible ABCD tal que $A=\alpha$.

a) Suposem que $C=3\alpha$.
$A+C=180^o$.
$\alpha+3\alpha=180^o$. Resolent l'equació:
$\alpha=45^o$.
Si $B=2\alpha=90^o$, $D=90^o$.
La solució és $A=45^o, B=D=90^o, C=135^o$.

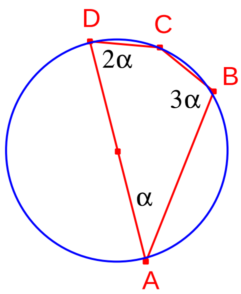


b) Suposem que $C=2\alpha$.
$\alpha+2\alpha=180^o$. Resolent l'equació:
$\alpha=60^o$.
Si $B=3\alpha=180^o$, la qual cosa és absurda.

c) Suposem que $C=180^o-\alpha$.
$B+D=180^o$.
$2\alpha+3\alpha=180^o$. Resolent l'equació:
$\alpha=36^o$.
Si $B=2\alpha=72^o$, $D=3\alpha=108^o$.
Si $B=3\alpha=108^o$, $D=2\alpha=72^o$.



Les solucions són:
$A=36^o, B=72^o, C=144^o, D=108^o$.
$A=36^o, B=108^o, C=144^o, D=72^o$.

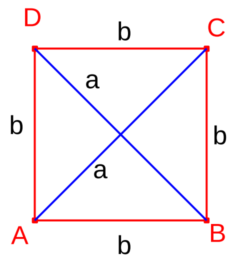


956.- Quatre punts en el plànol estan disposats de tal manera que la distància entre dos punts té exactament dos valors distints a i b $a > b$.

Determineu els possibles valors de $\frac{a}{b}$.

KöMaL B4555. Setembre 2013.

Solució.
Els quatre punts poden formar un quadrat de costat b, un rombe de costat b i angle agut 60º, o bé un cometa de costats b, b, a, a i l'angle que formen els costats a de 60º.
a)
Si els punts A, B, C, D formen un quadrat:

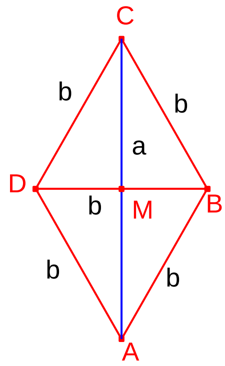


$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = b$, $\overline{AC} = \overline{BD} = a$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$a = b\sqrt{2}$. Aleshores, $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$.

b)
Si els punts A, B, C, D formen un rombe amb angle agut 60º:



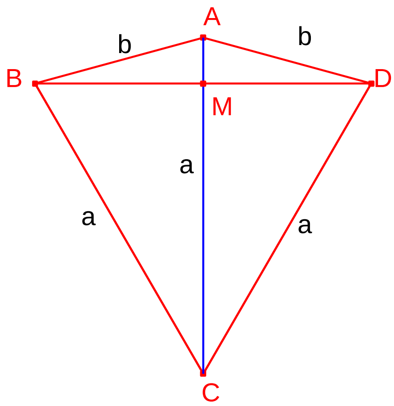
$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = \overline{BD} = b$, $\overline{AC} = a$
Siga M la intersecció de les diagonals.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMB}$:

$\frac{a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}b$. Aleshores, $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$.

c)

Si , B, C, D formen un cometa amb angle agut 60º.



$\overline{AB} = \overline{AD} = b$, $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{AC} = \overline{BD} = a$.
Siga M la intersecció de les diagonals.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMC}$:

$\overline{CM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMA}$:

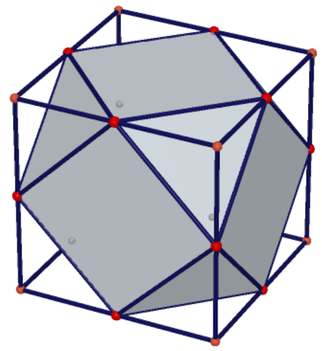
$\overline{AM} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$.

$\overline{AC} = \overline{AM} + \overline{CM}$. $a = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

$a - \frac{\sqrt{3}}{2}a = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$. Elevant al quadrat i simplificant:

$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 + \sqrt{3}$. Aleshores, $\frac{a}{b} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

957.- Donat el cub d'aresta a determineu l'àrea i el volum del cuboctaedre que té els vèrtexs en els punts migs de les arestes del cub.



Solució:

El cuboctaedre té per cares sis quadrats i vuit triangles equilàters.

El cuboctaedre inscrit de per aresta $\frac{\sqrt{2}}{2}a$.

La superfície del cub octàedre és:

$$S = 6\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + 8\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2\right) = \left(3+\sqrt{3}\right)a^2.$$

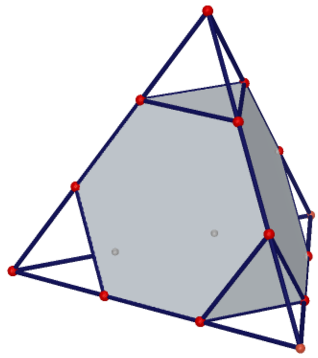
El volum del cuboctaedre és igual al volum del cub menys el volum de vuit tetraedres (de base un triangle rectangle de catets i altura $\frac{1}{2}a$.

El volum és:

$$V = a^3 - 8\left(\frac{1}{3}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a\right)^2\frac{1}{2}a\right) = \frac{5}{6}a^3.$$

958.- Trunquem un tetraedre regular d'aresta a, per cada vèrtex dividint les arestes que formen cada vèrtex per la tercera part (es forma un tetraedre truncat, poliedre semiregular arquimedià).

Determineu l'àrea i la proporció entre els volums del tetraedre truncat i el tetraedre regular.



Solució:

Les arestes del tetraedre truncat mesuren $\frac{a}{3}$.

El tetraedre truncat està format per 4 triangles equilàters i 4 hexàgons regulars, tots de costat $\frac{a}{3}$.

L'àrea de cada hexàgon regular és igual a l'àrea de sis triangles equilàters de costat $\frac{a}{3}$.

L'àrea del tetraedre truncat és:

$$S = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{3}\right)^2\right) + 4\left(6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{a}{3}\right)^2\right)\right) = \frac{7\sqrt{3}}{9}a^2 .$$

Siga V_1 el volum del tetraedre d'aresta a.

Siga V_2 el volum del tetraedre truncat d'aresta $\frac{a}{3}$.

Siga V_3 el volum d'un dels quatre tetraedres regulars que eliminem amb la secció. La seua aresta és $\frac{a}{3}$.

Els dos tetraedres regulars són semblants i la proporció entre els volums és igual al cub de la proporció de les arestes, aleshores:

$$\frac{V_3}{V_1} = \left(\frac{\frac{a}{3}}{a}\right)^3 = \frac{1}{27} .$$

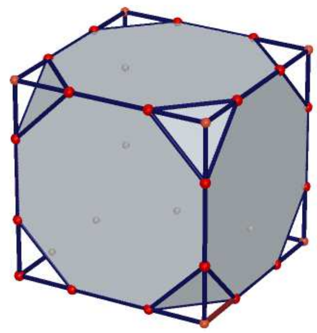
Per tant, $V_3 = \frac{1}{27}V_1$

El volum del tetraedre truncat és:

$$V_2 = V_1 - 4 \cdot V_3 = V_1 - 4 \cdot \frac{1}{27}V_1 = \frac{23}{27}V_1 .$$

La proporció entre els volums del tetraedre truncat i el tetraedre regular és:

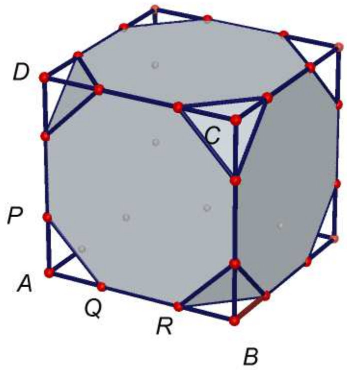
$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{23}{27} .$$



959.- Donat el cub d'aresta a, per truncament s'inscriu el cub truncat (poliedre semiregular format per octògons regulars i triangles equilàters d'igual costat..

a) Determineu la mesura de l'aresta del cub truncat.
b) Determineu l'àrea del cub truncat.
c) Determineu el volum del cub truncat.

Solució:
Siga ABCD el quadrat format per una de les cares del cub.
$\overline{AB} = a$
Siga P, Q, R tres vèrtexs consecutius de l'octògon regular d'una de les cares del cub truncat.
Siga $\overline{PQ} = \overline{QR} = x$ arestes del cub truncat.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{APQ}$:



$\overline{AQ} = \overline{AP} = \overline{BR} = \frac{\sqrt{2}}{2}x$.
$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{AQ} + \overline{QR}$.
$a = x\sqrt{2} + x$. Resolent l'equació:
$x = \left(\sqrt{2} - 1\right)a$.
L'àrea del cub truncat és igual a l'àrea del cub menys l'àrea de 24 triangles rectangles $\overset{\Delta}{APQ}$:

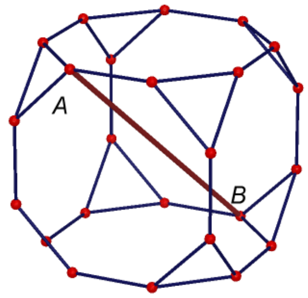
$$S = 6a^2 - 24\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2\right) = 6a^2 - 6\left(\sqrt{2}-1\right)^2 a^2 = 12\left(\sqrt{2}-1\right)a^2.$$

El volum del cub truncat és igual al volum del cub menys el volum de 8 tetraedres de base el triangle rectangle isòsceles de catets $\overline{AQ} = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ i altura $\frac{\sqrt{2}}{2}x$:

$$V = a^3 - 8\left(\frac{1}{3}\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)^2 \frac{\sqrt{2}}{2}x\right) = a^3 - \frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\right)^3 a^3 = \frac{7\sqrt{2}-7}{3}a^3.$$

El cub truncat ocupa aproximadament el 97% del volum de cub.

960.- En el cub truncat d'aresta a calculeu la mesura de la diagonal $\overline{AB}$.



Solució:

Siga el cub truncat d'aresta $\overline{AC} = \overline{DE} = a$.

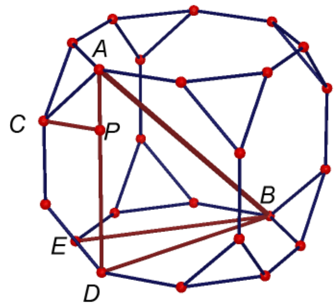
Siga P la projecció de C sobre el segment $\overline{AD}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{APC}$:

$$\overline{AP} = \overline{CP} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

$$\overline{AD} = 2 \cdot \overline{AP} + a = \left(1+\sqrt{2}\right)a.$$

$$\overline{BE} = \overline{AD} = \left(1+\sqrt{2}\right)a.$$



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{EDB}$:

$$\overline{BD} = \sqrt{\overline{DE}^2 + \overline{BE}^2} = a\sqrt{4+2\sqrt{2}}\ .$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ADB}$:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2} = a\sqrt{7+4\sqrt{2}}\ .$$

El radi de la circumferència circumscrita al cub truncat és

$$r = \frac{\overline{AB}}{2} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2} = \frac{\sqrt{7+4\sqrt{2}}}{2}a.$$