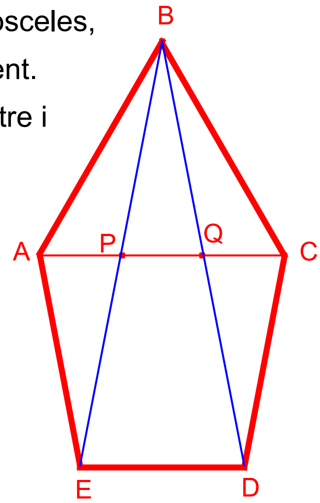
Problemes de Geometria per a l'ESO 97

961.- En la figura $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle equilàter i ACDE és un trapezi isòsceles, tal que $\overline{BE}$, $\overline{BD}$, tallen el segment $\overline{AC}$ en els punts P i Q, respectivament. Si $\overline{AP}:\overline{PQ}:\overline{QC}=1:1:1$, $\overline{ED}:\overline{AC}=2:3$, $\overline{ED}=1$, determineu el perímetre i l'àrea del pentàgon ABCDE.



Solució:

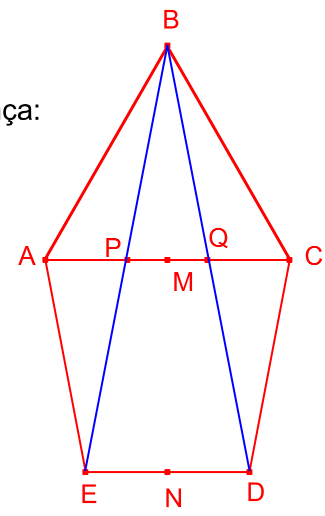
Siga M el punt mig del segment $\overline{PQ}$. M és el punt mig de $\overline{AC}$.

Siga N el punt mig del segment $\overline{ED}$.

$\overline{PQ}=\frac{1}{3}\overline{AC}$.

$\overline{ED}:\overline{AC}=2:3$, aleshores, $\overline{AC}=\frac{3}{2}\overline{ED}=\frac{3}{2}$.

$\overline{PQ}=\frac{1}{3}\overline{AC}=\frac{1}{2}$. $\overline{PM}=\frac{1}{2}\overline{PQ}=\frac{1}{4}$.



Els triangles isòsceles $\overset{\Delta}{PBQ}$, $\overset{\Delta}{EBD}$ són semblants i la raó de semblança:

$\overline{PQ}:\overline{ED}=1:2$.

Aplicant el teorema de Tales:

$\overline{BQ}=\overline{CD}$, $\overline{BM}=\overline{MN}$

Els triangles $\overset{\Delta}{PBQ}$, $\overset{\Delta}{CDQ}$ són iguals. Aleshores, $\overline{BP}=\overline{CD}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMB}$:

$\overline{BM}=\frac{3}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$. Aleshores, $\overline{BM}=\overline{MN}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PMB}$.

$\overline{BP}=\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{2}$. Aleshores, $\overline{CD}=\overline{BP}=\frac{\sqrt{7}}{2}$.

El perímetre del pentàgon ABCDE és:

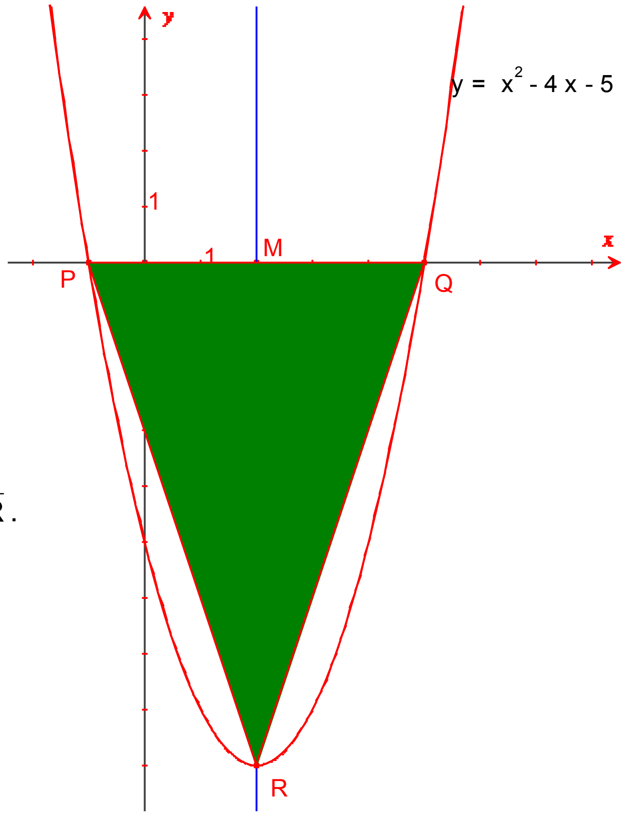
$P_{ABCDE}=\overline{ED}+2\overline{AB}+\overline{CD}=1+2\frac{3}{2}+2\frac{\sqrt{7}}{2}=4+\sqrt{7}\approx 6.65$.

L'àrea del pentàgon ABCDE és igual a la suma de les àrees del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i del trapezi ACDE.

$$S_{ABCDE}=S_{ABC}+S_{ACDE}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{BM}}{2}+\frac{\overline{ED}+\overline{AC}}{2}\overline{MN}=\frac{\frac{3}{2}\frac{3\sqrt{3}}{4}}{2}+\frac{1+\frac{3}{2}}{2}\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}\approx 2.60.$$

962.- Donada la paràbola $y = x^2 - 4x - 5$, determineu l'àrea i el perímetre del triangle determinat pels punts de tall P, Q, de la paràbola i l'eix d'abscisses i el vèrtex R.

Solució:
Determinem els punts de tall de la paràbola i l'eix d'abscisses:
$x^2 - 4x - 5 = 0$.
Resolent l'equació:
$x = -1, 5$.
Els punts de tall són $P(-1, 0)$, $Q(5, 0)$.
El vèrtex de la paràbola té coordenades
$R\left(\frac{-b}{2a}, y\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$.
$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2 \cdot 1} = 2$. $y(2) = -9$.
Les coordenades del vèrtex són:
$R(2, -9)$.



Notem que el triangle $\overset{\Delta}{PQR}$ és isòsceles, $\overline{PR} = \overline{QR}$.
Siga M el punt mig del segment $\overline{PQ}$.
$\overline{PQ} = 6$, $\overline{MR} = 9$.
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PQR}$ és:
$S_{PQR} = \frac{\overline{PQ} \cdot \overline{MR}}{2} = \frac{6 \cdot 9}{2} = 27$.
$\overline{PM} = 3$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PMR}$
$\overline{PR} = \sqrt{3^2 + 9^2} = \sqrt{90}$.
El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{PQR}$ és:
$P_{PQR} = \overline{PQ} + 2 \cdot \overline{PR} = 6 + 2\sqrt{90} = 6 + 6\sqrt{10} \approx 24.97$.

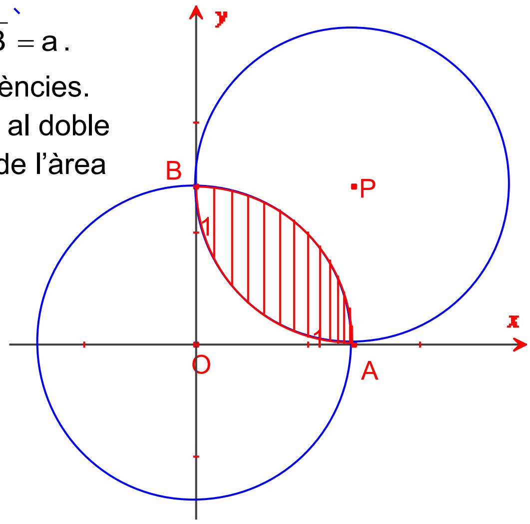
963.- Donades les circumferències d'equacions $x^2+y^2=a^2$, $x^2+y^2=2ax+2ay-a^2$ $a>0$.
Determineu el valor de a a fi que l'àrea de la intersecció de les dues circumferències siga $\pi-2$.

Solució:

La circumferència $x^2+y^2=a^2$ té centre $O(0,0)$ i radi $\overline{OA}=\overline{OB}=a$.

La circumferència $x^2+y^2=ax+ay-a^2$ és:

$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$, té centre $P(a,a)$ i radi $\overline{PA}=\overline{PB}=a$.



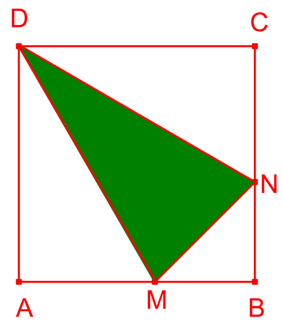
Notem que A i B és la intesecció de les dues circumferències.
L'àrea intersecció de les dues circumferències és igual al doble l'àrea del quadrant de cercle de radi a menys el doble de l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAB}$:

$$S=2\left(\frac{1}{4}\pi a^2-\frac{1}{2}a^2\right)=\pi-2.$$

Resolent l'equació:

$a=\sqrt{2}$.

964.- En el quadrat ABCD s'ha inscrit el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{DMN}$ tal que l'angle $\angle MDN = 30^{\circ}$. Determineu la raó entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{DMN}$ i el quadrat ABCD.



Solució:

Siga $c = \overline{AB}$ costat del triangle.

$\angle ADM = \angle CDN = 30^{\circ}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMD}$:

$$\overline{DM} = \overline{DN} = \frac{2\sqrt{3}}{3}c.$$

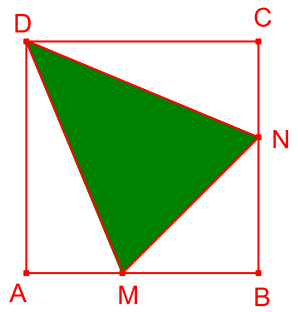
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DMN}$:

$$S_{DMN} = \frac{\overline{DM} \cdot \overline{DN} \cdot \sin 30^{\circ}}{2} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}c\frac{2\sqrt{3}}{3}c\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{3}c^2.$$

La proporció entre el triangle i el quadrat és:

$$\frac{S_{DMN}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{3}c^2}{c^2} = \frac{1}{3}.$$

965.- En el quadrat ABCD s'ha inscrit el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{DMN}$ tal que l'angle $\angle MDN = 45^\circ$. Determineu la raó entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{DMN}$ i el quadrat ABCD.



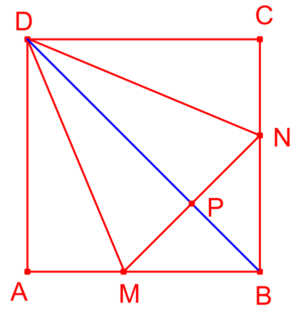
Solució:

Siga $c = \overline{AB}$ costat del triangle.

$\angle ADM = \angle CDN = \frac{45^\circ}{2}$.

Sia P el punt mig del segment $\overline{MN}$.

$\angle PDM = \frac{45^\circ}{2}$.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AMD}$, $\overset{\Delta}{PMD}$ són iguals.

Aleshores, $\overline{DP} = c$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABD}$:

$\overline{BD} = c\sqrt{2}$.

$\overline{PB} = \overline{BD} - \overline{DP} = \left(\sqrt{2}-1\right)c$

L'àrea quadrat ABCD és igual a dues vegades l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{DMN}$ més l'àrea del quadrat de costat $\overline{PB} = \left(\sqrt{2}-1\right)c$

$S_{ABCD} = c^2 = 2\cdot S_{DMN} + \left(\sqrt{2}-1\right)^2 c^2$.

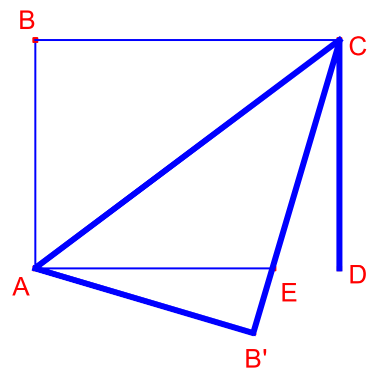
$2\cdot S_{DMN} = 2\left(\sqrt{2}-1\right)c^2$

$S_{DMN} = \left(\sqrt{2}-1\right)c^2$

La proporció de l'àrea entre el triangle i el quadrat és:

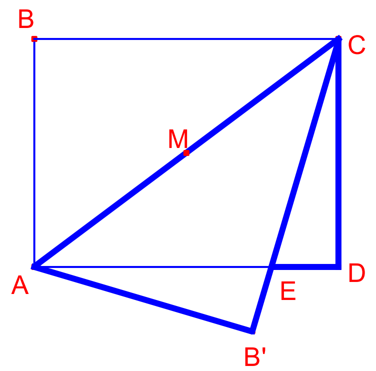
$$\frac{S_{DMN}}{S_{ABCD}} = \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)c^2}{c^2} = \sqrt{2}-1.$$

966.- Un rectangle ABCD de $4\text{cm}\times 3\text{cm}$, és doblega per la diagonal $\overline{AC}$ i és forma el pentàgon ACDEB'.
Determineu el seu perímetre i la seua àrea.



Solució:
$\overline{CD}=\overline{AB'}=3$. $\angle EAB'=\angle ECD$. Aleshores:

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{CDE}$, $\overset{\Delta}{AB'E}$ són iguals.
$\overline{AE}=\overline{CE}$, $\overline{DE}=\overline{B'E}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AC}=5$.
Siga M el punt mig de la diagonal $\overline{AC}$.

$$\overline{AM}=\overline{ME}=\frac{\overline{AC}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AME}$, $\overset{\Delta}{ADC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AE}}=\frac{4}{5}.$$

$$\overline{AE}=\frac{5\sqrt{5}}{8}.$$

$$\overline{DE}=\overline{AD}-\overline{AE}=4-\frac{5\sqrt{5}}{8}.$$

El perímetre del pentàgon ACDEB' és:

$$P_{ADCEB'}=\overline{AC}+2\cdot\overline{CD}+2\cdot\overline{DE}=5+2\cdot 3+2\left(4-\frac{5\sqrt{5}}{8}\right)=19-\frac{5\sqrt{5}}{4}\approx 21.80\text{cm}.$$

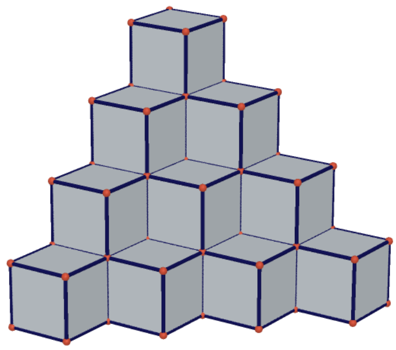
L'àrea del pentàgon ACDEB' és:

$$S_{ADCEB'}=S_{AB'C}+S_{EDC}=\frac{3\cdot 4}{2}+\frac{\left(4-\frac{5\sqrt{10}}{8}\right)3}{2}=12-\frac{15\sqrt{5}}{16}\approx 9.90\text{cm}^2.$$

967.-

a)

Ompli la taula que relacione el nombre de pisos i l'àrea de la figura (cada cub té aresta 1).



Pisos	1	2	3	4	5	6	7	8
Àrea	6	18						

b)

Ompli la taula que relacione el nombre de pisos i l'àrea de la figura.

Pisos	1	2	3	4	5	6	7	8
Volum	1	4						

Generalitzeu els resultats.

Solució:

a)

Pisos	1	2	3	4	5	6	7	8
Àrea	6	18	36	60	90	126	168	216

Nombres triangulars $T_n = \{1, 3, 6, 10, 15, ...\}$.

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Cada cara és un nombre triangular.

A successió de les àrees és:

$$S_n = 6T_n = 6\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = 3n(n+1).$$

b)

Pisos	1	2	3	4	5	6	7	8
Volum	1	4	10	20	35	56	84	120

Nombres triangulars $T_n = \{1, 3, 6, 10, 15, ...\}$.

El nombre de cubs de cada pis és la successió de nombres triangular.

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

El volum cercat és la suma dels nombres triangulars.

$$V_n = \{1, 1+3, 1+3+6, 1+3+6+10, 1+3+6+10+15, ...\}$$

A successió de les àrees és:

$$V_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

968.- Donada la circumferència circumscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A=50^o$, $B=70^o$, determineu els angles del triangle format per les tangents a la circumferència en els vèrtexs.

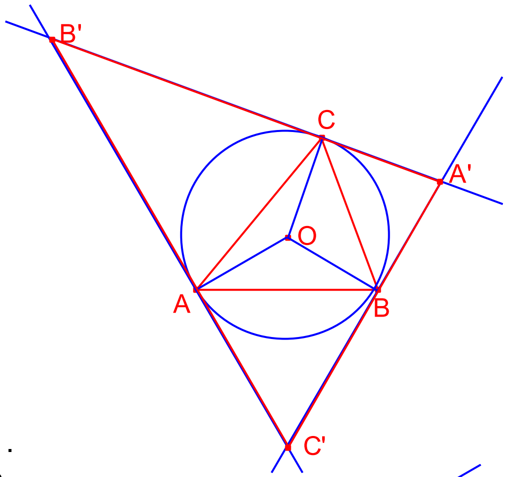
Solució:

$C=180^o-(A+B)=60^o$.

Aleshores, el triangle és acutangle.

El circumcentre O del triangle pertany a l'interior de la circumferència.

Siga $\overset{\Delta}{A'B'C'}$ el triangle format per les tangents a la circumferència en els vèrtexs.



$\angle OCB'=\angle OCA'=90^o$.

$\angle OAB'=\angle OAC'=90^o$.

$\angle OBA'=\angle OBC'=90^o$.

Per ser $\angle BOC$ angle central:

$\angle BOC=2A=100^o$.

Aleshores, $A'=180^o-\angle BOC=80^o$.

Per ser $\angle BOC$ angle central:

$\angle BOC=2A=100^o$.

Aleshores, $A'=180^o-\angle BOC=80^o$.

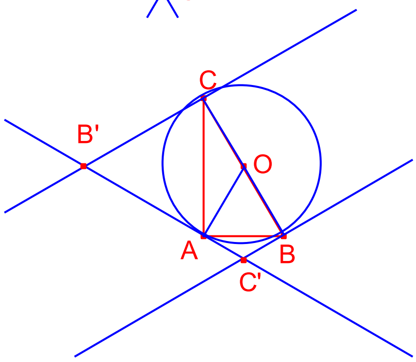
Anàlogament:

$\angle AOC=2B=140^o$. Aleshores, $B'=180^o-\angle AOC=40^o$.

$\angle AOB=2C=120^o$. Aleshores, $C'=180^o-\angle AOB=60^o$.

Nota 1:

Si el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és rectangle no s'hi forma triangle amb les tangents.



Nota 2: Si A és obtús. El circumcentre del triangle és exterior al triangle i pertany a la regió que formen les semirectes AB, AC.

Suposem al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A=100^o$, $B=60^o$.

$C=180^o-(A+B)=20^o$.

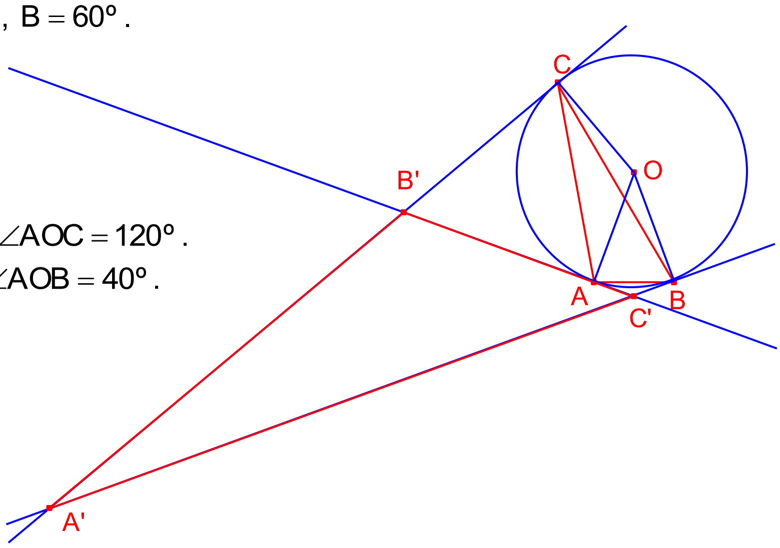
Per ser $\angle BOC$ angle central:

$\angle BOC=360^o-2A=160^o$.

Aleshores, $A'=180^o-\angle BOC=20^o$.

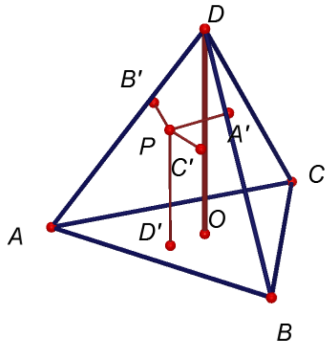
$\angle AOC=2B=120^o$. Aleshores, $B'=\angle AOC=120^o$.

$\angle AOB=2C=40^o$. Aleshores, $C'=\angle AOB=40^o$.



969.- La suma de distàncies d'un punt interior d'un tetraedre regular a les cares és igual a l'altura del tetraedre.

Solució:



Siga el tetraedre regular ABCD.

Siga P un punt interior al tetraedre.

Siga A' la projecció de P sobre la cara $\overset{\Delta}{BCD}$.

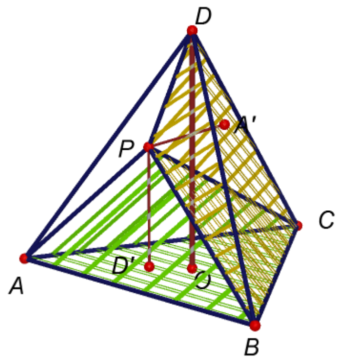
Siga B' la projecció de P sobre la cara $\overset{\Delta}{ACD}$.

Siga C' la projecció de P sobre la cara $\overset{\Delta}{ABD}$.

Siga D' la projecció de P sobre la cara $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga O la projecció de D sobre la cara $\overset{\Delta}{ABC}$.

L'altura del tetraedre ABCD és $\overline{OD}$.



El volum del tetraedre ABCD és:

$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overline{OD}$.

El volum del tetraedre ABCD és igual a la suma dels volums dels tetraedres ABCP, ABDP, ACDP i BCDP.

$V_{ABCD} = V_{ABCP} + V_{ABDP} + V_{ACDP} + V_{BCDP}$.

$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overline{PB'} + \frac{1}{3} S_{ABD} \cdot \overline{PC'} + \frac{1}{3} S_{ACD} \cdot \overline{PB'} + \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot \overline{PA'}$.

$V_{ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABC} \left(\overline{PB'} + \overline{PC'} + \overline{PB'} + \overline{PA'} \right)$.

Aleshores:

$\frac{1}{3} S_{ABC} \left(\overline{PB'} + \overline{PC'} + \overline{PB'} + \overline{PA'} \right) = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overline{OD}$.

Per tant, $\overline{PA'} + \overline{PB'} + \overline{PC'} + \overline{PD'} = \overline{OD}$.

970.- Determineu el volum i la superfície d'un octaedre els vèrtexs del qual són els centres de les cares d'un ortoedre d'arestes 3cm, 4cm, 5cm.

Solució:

Siga ABCDA'B'C'D' l'ortoedre d'arestes $\overline{AB}=3, \overline{AD}=4, \overline{AA'}=5$.

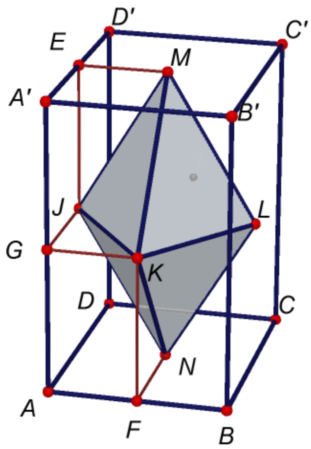
Siga IJKLMN l'octaedre format pels punts migs de les cares de l'ortoedre.

Siga $x=\overline{JM}=\overline{LM}=\overline{JN}=\overline{LN}$, $y=\overline{KM}=\overline{IM}=\overline{KN}=\overline{IN}$, $z=\overline{JK}=\overline{KL}=\overline{LI}=\overline{IJ}$.

IJKL és un rombe de diagonals $\overline{JL}=3$, $\overline{IK}=4$.

El volum de l'octaedre és igual a dues vegades el volum de la piràmide de base el vombe IJKL i altura $\frac{\overline{MN}}{2}$:

$$V=2\left(\frac{1}{3}\frac{3\cdot 4}{2}\frac{5}{2}\right)=10cm^3.$$



Les cares de l'octaedre són iguals.

Siga E el punt mig de l'aresta $\overline{A'D'}$.

Siga F el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.

Siga G el punt mig de l'aresta $\overline{AA'}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MEJ}$:

$$x=\sqrt{\frac{17}{2}}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{KFN}$:

$$y=\frac{\sqrt{41}}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{JGK}$:

$$z=\frac{5}{2}.$$

L'àrea del octaedre és igual a vuit vegades l'àrea del triangle de costats x, y, z.

Aplicant la fórmula d'Heró:

$$S=8\left(\frac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{4}\right)=8\frac{\frac{\sqrt{769}}{2}}{4}=\sqrt{769}\approx 27.73cm^2.$$