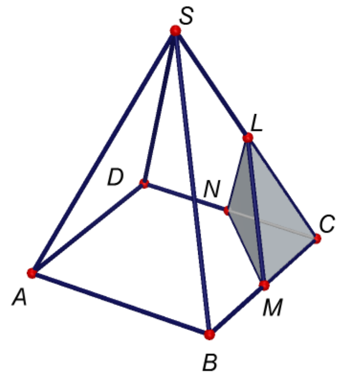
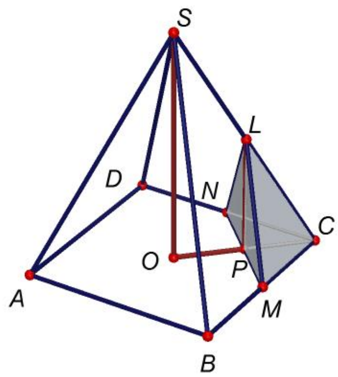
Problemes de Geometria per a l'ESO 98



971.- Determineu la relació entre els volums dels dos cossos formats per la secció d'una piràmide regular quadrangular per un plànol que passa pels punts migs de cos costats contigus de la base perpendicularment a aquesta.

Solució:



Siga ABCDS la piràmide regular de base el quadrat ABCD.
Siga O el centre de la base
Siga $\overline{AB} = a$ aresta de la base. $\overline{OS} = h$ altura.
El volum de la piràmide ABCDS és:

$$V_{ABCDS} = \frac{1}{3}a^2h$$

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.
Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{CD}$.
La secció que determina el plànol que passa pels punts M, N i és perpendicular a la base és el triangle $\overset{\Delta}{MNL}$
La secció anterior forma el tetraedre MNCL, tal que $\overset{\Delta}{MNL}$ és perpendicular a la base $\overset{\Delta}{MNC}$.
Siga P el punt mig del segment $\overline{MN}$.
$\overline{PL}$ és l'altura del tetraedre MNCL.

$$\overline{CM} = \overline{CN} = \frac{1}{2}a.$$

Els triangles $\overset{\Delta}{BSD}$, $\overset{\Delta}{MLN}$ són semblants i de raó 2:1.
Aplicant el teorema de tales:

$$\overline{PL} = \frac{1}{2}\overline{OS} = \frac{1}{2}h.$$

El volum del tetraedre MNCL és:

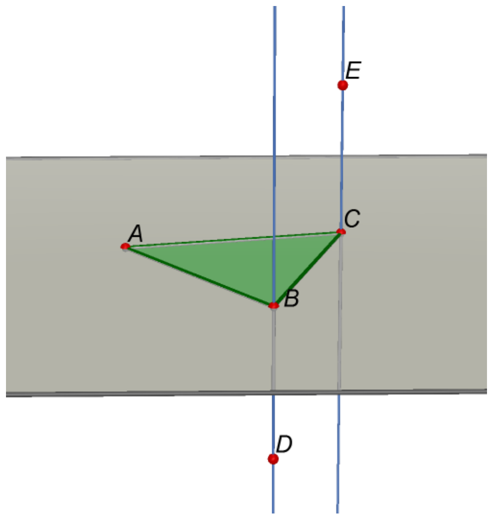
$$V_{MNCL} = \frac{1}{3}\frac{a^2}{8}\frac{h}{2} = \frac{1}{48}a^2h.$$

La proporció entre el volum del tetraedre MNCL i el que resta del tetraedre inicial és:

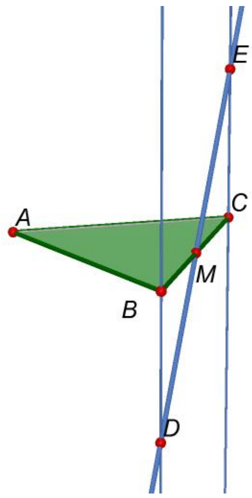
$$\frac{V_{MNCL}}{V_{resta}} = \frac{\frac{1}{24}a^2h}{\frac{1}{3}a^2h - \frac{1}{48}a^2h} = \frac{1}{15}$$

972.- En un plànol es troba el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat a.
En les perpendiculars, en els punts B i C al plànol, un per cada costat, s'agafen els punts D i E, respectivament, tal que $\overline{BD}=\frac{a}{\sqrt{2}}$, $\overline{CE}=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

Demostreu que el triangle $\overset{\Delta}{DAE}$ és rectangle.
Calculeu la seua àrea i l'angle diedre que forma el plànol DAE i el plànol que conté el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.



Solució:
La recta DE talla el costat $\overline{BC}$ en el punt mig M.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACE}$:

$$\overline{AE}=\overline{AD}=\sqrt{a^2+\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}=a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MCE}$:

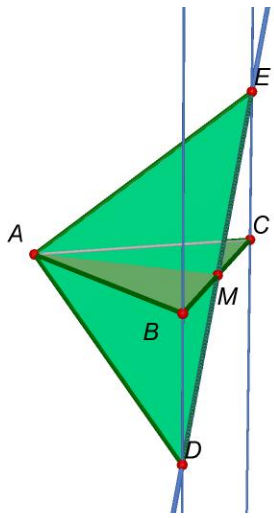
$$\overline{ME}=\overline{MD}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2}=a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\overline{DE}=2\overline{MD}=a\sqrt{3}.$$

Notem que $\overline{DE}^2=\overline{AE}^2+\overline{AD}^2$, aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{DAE}$ és rectangle.

La seua àrea és:

$$S_{DAE}=\frac{1}{2}\overline{AD}\cdot\overline{AE}=\frac{3}{4}a^2.$$



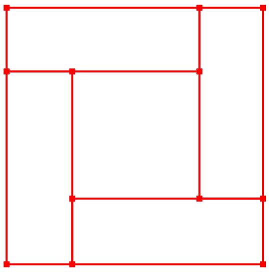
Notem que la recta AM és la recta intersecció dels plànols DAE , ABC.
L'angle diedre dels dos plànols és l'angle $\alpha=\angle CME$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MCE}$:

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{\overline{CE}}{\overline{CM}}=\frac{\frac{a}{\sqrt{2}}}{\frac{a}{2}}=\sqrt{2}.$$

$$\alpha=\mathrm{arctg}\sqrt{2}\approx 54^{o}44'8''.$$

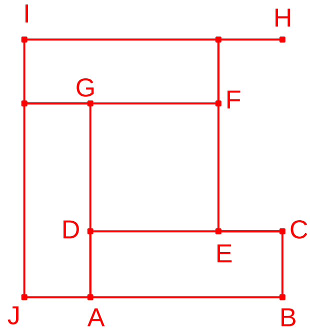
973.- S'han disposat quatre rectangles iguals formant un quadrat exterior i un quadrat interior (veure figura).



Si el perímetre del quadrat interior és igual al perímetre d'un rectangle, determineu la proporció entre les àrees dels quadrat exterior i el quadrat interior.

KöMaL K387.

Solució:



Siguen $\overline{AB} = x$, $\overline{AD} = y$ les dimensions del rectangle ABCD.

El costat del quadrat DEFG mesura: $\overline{DE} = x - y$.

El costat del quadrat BHIJ mesura $\overline{JB} = x + y$.

El perímetre del quadrat interior és igual al perímetre del rectangle, aleshores:

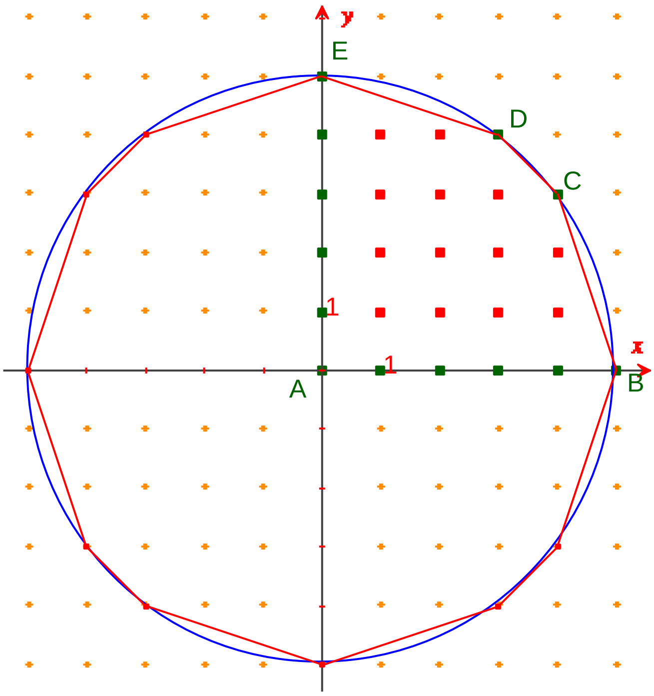
$4(x - y) = 2(x + y)$. Simplificant:

$x = 3y$.

La proporció entre les àrees del quadrat exterior i el quadrat interior és:

$$\frac{S_{BHIJ}}{S_{DEFG}} = \frac{(x+y)^2}{(x-y)^2} = \frac{(4x)^2}{(2x)^2} = 4.$$

974.- En el plànol cartesià s'ha dibuixat una circumferència de centre l'origen de coordenades i radi 5.
En el plànol s'ha dibuixat una graella quadriculada de costat unitat.
Els punts de la graella determinen una polígon en la circumferència .
Determineu la seua àrea.
KöMaL C1183.

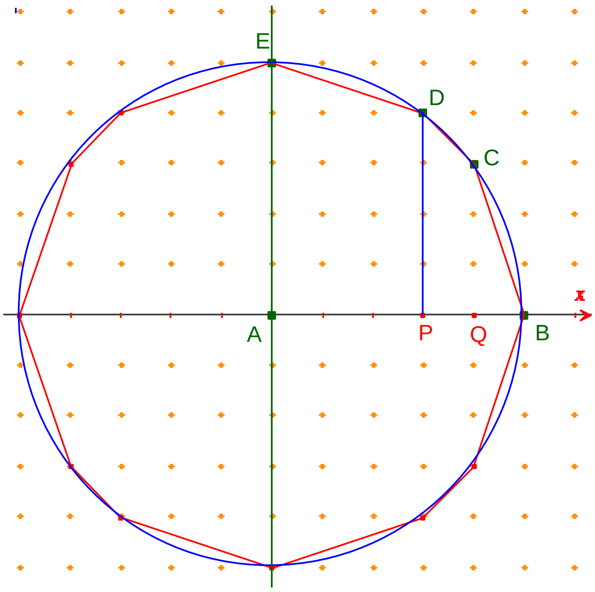


Solució 1:
Utilitzarem en teorema de Pick

Teorema de Pick.
Si els vèrtexs d'un polígon pertanyen a una graella quadrangular l'àrea del polígon en funció de l'àrea de quadrat menut de la graella és:
$S = I + \frac{B}{2} - 1$, on I és igual als punts interiors al polígon. B els punts que pertanyen a la vora.

Notem que la circumferència de radi 5 conté en el primer quadrant 4 punts de la graella:
$B(5,0), C(4,3), D(3,4), E(0,5)$.
Siga $A(0,0)$ centre de la circumferència.

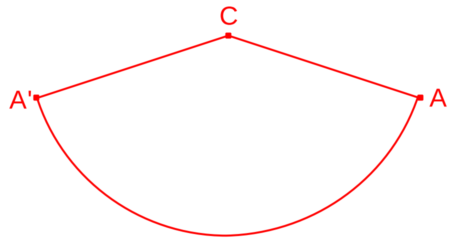
L'àrea del polígon és igual a 4 vegades l'àrea del polígon ABCDE.
En aquest polígon:
$I = 13$, $B = 13$.
Aleshores l'àrea del polígon és:
$$S = 4\left(13 + \frac{13}{2} - 1\right) = 94 .$$



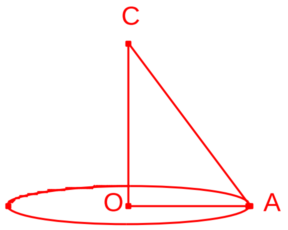
Solució 2:
Notem que la circumferència de radi 5 conté en el primer quadrant 4 punts de la graella:
$B(5,0), C(4,3), D(3,4), E(0,5)$.
Siga $A(0,0)$ centre de la circumferència.
Siguen $P(3,0), Q(4,0)$.
L'àrea del polígon és igual a 4 vegades l'àrea del polígon ABCDE.
L'àrea del polígon ABCDE és igual a la suma de les àrees dels trapezis APDE, PQCD i el triangle $\overset{\Delta}{QBC}$:
$$S = 4 \cdot S_{ABCDE} = 4(S_{APDE} + S_{PQCD} + S_{QBC}) = 4\left(\left(\frac{5+4}{2}3\right) + \left(\frac{4+3}{2}1\right) + \left(\frac{3 \cdot 1}{2}\right)\right) = 94 .$$

975.- Enrotllat un sector circular s'ha construït una superfície cònica tal que l'altura del con és quatre cinquenes parts del radi del sector.
Determineu la mesura de l'angle central del sector circular.
KöMaL C1188

Solució.
Siga C el centre del sector (vèrtex del con) i $\overline{CA} = g$ radi del sector (generatriu del con.
Siga $\overline{OC}$ altura del con:



$\overline{OC} = \frac{4}{5}g$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAC}$:
$\overline{OA} = \frac{3}{5}g$, radi del con.
L'arc que abraça el sector és igual a la longitud de la circumferència de radi $\overline{OA} = \frac{3}{5}g$.



La longitud de l'arc és:

$$\overset{\frown}{AA'} = 2\pi\frac{3}{5}g.$$

Siga $\alpha = \angle ACA'$ angle central del sector.
La longitud de l'arc és:

$$\overset{\frown}{AA'} = 2\pi g\frac{\alpha}{360^o}.$$

Igualant les dues expressions:
$2\pi\frac{3}{5}g = 2\pi g\frac{\alpha}{360^o}$. Resolent l'equació:
$\alpha = 216^o$.

976.- En una piràmide regular quadrangular el plànol que passa per una de les arestes de la base i la línia mitjana de la cara lateral oposada forma un angle de 60º amb la base.

Calculeu el volum si l'aresta de la base és a.

Solució:

Siga ABCDS la piràmide regular de base el quadrat ABCD de costat a.

Siga EF la pral·lela mitjana de la cara $\overset{\Delta}{CDS}$,

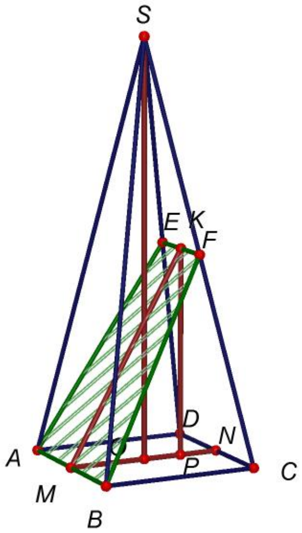
Siguen M, N, els punts migs de les arestes $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, respectivament.

Siga K el punt mig del segment $\overline{EF}$.

$\angle KMN = 60º$.

Siga O el centre de la base. Siga $\overline{OS} = h$ altura de la piràmide.

Siga P la projecció de K sobre la base ABCD.



$$\overline{PK} = \frac{1}{2}\overline{OS} = \frac{h}{2}, \quad \overline{PN} = \frac{1}{2}\overline{ON} = \frac{a}{4}.$$

$$\overline{MP} = \frac{3a}{4}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MPK}$.

$$\frac{h}{2} = \frac{3a}{4}\sqrt{3}.$$

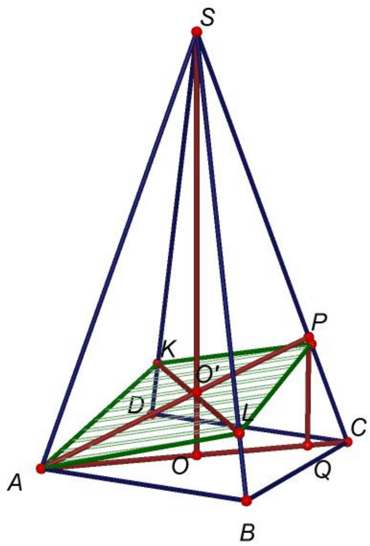
Aleshores, $h = \frac{3\sqrt{3}}{2}a$.

El volum de la piràmide és:

$$V_{ABCDS} = \frac{1}{3}a^2h = \frac{1}{3}a^2\,\frac{3\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2.$$

977.- Per un dels vèrtexs de la base d'una piràmide regular quadrangular s'ha dibuixat un plànol perpendicular a l''aresta lateral oposada.
Determineu l'àrea de la secció si l'aresta de la base és 1 i l'aresta lateral és 2.

Solució:
Siga ABCDS la piràmide regular de base el quadrat ABCD de costat 1.
Siga la secció AKPL tal que $\overline{AP}$ és perpendicular a l'aresta $\overline{CS}$.
$\overline{AK} = \overline{AL}$, $\overline{PK} = \overline{PL}$.
$\overline{AC} = \overline{BD} = \sqrt{2}$.
$\overline{OS} = \frac{\sqrt{14}}{2}$.



L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ACS}$ és:
$$S_{ACS} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{OS}}{2} = \frac{\overline{CS} \cdot \overline{AP}}{2}.$$
$$\frac{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{14}}{2}}{2} = \frac{2 \cdot \overline{AP}}{2}.$$
Aleshores, $\overline{AP} = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{APC}$:
$\overline{CP} = \frac{1}{2}$.
$\overline{PS} = \frac{3}{2}$.
Siga Q la projecció de P sobre la base ABCD.
Siga O' el punt mig del segment $\overline{KL}$.
Els triangles $\overset{\Delta}{OCS}$, $\overset{\Delta}{QCP}$ són semblants i la raó de semblança és 4:1.
Aleshores, $\overline{PQ} = \frac{1}{4}\overline{OS}$. $\overline{CQ} = \frac{1}{4}\overline{OC} = \frac{1}{8}\overline{AC}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{AOO'}$, $\overset{\Delta}{AQP}$ són semblants i la raó de semblança és 4:7.
Aleshores, $\overline{OO'} = \frac{4}{7}\overline{PQ} = \frac{1}{7}\overline{OS}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{BDS}$, $\overset{\Delta}{LKS}$ són semblants i la raó de semblança és 7:6.
Aleshores, $\overline{KL} = \frac{6}{7}\overline{BD} = \frac{6}{7}\sqrt{2}$.
L'àrea de la secció AKPL és:
$$S_{AKPL} = \frac{1}{2}\overline{AP} \cdot \overline{KL} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{7}}{2}\frac{6}{7}\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{14}}{14}.$$

978.- L'aresta de la base d'una piràmide triangular regular és a i les arestes laterals b. Determineu l'angle diedre de dues cares laterals.

Solució:

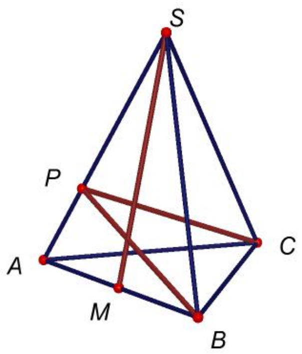
Siga la piràmide triangular regular ABCS, de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga $\overline{AB} = a$, $\overline{AS} = \overline{BS} = b$.

Sig P la projecció de B sobre l'aresta $\overline{AS}$.

L'angle de les cares $\overset{\Delta}{ABS}$, $\overset{\Delta}{ACS}$ és $\alpha = \angle BPC$.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMS}$:

$$\overline{MS} = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{a \cdot \overline{MS}}{2} = \frac{b \cdot \overline{PB}}{2}.$$

$a\dfrac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2} = b \cdot \overline{PB}$. Resolent l'equació:

$$\overline{PB} = \frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2b}.$$

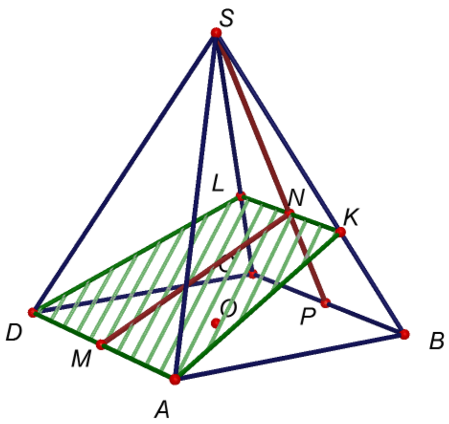
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{BPC}$:

$$a^2 = \left(\frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2b}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2b}\right)^2 - 2\left(\frac{a\sqrt{4b^2 - a^2}}{2b}\right)^2 \cos\alpha.$$

$$\cos\alpha = \frac{2b^2 - a^2}{4b^2 - a^2}. \quad \alpha = \arccos\left(\frac{2b^2 - a^2}{4b^2 - a^2}\right).$$

979.- En una piràmide ABCDS regular quadrangular de base el quadrat ABCD de costat a, dibuixem el plànol que conté l'aresta $\overline{AD}$ i és perpendicular a la cara $\overset{\Delta}{BCS}$. Aquest plànol divideix la cara $\overset{\Delta}{BCS}$ en dues parts que tenen la mateixa àrea. Determineu l'àrea total de la piràmide.

Solució:



Siga O el centre de la base ABCD.

El plànol talla la cara $\overset{\Delta}{BCS}$ en el segment $\overline{KL}$.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AD}$. Siga N el punt mig del segment $\overline{KL}$. Siga P el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.

$\angle MNP = 90^o$.

Siga $\overline{SP} = b$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{SOP}$:

$$\overline{OS}^2 = b^2 - \frac{a^2}{4}.$$

Les àrees dels triangles $\overset{\Delta}{BCS}$, $\overset{\Delta}{KLS}$ estan en proporció 2:1.

Aleshores, $\frac{\overline{SN}}{\overline{SP}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\overline{PN} = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)b$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MNP}$:

$$\overline{MN}^2 = a^2 - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 b^2.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MSP}$ és: $S_{MSP} = \frac{\overline{MP} \cdot \overline{OS}}{2} = \frac{\overline{SP} \cdot \overline{MN}}{2}$.

$$a\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}} = b \cdot \overline{MN} \qquad (1)$$

Aleshores, $\overline{MN} = \frac{a}{2b}\sqrt{4b^2 - a^2}$.

$$\overline{MN}^2 = \frac{a^2}{4b^2}\left(4b^2 - a^2\right) \qquad (2)$$

Igualant les expressions (1) (2):

$a^2 - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 b^2 = \frac{a^2}{4b^2}\left(4b^2 - a^2\right)$. Resolent l'equació en la incògnita b:

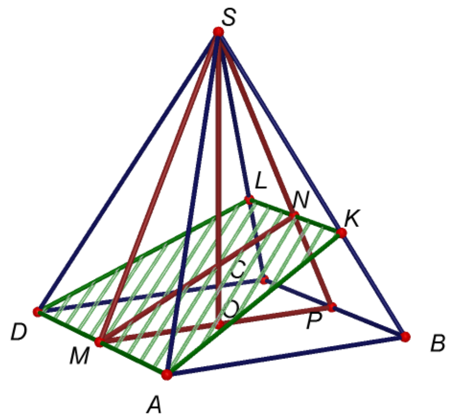
$$b^2 = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)a^2.$$

L'àrea total de la piràmide ABCDS és:

$$S_{ABCDS} = S_{ABCD} + 4S_{BCS} = a^2 + 2a\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}a = \left(1 + \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}\right)a^2.$$

980.- En una piràmide regular quadrangular, per una aresta de la base es dibuixa un plànol perpendicular a la cara lateral oposada.
Calculeu l'àrea de la secció si l'aresta de la base mesura a i l'angle diedre de la base i una cara lateral és α .

Solució:
Siga la piràmide regular quadrangular ABCDS de base el quadrat ABCD de costat a.
Siga O en centre de la base.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AD}$. $\angle SMO = \alpha$.
El plànol talla la cara $\overset{\Delta}{BCS}$ en el segment $\overline{KL}$.
Siga N el punt mig del segment $\overline{KL}$.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MOS}$:

$\overline{OS} = \frac{a}{2}\text{tg}\alpha$, $\overline{MS} = \frac{a}{2\cos\alpha}$.

Siga P el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$. $\overline{PS} = \frac{a}{2\cos\alpha}$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MSP}$ és: $S_{MSP} = \frac{\overline{MP}\cdot\overline{OS}}{2} = \frac{\overline{SP}\cdot\overline{MN}}{2}$.

$$\frac{a^2}{2}\text{tg}\alpha = \frac{a}{2\cos\alpha}\overline{MN} .$$

$$\overline{MN} = a\cdot\sin\alpha .$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MNP}$:

$$\overline{NP}^2 = a^2 - a^2\sin^2\alpha = a^2\cos^2\alpha .$$

$$\overline{NP} = a\cdot\cos\alpha .$$

$$\overline{SN} = \left(\frac{1}{2\cos\alpha} - \cos\alpha\right)a .$$

Els triangles $\overset{\Delta}{BCS}$, $\overset{\Delta}{KLS}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{KL}}{a} = \frac{\overline{SN}}{\overline{SP}} = \frac{\frac{1-2\cos^2\alpha}{2\cos\alpha}}{\frac{1}{2\cos\alpha}} = 1-2\cos^2\alpha .$$

$$\overline{KL} = \left(1-2\cos^2\alpha\right)a .$$

L'àrea de la secció és l'àrea del trapezi ADLK:

$$S_{ADLK} = \frac{\overline{AD}+\overline{KL}}{2}\overline{MN} = \frac{1+1-2\cos^2\alpha}{2}a\cdot a\cdot\sin\alpha = a^2\sin^3\alpha .$$