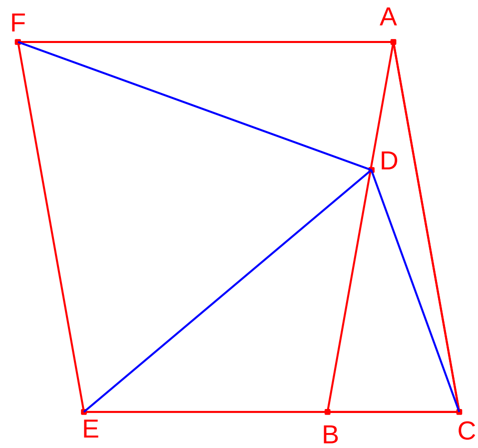
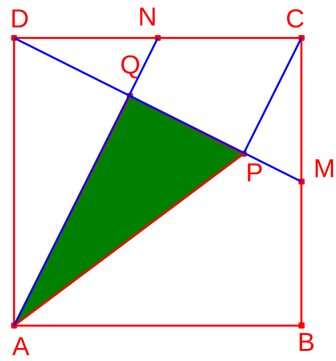
Problemes de Geometria per a l'ESO 99

981.- Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB} = \overline{AC}$, $A = 20º$.
Siga De un punt del costat $\overline{AB}$ tal que $\overline{AD} = \overline{BC}$.
Siga E en la recta BC tal que $\overline{CE} = \overline{CA}$, amb B entre C i E.
Siga F tal que ACEF és un rombe.
Calculeu la mesura dels angles $\angle FDE$, $\angle EDC$.
Olimpíada argentina 2013.



Solució:
$\angle ACB = \angle ABC = 80º$.
$\overline{AF}$ és paral·lel a $\overline{CD}$, aleshores:
$\angle CAF = 180º - \angle ACB = 100º$.
$\angle FAB = \angle CAF - \angle BAC = 80º$.
Aleshores, els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{FDA}$ són iguals.
$\angle FDA = 80º$, $\angle DFA = 20º$
$\angle EFA = \angle ACB = 80º$.
$\angle EFD = \angle EFA - \angle DFA = 60º$.
$\overline{AF} = \overline{FE}$.
Aleshores el triangle $\overset{\Delta}{EFD}$ és equilàter.
Aleshores, $\angle FDE = 60º$.
$\overline{DE} = \overline{FE} = \overline{CE}$.
Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ECD}$ és isòsceles.
$\angle FEC = 100º$.
$\angle CED = \angle FEC - 60º = 40º$.
$$\angle EDC = \frac{180º - \angle CED}{2} = 70º.$$

982.- Siga el quadrat ABCD.
Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$ i N el punt mig del costat $\overline{CD}$.
Siga P la projecció de C sobre el segment $\overline{DM}$.
Siga Q la intersecció dels segments $\overline{DM}$, $\overline{AN}$.
Si $\overline{PM}=5$. Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APQ}$.



Solució:

$\frac{\overline{CM}}{\overline{CD}}=\frac{1}{2}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DCM}$, $\overset{\Delta}{CPM}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{CP}=2\cdot\overline{PM}=10$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADN}$, $\overset{\Delta}{CPM}$ són semblants i $\overline{AD}$, $\overline{CM}$ són paral·lels, aleshores:
$\overline{QN}$, $\overline{CP}$ són paral·lels.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DCP}$, $\overset{\Delta}{DNQ}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{QN}=\frac{1}{2}\cdot\overline{CP}=5$.

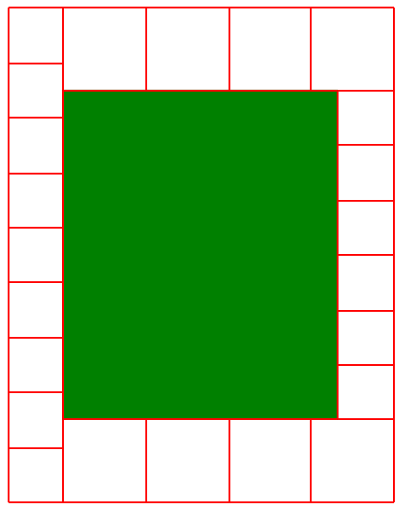
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DCM}$, $\overset{\Delta}{DQN}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{DQ}=2\cdot\overline{QN}=10$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DCM}$, $\overset{\Delta}{AQD}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{AQ}=2\cdot\overline{DN}=20$.
$\overline{DM}=\overline{AN}=\overline{AQ}+\overline{QN}=25$.
Aleshores, $\overline{PQ}=\overline{AN}-\left(\overline{DQ}+\overline{PM}\right)=25-(10+5)=10$.

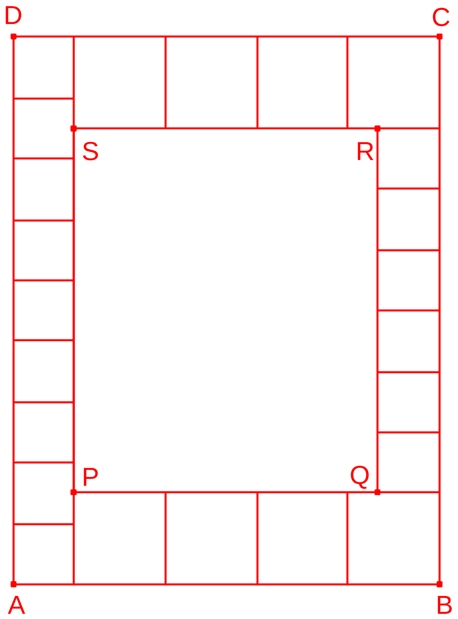
L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{APQ}$ és:

$$S_{APQ}=\frac{1}{2}\overline{AQ}\cdot\overline{PQ}=\frac{1}{2}20\cdot 10=100.$$

983.- En la figura, el costat menor del rectangle ombrejat mesura 8cm.
Al voltant hi ha un marc format amb quadrats de dues mides diferents.
Calculeu la mesura dels costats dels quadrats i l'àrea del rectangle ombrejat.



Solució:
Siga x el costat de quadrat menut i y el costat del quadrat gran.
Les mesures del rectangle ABCD exterior que forma el marc són:



$\overline{AB} = \overline{CD} = x + 4y$.

$\overline{AD} = 9x$.

$\overline{BC} = 6x + 2y$.

$9x = 6x + 2y$.

$3x - 2y = 0$ (1)

Les mesures del rectangle PQRS ombrejat són:

$\overline{QR} = 6x$.

$\overline{PQ} = \overline{AB} - 2x = -x + 4y = 8$ (2)

Considerem el sistema format per les expressions (1) (2):

$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ -x + 4y = 8 \end{cases}$. Resolent el sistema:

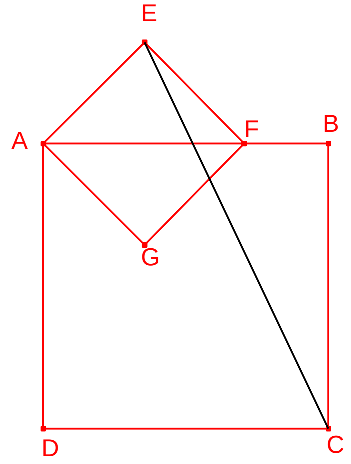
$\begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ y = \frac{12}{5} \end{cases}$.

L'àrea del rectangle ombrejat és:

$S_{PQRS} = \overline{PQ} \cdot \overline{QR} = 8 \cdot 6x = 48x = \frac{384}{5}$.

El costat de quadrat menut mesura $x = \frac{8}{5} = 1.6\text{cm}$, el costat del quadrat gran mesura $y = \frac{12}{5} = 2.4\text{cm}$ i l'àrea del rectangle ombrejat PQRS és: $S_{PQRS} = \frac{384}{5} = 76.8\text{cm}^2$.

984.- En la figura el quadrat ABCD té costat 4 i el quadrat AEFG té costat 2.
Calculeu la longitud del segment $\overline{CE}$.



Solució:

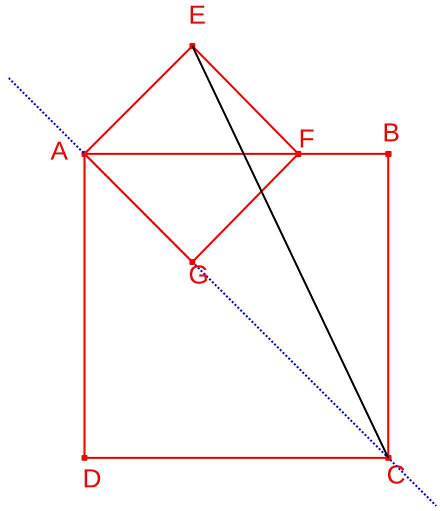
$\angle FAG = 45^{o}$.

La recta AG passa pel punt C.

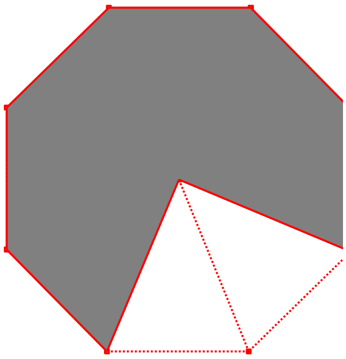
$\overline{AC} = 4\sqrt{2}$.

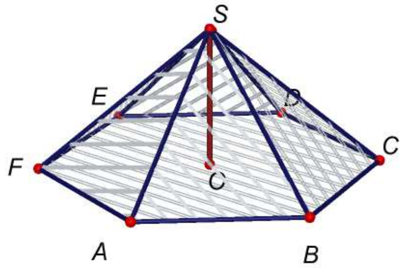
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{EAC}$:

$\overline{CE} = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AE}^2} = \sqrt{\left(4\sqrt{2}\right)^2 + 2^2} = 6$.



985.- En un octògon regular de costat 3 hem retallat dos triangles isòsceles format per dos radis i plegant s'ha format una piràmide regular. Determineu el volum de la piràmide.





Solució.

Siga la piràmide regular hexagonal ABCDEFS d'aresta de la base $\overline{AB}=c$.

Siga O el centre de la base de la piràmide.

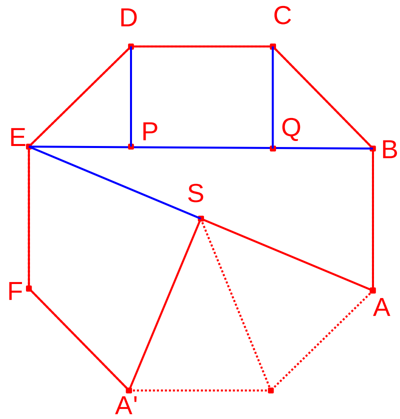
$\overline{OA}=\overline{AB}=c$.

L'aresta lateral de la piràmide és igual al radi de l'octògon regular.

Siga P la projecció de D sobre el segment $\overline{BE}$.

Siga Q la projecció de C sobre el segment $\overline{BE}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{BCQ}$:



$$\overline{EP}=\overline{BQ}=\frac{\sqrt{2}}{2}c.$$

$$\overline{BE}=2\cdot\overline{BQ}+\overline{AB}=\left(1+\sqrt{2}\right)c.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABE}$:

$$\overline{AE}=\sqrt{4+2\sqrt{2}}\,c.$$

$$\overline{AS}=\frac{1}{2}\overline{AE}=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}c.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle format per vèrtex A, el centre O i el vèrtexs S de la piràmide:

La superfície de la base de la piràmide és igual a l'àrea de l'hexàgon regular de costat c:

$$S_b=6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}c^2\right).$$

$$\overline{OS}=\frac{\sqrt[4]{8}}{2}c.$$

El volum de la piràmide és:

$$V=\frac{1}{3}S_b\overline{OS}=\frac{1}{3}6\left(\frac{\sqrt{3}}{4}c^2\right)\frac{\sqrt[4]{8}}{2}c=\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt[4]{8}}{4}c^3.$$

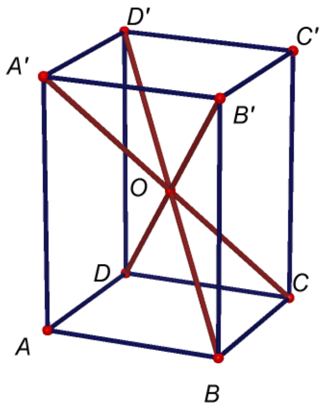
986.- Siga el prisma quadrangular regular ABCDA’B’C’D’ tal que les diagonals $\overline{BD'}$, $\overline{B'D}$ són perpendiculars.

Determineu l’angle que formen les diagonals $\overline{B'D}$, $\overline{A'C}$.

Si l’aresta de la base del prisma és a calculeu el volum del prisma.

Gúsiev, problema 652.

Solució:



Les arestes del prisma regular s’intersecten en el centre del prisma.

Siga O el centre del prisma.

$\overline{OB} = \overline{OB'} = \overline{OD} = \overline{OD'}$

Les diagonals $\overline{BD'}$, $\overline{B'D}$ són perpendiculars, aleshores $\angle B'OB = 90^{\circ}$.

Siga $\overline{AB} = a$ aresta de la base i $\overline{AA'} = b$ aresta lateral.

$$\overline{BD'} = \sqrt{a^2 + a^2 + b^2} = \sqrt{2a^2 + b^2}.$$

$$\overline{OB} = \frac{1}{2}\overline{BD'} = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + b^2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{BOB'}$:

$$b = \overline{OB}\sqrt{2}.$$

$$b = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2a^2 + b^2}.$$

Elevant al quadrat:

$$b^2 = \frac{1}{2}\left(2a^2 + b^2\right).$$

$$b = a\sqrt{2}.$$

Siga $\alpha = \angle A'OD'$ l’angle que formen les diagonals $\overline{B'D}$, $\overline{A'C}$.

$$\overline{OA'} = \overline{OD'} = \overline{OB} = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + b^2} = a.$$

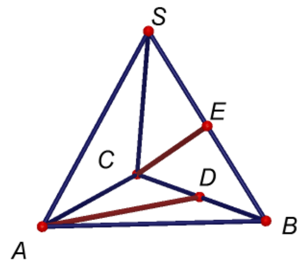
$$\overline{A'D'} = a.$$

Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{A'OD'}$ és equilàter, aleshores: $\alpha = \angle A'OD' = 60^{\circ}$.

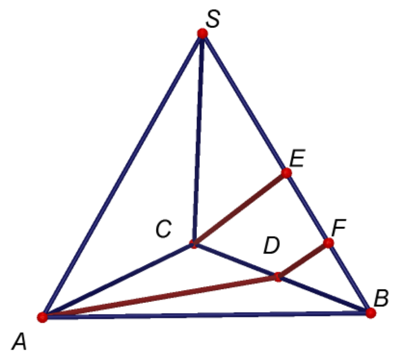
El volum del prisma és:

$$V = a^2 b = a^3\sqrt{2}.$$

987.- En el tetraedre regular ABCS, $\overline{AD}$ és la mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$, E és el punt mig de l'aresta $\overline{BS}$.
Determineu l'angle que formen les rectes AD, CE.
Gúsiev, problema 657.



Solució:
Siga $\overline{AB}=a$ aresta del tetraedre regular.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADB}$:

$$\overline{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

$$\overline{CE}=\overline{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

Pel punt D tracem una recta paral·lela a la recta CE que talla l'aresta $\overline{BS}$ en el punt F.

Els triangles $\overset{\Delta}{BCE}$, $\overset{\Delta}{BDF}$ són semblants i de raó 2:1.

Aleshores, $\overline{DF}=\frac{1}{2}\overline{CE}=\frac{\sqrt{3}}{4}a$.

L'angle que formen les rectes AD i CE és igual a l'angle $\alpha=\angle ADF$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABF}$:

$$\overline{AF}^2=a^2+\left(\frac{a}{4}\right)^2-2a\frac{a}{4}\cos 60^{o}.$$

$$\overline{AF}^2=\frac{13}{16}a^2.$$

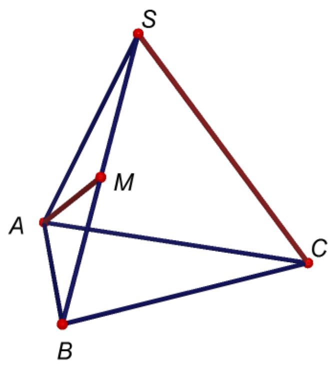
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ADF}$

$$\overline{AF}^2=\overline{AD}^2+\overline{BF}^2-2\cdot\overline{AD}\cdot\overline{BF}\cdot\cos\alpha$$

$$\frac{13}{16}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2-2\frac{\sqrt{3}}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\cos\alpha.$$

$$\cos\alpha=\frac{1}{6}. \quad \alpha=\arccos\frac{1}{6}\approx 80^{o}24'21''.$$

988.- En el tetraedre regular ABCS, $\overline{AM}$ és la mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABS}$.
Determineu l'angle que formen les rectes AM, CS.
Gúsiev, problema 662.

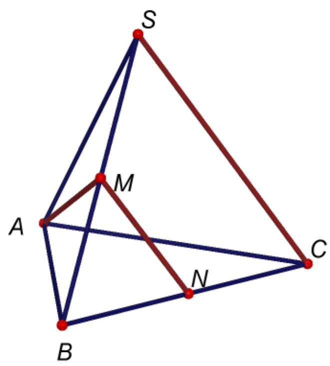


Solució:
Siga $\overline{AB}=a$ aresta del tetraedre regular.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABM}$:

$\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Pel punt M tracem una recta paral·lela a la recta CS que talla l'aresta $\overline{BC}$ en el punt N.



Els triangles $\overset{\Delta}{BCS}$, $\overset{\Delta}{BNM}$ són semblants i de raó 2:1.

Aleshores, $\overline{BN}=\frac{1}{2}\overline{CS}=\frac{1}{2}a$.

L'angle que formen les rectes AM i CS és igual a l'angle $\alpha=\angle AMN$.

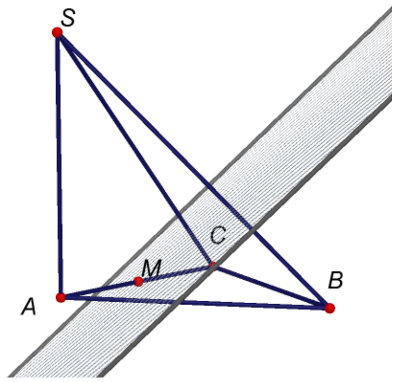
$\overline{AN}=\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AMN}$:

$\overline{AN}^2=\overline{AM}^2+\overline{MN}^2-2\cdot\overline{AM}\cdot\overline{MN}\cdot\cos\alpha$.

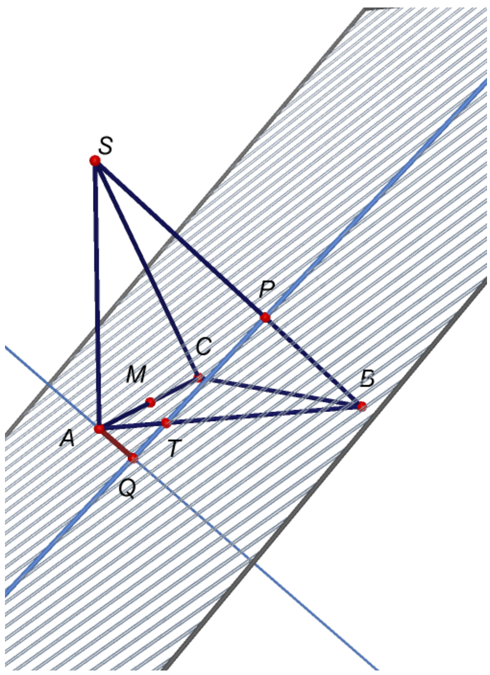
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2+\left(\frac{1}{2}a\right)^2-2\frac{\sqrt{3}}{2}a\frac{1}{2}a\cdot\cos\alpha.$$

$\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{6}$. $\quad\alpha=\arccos\frac{\sqrt{3}}{6}\approx 73^\circ13'17''$.



989.- En una piràmide ABCS l'aresta $\overline{SA}$ és perpendicular al plànol ABC, $\overline{AC} = \overline{BC} = a$, $\overline{AS} = \overline{AB} = a\sqrt{2}$.
Pel punt mig de l'aresta $\overline{AC}$ s'ha dibuixat un plànol perpendicular a l'aresta $\overline{SB}$.
Determineu la distància del vèrtex A al plànol.
Gúsiev problema 748.

Solució 1:
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AC}$.
Siga P el punt d'intersecció del plànol perpendicular a l'aresta $\overline{SB}$ que passa per M i l'aresta $\overline{SB}$.
Siga T el punt d'intersecció del plànol perpendicular a l'aresta $\overline{SB}$ que passa per M i l'aresta $\overline{AB}$.



La base $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle rectangle isòsceles, $C = 90^{o}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MAS}$:
$\overline{SM} = \frac{3}{2}a$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{BAS}$:
$\overline{SB} = 2a$.
Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AMB}$:
$\overline{MB}^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 - 2\frac{1}{2}a \cdot a\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\overline{MB} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$.
Siga $\overline{BP} = x$. $\overline{BT} = x\sqrt{2}$
Aplicant el teorema de Pitàgores als triangles rectangles $\overset{\Delta}{MPB}$, $\overset{\Delta}{MPS}$:
$\overline{MP}^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}a\right)^2 - x^2$, $\overline{MP}^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 - (2a - x)^2$.
Igualant ambdues expressions i resolent l'equació:
$x = \frac{3}{4}a$.

La recta PT pertany al plànol i a la cara $\overset{\Delta}{ABS}$.
La distància de A al plànol és la distància del vèrtex A a la projecció Q de A sobre la recta PT.
$\overline{BT} = \frac{3\sqrt{2}}{4}a$, $\overline{AT} = a\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{4}a = \frac{\sqrt{2}}{4}a$.

Els triangles rectangles isòsceles rectangles $\overset{\Delta}{BPT}$, $\overset{\Delta}{AQT}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales: $\overline{AQ}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{AT}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{4}a=\frac{1}{4}a$

Solució 2:
Els vèrtexs del tetraedre tenen les següents coordenades:

$A(0,0,0)$, $B\left(a\sqrt{2},0,0\right)$, $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right)$, $S\left(0,0,a\sqrt{2}\right)$.

El punt mig M de l'aresta $\overline{AC}$ té coordenades:

$M\left(\frac{\sqrt{2}}{4}a,\frac{\sqrt{2}}{4}a,0\right)$.

$\overrightarrow{BS}=\left(-a\sqrt{a},0,a\sqrt{2}\right)$.

Un vector característic del plànol perpendicular a l'aresta $\overline{SB}$ que passa per M és:
$v=(-1,0,1)$.

El feix de plànols perpendicular a l'aresta $\overline{SB}$ té equació:
$\Pi_D\equiv -x+z+D=0$.

El punt M pertany al plànol que cerquem aleshores:

$-\frac{\sqrt{2}}{4}a+0+D=0$.

Resolent l'equació:

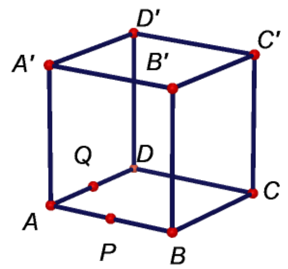
$D=\frac{\sqrt{2}}{4}a$.

El plànol té equació:

$\Pi\equiv -x+z+\frac{\sqrt{2}}{4}a=0$.

La distància del punt A al pláno és:

$$d(A,\Pi)\equiv\left(\frac{-0++\frac{\sqrt{2}}{4}a}{\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}}\right)=\frac{1}{4}a.$$



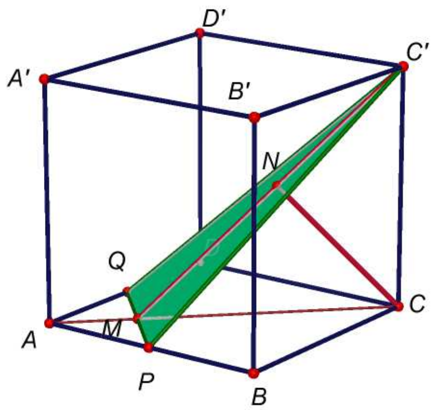
990.- En el cub ABCDA'B'C'D' per P i Q que són els punts migs de les arestes $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$, respectivament, i pel vèrtex C' es dibuixa un plànol secant al cub.
Determineu la distància de C al plànol si l'aresta del cub és a.
Gúsiev problema 731.

Solució 1:
Siga M el punt mig del segment $\overline{PQ}$.

$\overline{PQ} = \frac{1}{2}\overline{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

$\overline{AM} = \overline{PM} = \frac{1}{2}\overline{PQ} = \frac{\sqrt{2}}{4}a$.

$\overline{CM} = \overline{AC} - \overline{AM} = \frac{3\sqrt{2}}{4}a$.



La distància de C al plànol és igual a la distància del C al punt projecció N de C sobre el segment $\overline{CM}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MCC'}$:

$$\overline{C'M} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}a\right)^2 + a^2} = \frac{\sqrt{34}}{4}a.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{MCC'}$ és: $S_{MCC'} = \frac{1}{2}\overline{C'M}\cdot\overline{CN} = \frac{1}{2}\overline{CM}\cdot\overline{CC'}$.

$\frac{\sqrt{34}}{4}a\cdot\overline{CN} = \frac{3\sqrt{2}}{4}a\cdot a$. Resolent l'equació: $\overline{CN} = \frac{3\sqrt{17}}{17}a$.

Solució 2:
Con siderem les coordenades del cub:
$A(0,0,0)$, $B(a,0,0)$, $C(a,a,0)$, $D(0,a,0)$, $A'(0,0,a)$, $B'(a,0,a)$, $C'(a,a,a)$, $D'(0,a,a)$.
Les coordenades de P i Q punts migs de les arestes $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ sóns:
$P\left(\frac{a}{2},0,0\right)$, $Q\left(0,\frac{a}{2},0\right)$.

Siga $\overrightarrow{PC'} = \left(\frac{a}{2},a,a\right)$, $\overrightarrow{QC'} = \left(a,\frac{a}{2},a\right)$.

Els vectors directors del plànol que passa pels punts P, Q, C' són $u = (1,2,2)$, $v = ((2,1,2)$ (proporcionals als anteriors. L'equació del plànol és:

$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x-a & y-a & z-a \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$. Simplificant: $\Pi \equiv 2x + 2y - 3z - a = 0$.

La distància del punt C al plànol és:

$$d(C,\Pi)=\left|\frac{2a+2a-3\cdot 0-a}{\sqrt{2^2+2^2+(-3)^2}}\right|=\frac{3\sqrt{17}}{17}a\ .$$