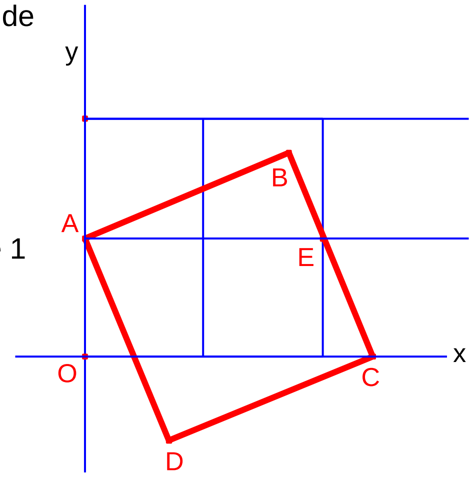
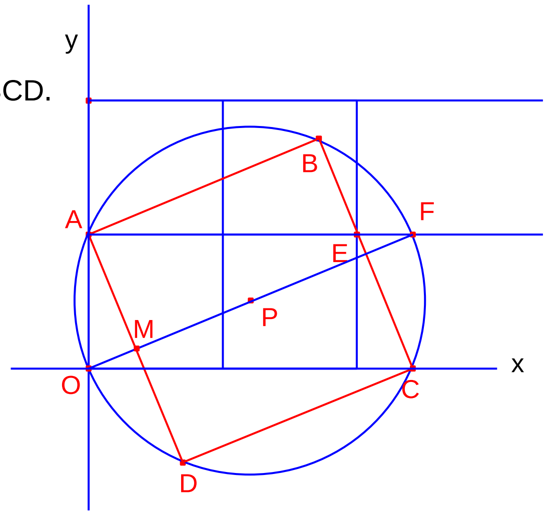
Problemes de Geometria per a l'ESO 191



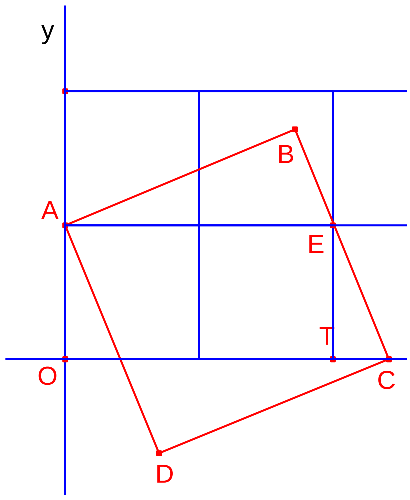
1901.- Un ensenyant de secundària ha proposat un problema de geometria ja que estava movent una catifa sobre un parquet.
El parquet està format per plaques que són quadrats de longitud 1.
El professor a escollit arbitràriament els eixos d'abscisses i ordenades sobre dos costats consecutius de d'una placa.
La catifa és el quadrat ABCD i els seus costats mesuren entre 1 i 2 unitats.
El vèrtex A és el punt $(0,1)$ i el vèrtex C és el punt $C(c,0)$ tal que $c>2$.
Sorpresa! Es veu que el costat $\overline{BC}$ passa pel punt $E(2,1)$.
Determineu la mesura de l'angle $\angle BAE$.

Solució 1:



Siga $\alpha=\angle BAE$.
$\angle OAD=\angle BAE=\alpha$
Considerem la circumferència circumscrit al quadrat ABCD.
Siga P el seu centre.
La recta AE talla la circumferència en el punt F.
$\angle AOC=90^o$.
Aleshores, O pertany a la circumferència circumscrita.
Per ser un angle inscrit i abraçar $\frac{3}{4}$ de circumferència:
$\angle AOD=135^o$.
$\angle OAF=90^o$.
Aleshores, $\overline{OF}$ és un diàmetre de la circumferència.
Aleshores, $\overline{OF}$ mediatriu de la corda $\overline{AD}$.
Siga M el punt mig de la corda $\overline{AD}$.
Aleshores $\overset{\Delta}{OAM}$, $\overset{\Delta}{ODM}$ són iguals.
Aleshores, $\angle OAD=\angle ODA=\alpha$.
La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{OAD}$ és 180º.
$135^o+2\alpha=180^o$.
Aleshores, $\alpha=\frac{45^o}{2}$.

Solució 2:



Siga $\alpha = \angle BAE$.

Siga T la projecció de E sobre $\overline{OC}$.

Siga $x = \overline{AB}$ costat del quadrat ABCD.

$1 \le x \le 2$.

Siga $y = \overline{CE}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABE}$, $\overset{\Delta}{ETC}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{y}.$$

$$y = \frac{2}{x}.$$

$$\overline{BE} = x - y = x. - \frac{2}{x}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABE}$:

$$2^2 = x^2 + \left(x - \frac{2}{x}\right)^2.$$

Resolent l'equació, $x^2 = 2 \pm \sqrt{2}$.

$x^2 = 2 + \sqrt{2}$, ja que $1 \le x \le 2$.

$$x = \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

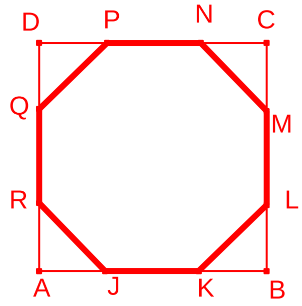
$$\cos\alpha = \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right) = 45^{o}.$$

1902.- Determineu l'àrea de l'octògon regular format tallant un triangle isòsceles en cada vèrtex d'un quadrat de costat 1.

Crux Mathematicorum CC235.

Solució:



Siga ABCD el quadrat de costat $\overline{AB}=1$.
Siga JKLMNPQR l'octògon regular.
Siga $\overline{AJ}=\overline{BK}=\overline{AR}=x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AJR}$:

$\overline{JR}=x\sqrt{2}$.

$\overline{AB}=2\cdot\overline{AJ}+\overline{JR}$.

$1=2x+x\sqrt{2}$.

Resolent l'equació:

$$x=\frac{2-\sqrt{2}}{2}.$$

L'àrea de l'octògon és igual a l'àrea del quadrat ABCD menys l'àrea de dos quadrats de costat x.

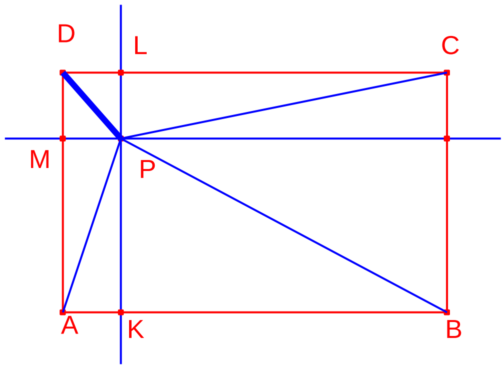
$$S_{JKLMNPQR}=1^2-2x^2=1-2\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2=-2+2\sqrt{2}.$$

1903.- Siga P un punt interior al rectangle ABCD.

Suposem que $\overline{PA}=a$, $\overline{PB}=b$, $\overline{PC}=c$.

Determineu la longitud de $\overline{PD}$ en funció de a, b, c.

Crux Mathematicorum CC233.



Solució:

Siga K la projecció de P sobre el costat $\overline{AB}$.

Siga L la projecció de P sobre el costat $\overline{CD}$.

Siga M la projecció de P sobre el costat $\overline{AD}$.

Siguen $x=\overline{KB}$, $y=\overline{AK}$, $\overline{PK}=x$, $\overline{PL}=t$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{PLD}$:

$\overline{PD}^2=y^2+t^2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AKP}$:

$a^2=y^2+x^2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BKP}$:

$b^2=x^2+z^2$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CLP}$:

$c^2=x^2+t^2$.

Sumant les tres expressions:

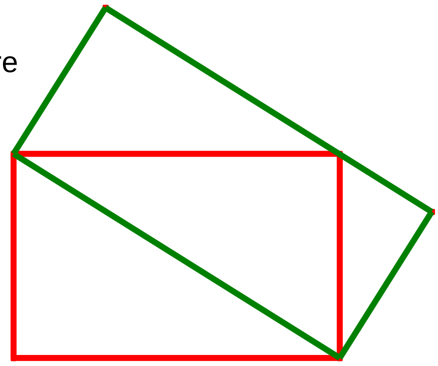
$y^2+t^2+2\left(x^2+z^2\right)=a^2+b^2+c^2$.

$y^2+t^2+2b^2=a^2+b^2+c^2$.

$y^2+t^2=a^2-b^2+c^2$.

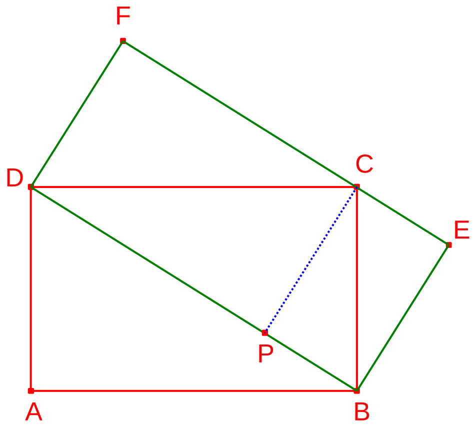
$\overline{PD}=\sqrt{y^2+t^2}=\sqrt{a^2-b^2+c^2}$.

1904.- Donada l'àrea d'un rectangle calculeu l'àrea de l'altre rectangle.

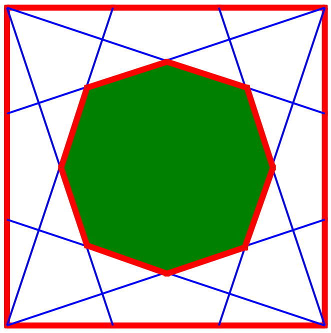


Math Forum. Problema del cap de setmana.
26 desembre 2016.

Solució:
Tots dos tenen la mateixa àrea:
Siguen els rectangles ABCD, DBEF.
Siga P la projecció de C sobre el costat $\overline{BD}$.
Els triangles $\overset{\Delta}{BEC}$, $\overset{\Delta}{CPB}$ són iguals.
Els triangles $\overset{\Delta}{DFC}$, $\overset{\Delta}{CPD}$ són iguals.



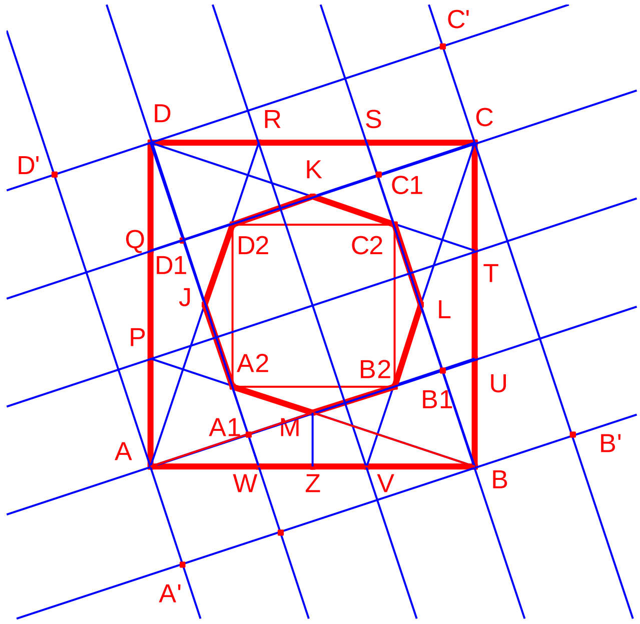
$S_{DBEF} = 2S_{BCD}$.
$S_{ABCD} = 2S_{BCD}$.



1905.- Els costats d'un quadrat s'han dividit en tres parts iguals i s'han unit amb els vèrtexs amb 8 segments formant en l'interior on octògon.

Determineu la proporció entre les àrees de l'octògon i el quadrat.

Solució:
Siga ABCD el quadrat exterior.
Siga $JD_2KC_2LB_2MA_2$ l'octògon interior.
Considerem el quadrat $A_1B_1C_1D_1$ format per la intersecció de les rectes:
AU i DW, AU i BS, BS i CQ, CQ i DW.
Considerem el quadra A'B'C'D'



$$\left(\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A'B'}}\right)^2=\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{A'B'C'D'}}=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}.$$

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{A'B'C'D'}}=\frac{S_{A'B'C'D'}-4S_{AD'D}}{16}=\frac{16-6}{16}=\frac{5}{8}.$$

Aleshores:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1D_1}}{S_{ABCD}}=\frac{2}{5}.$$

Notem que $\frac{\overline{AP}}{\overline{AB}}=\frac{1}{3}$.

Aleshores,

$$\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1B_2}}=\frac{1}{3}.$$

A més a més, $\overline{A_1A_2}=\overline{B_1B_2}$.

$$\frac{\overline{A_2B_2}^2}{\overline{AB}^2}=\frac{\left(\frac{3}{4}\overline{A_1B_1}\right)^2}{\left(\frac{3}{4}\overline{A'B'}\right)^2}=\frac{\overline{A_1B_1}^2}{\overline{A'B'}^2}=\frac{1}{4}.$$

$S_{ABP}=\frac{1}{6}S_{ABCD}$, aleshores, $S_{ZMB}=\frac{1}{4}S_{ABP}=\frac{1}{24}S_{ABCD}$. $S_{ABM}=2S_{ZMB}=\frac{1}{12}S_{ABCD}$.

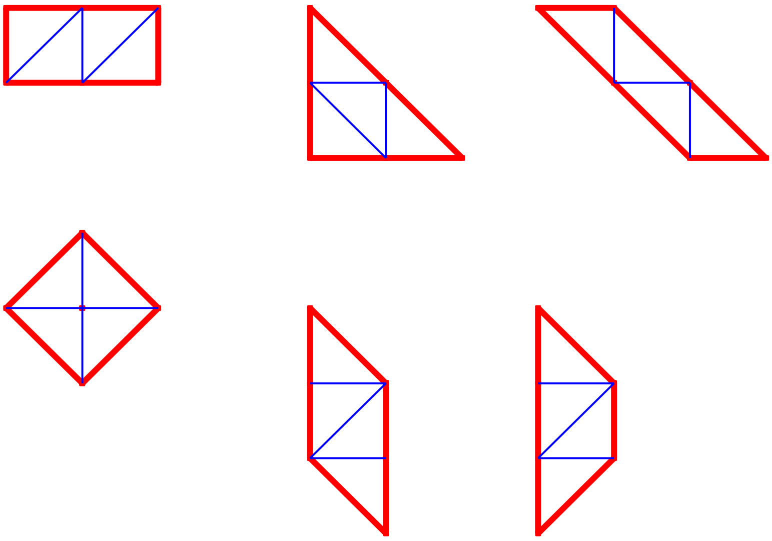
$\frac{S_{A_2B_2M}}{S_{ABM}}=\left(\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{AB}}\right)=\frac{1}{4}$. Aleshores: $S_{A_2B_2M}=\frac{1}{4}S_{ABM}=\frac{1}{48}S_{ABCD}$.

$$S_{\text{octògon}}=S_{A_2B_2C_2D_2}+4\cdot S_{A_2B_2M}=\frac{1}{4}S_{ABCD}+4\frac{1}{144}S_{ABCD}=\frac{1}{3}S_{ABCD}.$$

1906.- Quants polígons convexos diferents es poden format amb quatre triangles rectangles isòsceles iguals?.

KöMaL C1386.

Solució:
Hi ha 6 possibilitats.



1907.- Siga un sector circular de radi R menor que un semicercle.

El sector té inscrit un cercle de radi r.
La corda que uneix els extrems de l'arc mesura $2a$.

Proveu que $\frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{R}$.

KöMaL, B4833.

Solució:

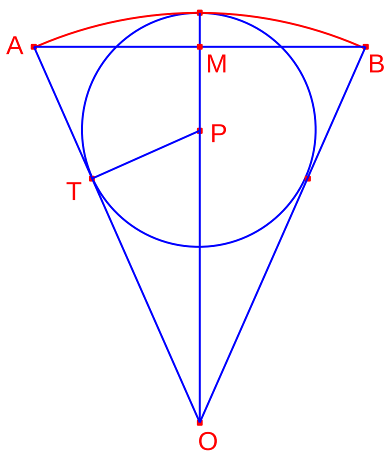
Siga el sector de centre O i radi $\overline{OA}=\overline{OB}=R$.

Siga $\overline{AB}=2a$.

Siga M el punt mig de la corda $\overline{AB}$.

Siga T que pertany al radi $\overline{OA}$ punt de tangència del cercle inscrit al sector de centre P i radi $\overline{PT}=r$.

$\overline{OP}=R-r$.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{OTP}$, $\overset{\Delta}{OMA}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{R-r}{r}=\frac{R}{a}.$$

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{R}=\frac{1}{a}.$$

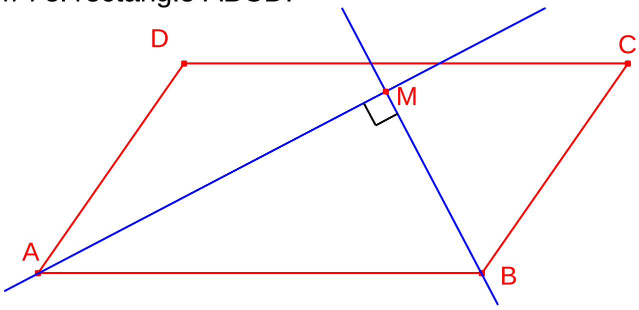
$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a}+\frac{1}{R}.$$

1908.- En un paral·lelogram ABCD $\overline{BC} = \lambda \cdot \overline{AB}$.

La intersecció de les bisectrius interiors dels angles A i B es tallen en el punt M.

Calculeu la raó entre les àrees del triangle $\overset{\Delta}{ABM}$ i el rectangle ABCD.

KöMaL, B4837.



Solució:

Siga $A = 2\alpha$, aleshores, $B = 180º - 2\alpha$.

$\angle MAB = \alpha$, $\angle ABM = 90º - \alpha$.

Aleshores, $\angle AMB = 90º$.

$S_{ABCD} = a \cdot \lambda a \cdot \sin 2\alpha = \lambda a^2 \sin 2\alpha$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABM}$:

$\overline{AM} = a \cdot \cos\alpha$, $\overline{BM} = a \cdot \sin\alpha$.

$$S_{ABM} = \frac{1}{2}\overline{AM} \cdot \overline{BM} = \frac{1}{2} a \cdot \cos\alpha \cdot a \cdot \sin\alpha = \frac{1}{4} a^2 \sin 2\alpha.$$

$$\frac{S_{ABM}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{1}{4} a^2 \sin 2\alpha}{\lambda a^2 \sin 2\alpha} = \frac{1}{4\lambda}.$$

1909.- Una taula de billar la vora del davant mesura 90 cm i les vores dreta i esquerra 180 cm.

Una bola està situada a 10 cm de la vora frontal i a 15 cm de la vora Esquerra.
Es colpeix la bola des de la vora esquerra rebotant en la banda frontal i després la banda de la dreta fent el camí mes curs fins arribar al forat de l'esquerra.
Quina es la distancia que recorre la bola fins que s'enfonsa en el forat? Ignoreu la mesura de la pilota i del forat.
KöMaL, C1388.

Siga VABC els vèrtex de la taula de billar. V el vèrtexs de davant esquerra.
Siga P' el punt simètric de P respecte de la banda frontal BC.
Siga P" el punt simètric de P' respecte de la banda de la dreta AB.
La distància mínima que recorre la bola és la mesura del segment $\overline{VP''}$.

Siga Q la projecció de P" sobre la recta VA.

$\overline{AQ} = \overline{PM} = 80$.

$\overline{VQ} = 170$.

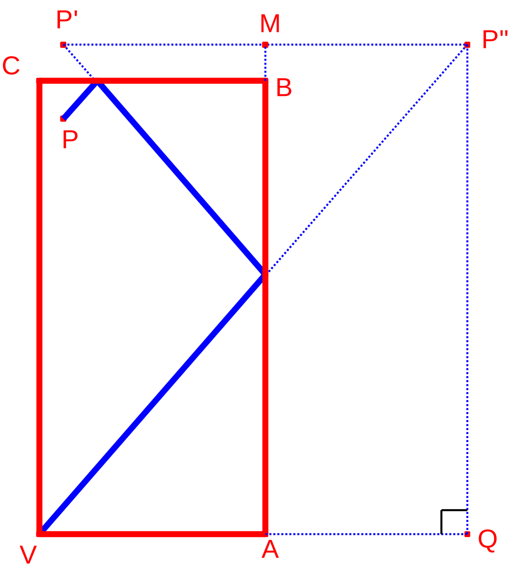
$\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{PP'} = 15$.

$\overline{P''Q} = 195$.

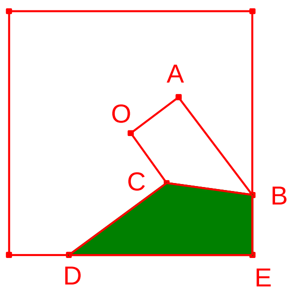
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{VQP''}$:

$\overline{VP''} = \sqrt{170^2 + 195^2} = 5\sqrt{2677} \approx 258.70\text{cm}$.

En blau està representat el camí recorregut per la bola.

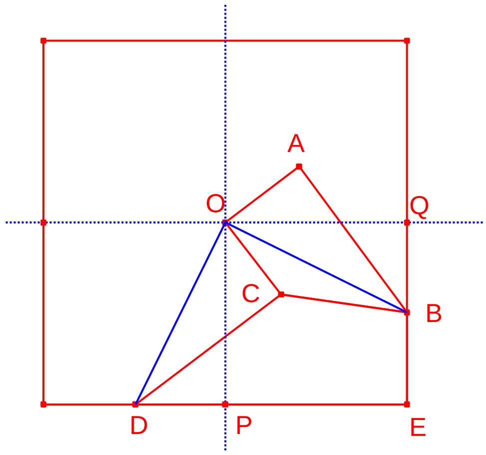


1910.- En la figura, O és el centre del quadrat,
$\overline{OA}=\overline{OC}=2$, $\overline{AB}=\overline{CD}=4$, $\overline{CD}$ és perpendicular a $\overline{OC}$.
$\overline{OC}$ és perpendicular a $\overline{OA}$. $\overline{OA}$ és perpendicular a $\overline{AB}$.



L'àrea del quadrat és $64\ cm^2$.
a) Calculeu l'àrea del trapezi ABCO.
b) Calculeu l'àrea del quadrilàter BCDE.

Solució:
a)



$$S_{ABCO}=\frac{1}{2}\left(\overline{AB}+\overline{OC}\right)\overline{OA}=\frac{1}{2}(4+2)2=6\ cm^2.$$

b)

$$S_{OCB}=\frac{1}{2}\overline{OC}\cdot\overline{OA}=\frac{1}{2}2\cdot 2=2.$$

$$S_{OCD}=\frac{1}{2}\overline{OC}\cdot\overline{CD}=\frac{1}{2}2\cdot 4=4.$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{OCD}$, $\overset{\Delta}{OAB}$ són iguals.
Aleshores, $\overline{OD}=\overline{OB}$.
A més a més $\angle BOD=90^{o}$.
Siga P la projecció de O sobre $\overline{DE}$.
Siga Q la projecció de O sobre la recta EB.
Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ODP}$, $\overset{\Delta}{OBQ}$ són iguals.
Aleshores, L'àrea del quadrilàter ODEB és igual a l'àrea del quadrat OPEQ.

$$S_{ODEB}=S_{OPEQ}=\frac{1}{4}64=16.$$

$$S_{BCDE}=S_{ODEB}-S_{OCD}-S_{OCB}=16-4-2=10\ cm^2.$$