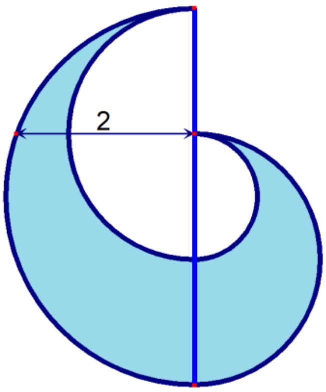
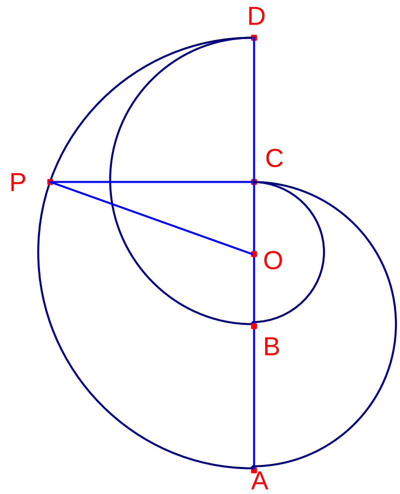
2681.- Els semicercles gran i menut són concèntrics.
Calculeu l’àrea ombrejada.



Solució:
Siga O el centre de les semicircumferències gran i menuda de radis,
$\overline{OA} = \overline{OD} = R, \overline{OB} = \overline{OC} = r$
Siga $\overline{PC} = 2$

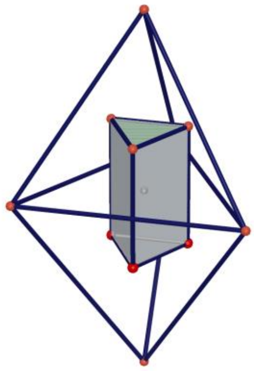


Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OCP}$:
$R^2 - r^2 = 4$

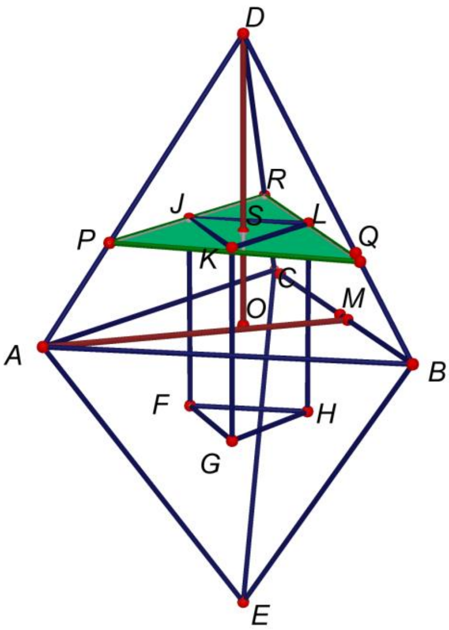
L’àrea ombrejada és igual a la diferència dels semicercles gran i menut:

$$S = \frac{1}{2}\pi R^2 - \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi(R^2 - r^2) = 2\pi$$

2682.- Donat el doble tetràedre regular, determineu la proporció entre els volums del poliedre dual (prisma de vèrtexs els centres de les 6 cares) i del doble tetràedre regular



Solució:
Siguen els tetràedres regulars $ABCD, ABCE$ d'aresta $\overline{AB} = a$
Siga O el centre de la base comuna $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga $\overline{OD} = h$
Siga el prisma regular $FGHJKL$ tal que els vèrtexs són els baricentres de les cares
La recta OD talla la base del prisma $\overset{\Delta}{JKL}$ en el punt S.
Siga $\overline{OS} = x$. L'altura del prisma és $2x$



El plànol que conte la base $\overset{\Delta}{JKL}$ talles les arestes del tetràedre $ABCD$ en els punts P, Q, R.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$

$$\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Aplicant la propietat del baricentre:

$$\overline{AO} = \frac{2}{3}\overline{AM} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOD}$

$$a^2 = \frac{1}{3}a^2 + \overline{OD}^2$$

$$\overline{OD} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

El volum de la suma dels dos tetràedres és:

$$V_{ABCDE} = 2 \cdot \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3$$

Els triangles equilàters $\overset{\Delta}{ABD}, \overset{\Delta}{PQD}$ són semblants i de raó 3:2
Aleshores:

$$\overline{PQ} = \frac{2}{3}a$$

$$S_{JKL} = \frac{1}{4}S_{PQR} = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2}{3}a\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{36}a^2$$

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AOD}, \overset{\Delta}{PSD}$ són semblants i de raó 3:2
Aleshores:

$$\overline{OS} = \overline{OD} - \overline{SD} = \frac{1}{3}\overline{OD} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{6}}{9}a$$

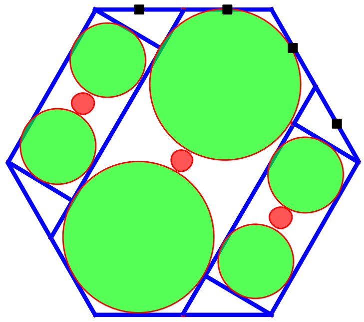
El volum del prisma és:

$$V_{FGHJKL} = \frac{\sqrt{3}}{36}a^2 \cdot 2\frac{\sqrt{6}}{9}a = \frac{\sqrt{2}}{54}a^3$$

La proporció dels volums és:

$$\frac{V_{FGHJKL}}{V_{ABCDE}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{54}a^3}{\frac{\sqrt{2}}{6}a^3} = \frac{1}{9}$$

2683.- En la figura, els costats de l'hexàgon regular s'han dividit en dos parts iguals.
Calculeu la proporció entre l'àrea ombrejada de roig i l'àrea ombrejada de verd.



Solució:
Siga l'hexàgon regular $ABCDEF$ de costat $\overline{AB} = c$ i centre O.
Siga M el punt mig del costat $\overline{AF}$
Siga P el centre de la circumferència de diàmetre $\overline{FT} = \overline{KG}$.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MTF}$

$$\overline{FT} = \frac{\sqrt{3}}{4}a$$

Siga la circumferència de centre S i radi $\overline{SG}$.

$$\overline{SG} = \frac{1}{2}a - \overline{KG} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}a$$

Siga la circumferència de centre Q i radi $\overline{QT}$.
Siga N el punt mig del segment $\overline{AM}$.

$$\overline{MT} = \overline{MN} = \frac{1}{4}a$$

$$\overline{QF} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

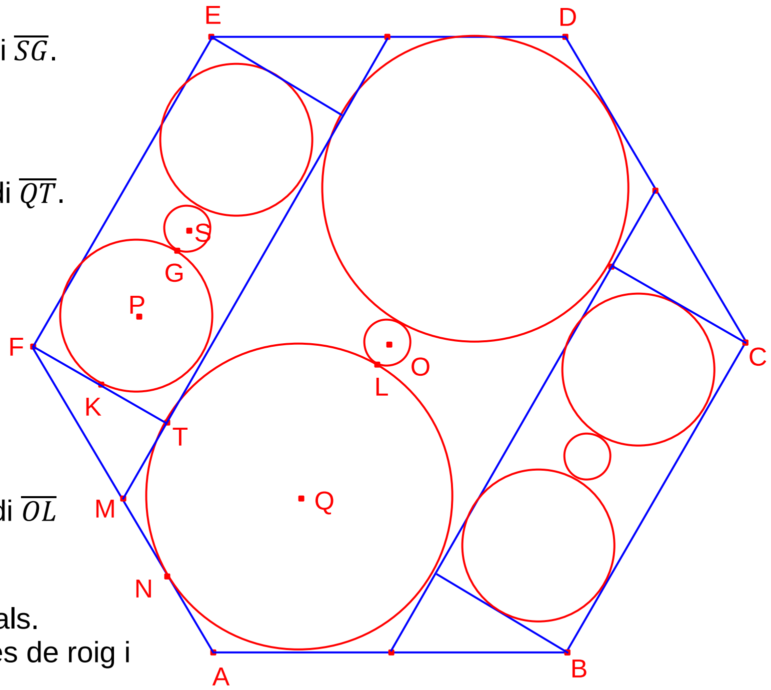
$$\overline{QT} = \frac{\sqrt{3}}{4}a$$

Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OL}$

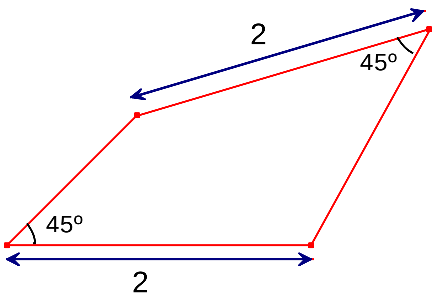
$$\overline{OL} = \frac{1}{2}a - \overline{QL} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}a$$

Les tres circumferències roges són iguals.
La proporció entre les àrees ombrejades de roig i verd és:

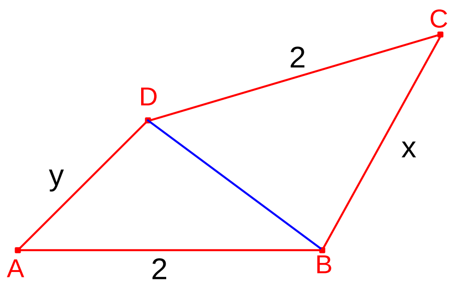
$$\frac{S_{roig}}{S_{verd}} = \frac{3\cdot\pi\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)^2}{4\cdot\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{8}a\right)^2 + 2\cdot\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2} = \frac{7-4\sqrt{3}}{3}$$



2684.- Calculeu l’àrea del quadrilàter.



Solució:
Siga el quadrilàter $ABCD$ $A = C = 45°, \overline{AB} = \overline{CD} = 2$



L’àrea del quadrilàter $ABCD$ és:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}2 \cdot x \cdot \sin 45° + \frac{1}{2}2 \cdot y \cdot \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y)$$

Aplicant el teorema del cosinus als triangles $A\overset{\Delta}{B}D, B\overset{\Delta}{C}D$:

$4 + y^2 - 2 \cdot 2y \cdot \cos 45° = 4 + x^2 - 2 \cdot 2x \cdot \cos 45°$

Simplificant:

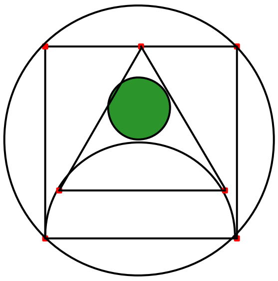
$x^2 - y^2 = 2\sqrt{2}(x - y)$

$x + y = 2\sqrt{2}$

L’àrea del quadrilàter és:

$$S_{ABCD} = \frac{\sqrt{2}(x + y)}{2} = 2$$

2685.- Calculeu la raó entre l'àrea del cercle ombrejat, tangent al semicercle i a dos costats del triangle equilàter i l'àrea del cercle circumscrit al quadrat.

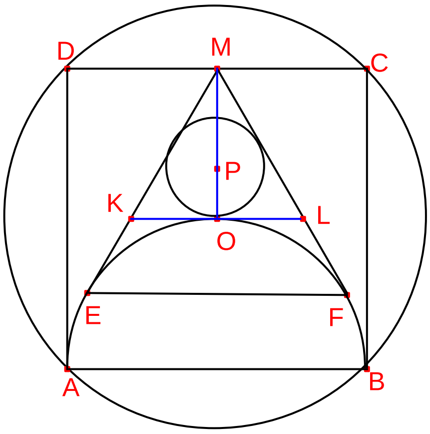


Solució:
Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$ i centre O.
La semicircumferència passa pel centre del quadrat.
Siga M el punt mig del costat $\overline{CD}$

$\overline{OM} = \frac{1}{2}c$

Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{EFM}$
Pel punt O tracem una paral·lela al costat $\overline{AB}$ que talla el triangle equilàter en els punts K, L
La circumferència ombrejada és la circumferència inscrita al triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$
Siga P el centre i $\overline{PO}$ el radi
Aplicant la propietat del baricentre:

$\overline{PO} = \frac{1}{3}\overline{OM} = \frac{1}{6}a$



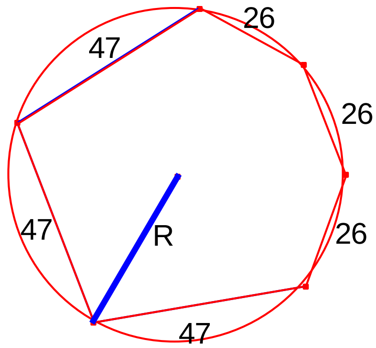
El radi de la circumferència circumscrita al quadrat és:

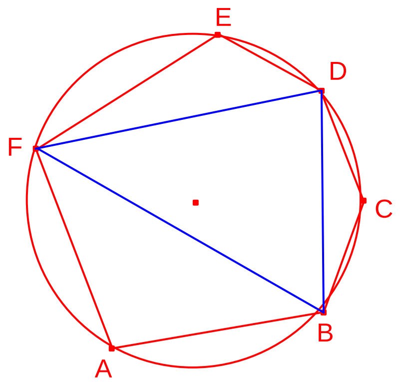
$\overline{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

La proporció de les àrees de les dues circumferències és:

$$\frac{S_P}{S_O} = \frac{\pi\left(\frac{1}{6}a\right)^2}{\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2} = \frac{1}{18}$$

2686.- Calculeu el radi de la circumferència circumscrita a l'hexàgon de costats $47, 47, 47, 26, 26, 26$





Solució:
Siga $\angle ABF = \alpha, \angle CBD = \beta$
Aleshores:
$\angle DBF = \alpha + \beta, \angle BFD = 2\beta, \angle BDF = \alpha$
La suma dels angles del triangle $\overset{\Delta}{BDF}$ és 180º:
$\alpha + \beta + 2\alpha + 2\beta = 180°$
Simplificant:
$\alpha + \beta = 60°$

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABF}$:
$\frac{47}{\sin\alpha} = 2R$
Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABF}$:
$\frac{26}{\sin\beta} = 2R$
Igualant ambdues expressions:

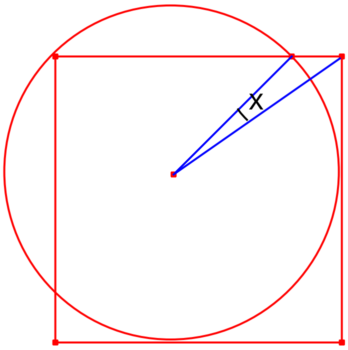
$$\frac{47}{\sin\alpha} = \frac{26}{\sin(60° - \alpha)}$$

$$\frac{47}{26} = \frac{\sin\alpha}{\sin(60° - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha} = \frac{2 \cdot \tan\alpha}{\sqrt{3} - \tan\alpha}$$

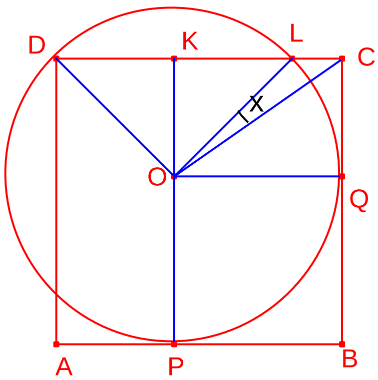
Resolent l'equació:
$\tan\alpha = \frac{47\sqrt{3}}{99}$
Aleshores:
$\sin\alpha = \frac{47}{74}$

$\frac{47}{\frac{47}{74}} = 2R$
Aleshores, $R = 37$

2687.- Donat el quadrat i la circumferència, calculeu $\tan x$



Solució:



Siga el quadrat $ABCD$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga la circumferència de centre O i radi $\overline{OD} = r$
Siguen P, Q els punts de tangència de la circumferència i els costats.
Siga K la projecció de O sobre el costat $\overline{CD}$

Siga $x = \angle LOC$
$\overline{OL} = r$
$\overline{OK} = \overline{DK} = c - r$
Aleshores, $\angle KOL = 45°$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OKD}$:

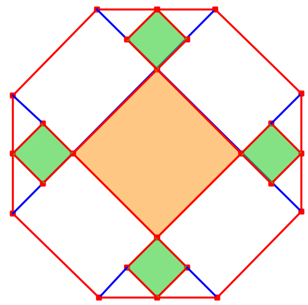
$$c - r = \frac{\sqrt{2}}{2} r$$

Siga $\alpha = \angle COQ$

$$\tan \alpha = \frac{c - r}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan x = \tan(45° - \alpha) = \frac{\tan 45° - \tan \alpha}{1 + \tan 45° \cdot \tan \alpha} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} = 3 - 2\sqrt{2}$$

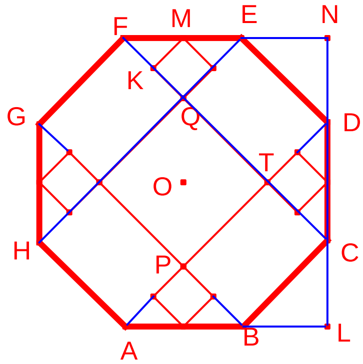
2688.- Sobre les diagonals d'un octògon regular s'han dibuixat 5 quadrats.
Calculeu la proporció entre les àrees la suma dels ombrejats de verd i i del quadrat ombrejat de taronja.



Solució:
Siga l'octògon regular $ABCDEFGH$ de costat $\overline{AB} = c$
Siga M el punt mig del costat $\overline{EF}$

$$\overline{MQ} = \frac{1}{2}c$$

$$\overline{MK} = \overline{KQ} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}c = \frac{\sqrt{2}}{4}c$$



Siga L la intersecció de les rectes AB, CD.
Siga N la intersecció de les rectes FE, CD

$$\overline{CL} = \overline{DN} = \frac{\sqrt{2}}{2}c$$

$$\overline{LN} = \left(1 + \sqrt{2}\right)c$$

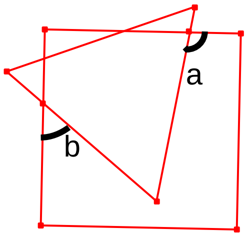
$$\overline{PQ} = \overline{LN} - 2 \cdot \overline{MQ} = c\sqrt{2}$$

$$\overline{QT} = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{PQ} = c$$

La proporció de les àrees és:

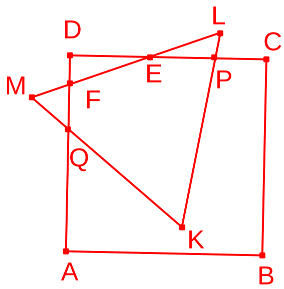
$$\frac{S_v}{S_t} = \frac{4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{4}c\right)^2}{c^2} = \frac{1}{2}$$

2689.- En la figura hi ha un quadrat i un triangle equilàter sobreposats.
Calculeu la suma dels angles $a + b$



Solució:

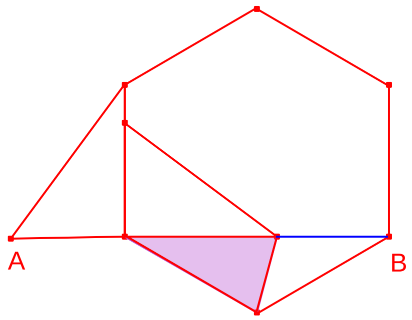
Siga el quadrat $ABCD$ i el triangle equilàter $\overset{\Delta}{KLM}$
Siga $\angle KPC = a, \angle AQK = b$



Siga $x = \angle LEP$
$\angle MFQ = 90° - x$
$\angle KPC = a = \angle EPL = 180° - (60° + x) = 120° - x$
$\angle AQK = b = \angle MQF = 180° - (60° + 90° - x) = 30° + x$

$a + b = 120° - x + 30° + x = 150°$

2690.- Sobre la recta AB que passa per dos vèrtexs d'un hexàgon regular s'ha dibuixat dos triangles 3-4-5. Determineu l'àrea del triangle ombrejat.



Solució:

$\overline{AK} = 3$

$\overline{KN} = \overline{KM} = \overline{KL} = 4$

$\angle LKM = 30°$

$$S_{KLM} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 30° = 4$$