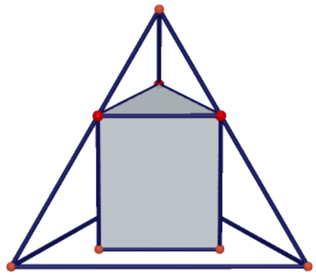
10 Problemes d’optimització

Ricard Peiró i Estruch

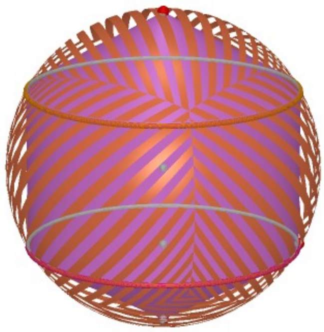
Problema 1

Donat un tetraedre regular d'aresta a inscriviu un prisma regular triangular de volum màxim que tinga una base en la base del tetraedre i els altres vèrtexs en les arestes laterals.
Determineu la proporció entre els volums del prisma i la piràmide.



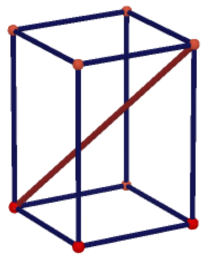
Problema 2

Un cos està format per un cilindre i dos cons superposats que tenen per bases les bases del cilindre.
Determineu el volum màxim que pot tenir el cos amb la condició que ha de ser inscrit en una esfera de radi r.
García Ardura 1230.



Problema 3

L'àrea de la base d'un ortoedre és igual a 1cm^2 i la longitud de la diagonal és 2cm.
Determineu:
a) Les dimensions de l'ortoedre de volum màxim i el volum màxim
b) Les dimensions de l'ortoedre d'àrea lateral màxima i l'àrea màxima.



Problema 4

La base de la piràmide MABC és el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB} = \overline{BC}$.
Les cares MBC i MAB són perpendiculars a la base i $\overline{MC} = 2\sqrt{2}$.
Amb quina altura de la piràmide la secció que passa pels punts B, M i pel punt mig de l'aresta $\overline{AC}$ té àrea màxima? Determineu l'àrea màxima.
Gúsiev, 928.

Problema 5

La base de la piràmide MABC és el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $C = 90°$, $A = 60°$, $\overline{AC} = 6\text{cm}$. L'aresta $\overline{MA}$ és perpendicular a la base, $\overline{MA} = 3\text{cm}$.
En la piràmide MABC està inscrita una piràmide de vèrtexs A, la base de la qual és la secció de la piràmide donada pel plànol paral·lel a les arestes $\overline{MA}$, $\overline{BC}$.
Determineu el volum màxim de la piràmide inscrita.
Gúsiev, 949.

Problema 6

a) Calculeu el volum màxim d'una piràmide regular triangular inscrita en una esfera de radi R.

b) Calculeu el valor màxim de la suma de les arestes d'una piràmide regular triangular inscrita en una esfera de radi R.

Problema 7

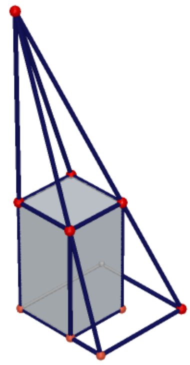
Una piràmide té base quadrada de costat 1dm.

Una de les arestes laterals és perpendicular a la base i mesura 3dm.

La piràmide es talla per un plànol paral·lel a la base a una distància x de la mateixa. Determineu l'àrea total del prisma recte que projecta aquesta secció sobre el plànol de la base de la piràmide.

Determineu el valor de x per al qual és màxima aquesta àrea.

Problemes de Grau. problema 1971.

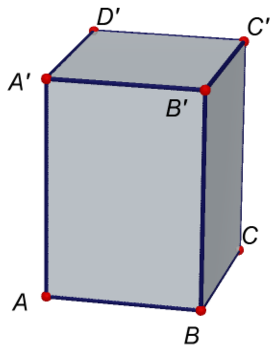


Problema 8

Un ortoedre, de $100dm^3$ de volum, té una aresta de 4dm de longitud.

Determineu les altres dues dimensions, si l'àrea total ha de ser la mínima possible. Calculeu l'àrea.

Prova de Grau 1968. Problema 77



Problema 9

Donat el triangle de vèrtexs $A(-1, 0)$, $B(0, 2)$, $C(3, 0)$ inscrivim en ell el rectangle MNPQ d'àrea màxima, tal que els vèrtex M, N pertanyen al costat $\overline{AC}$, el vèrtex P pertany al costat $\overline{BC}$ i Q pertany al costat $\overline{AB}$.

Determineu els vèrtexs del rectangle MNPQ i la seu àrea.

Prova de Grau, 1968, problema 25.

Problema 10

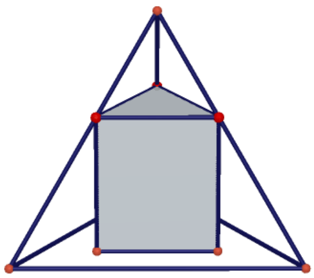
En un disc metàl·lic retallem un sector de manera que amb la part restant construïm un con de volum màxim.

Determineu l'angle del sector que retallem.

Temes de Grau. Problema 1958.

Problema 1

Donat un tetraedre regular d'aresta a inscriviu un prisma regular triangular de volum màxim que tinga una base en la base del tetraedre i els altres vèrtexs en les arestes laterals.
Determineu la proporció entre els volums del prisma i la piràmide.



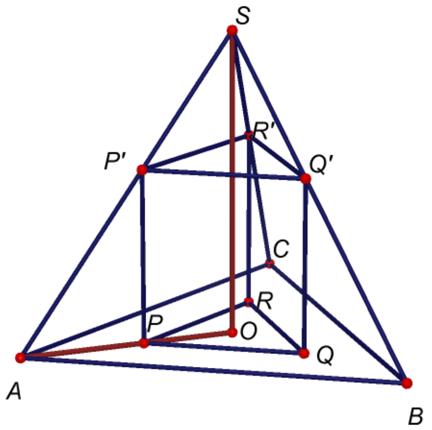
Solució:

Siga el tetraedre regular ABCS d'aresta $\overline{AB} = a$

Siga PQRP'Q'R' el prisma triangular regular tal que la base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{PQR}$ en la base $\overset{\Delta}{ABC}$ del tetraedre.

Siga $\overline{PQ} = x$.

Siga O el baricentre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.



$\overline{OA} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOS}$:

$$\overline{OA} = \frac{\sqrt{6}}{3}a.$$

El volum de la piràmide ABCS és:

$$V_{\text{Piràmide}} = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2 \frac{\sqrt{6}}{3}a = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

Siga $\overline{PP'} = h$ altura del prisma.

El tretraedres regulars ABCS, P'Q'R'S són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{a} = \frac{\overline{OS} - \overline{PP'}}{\overline{OS}} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3} - h}{\frac{\sqrt{6}}{3}a}$$. Resolent l'equació en la incògnita h:

$h = \frac{\sqrt{6}}{3}(a - x)$. El volum del prisma és:

$$V_{\text{prisma}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}x\right)^2 h = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}x\right)^2 \frac{\sqrt{6}}{3}(a - x).$$

$$V(x) = \frac{\sqrt{2}}{12}\left(ax^2 - x^3\right), \quad x \in [0, a].$$

Maximitzem la funció mitjançant el càlcul diferencial.

$$V'(x) = \frac{\sqrt{2}}{12}\left(2ax - 3x^2\right).$$

$$V'(x) = 0, \quad x = 0, \frac{2}{3}a.$$

$V''(0) > 0$, $V''\left(\frac{2}{3}a\right) < 0$. Aleshores, $x = \frac{2}{3}a$ és un màxim relatiu estricte.

El volum màxim del prisma és:

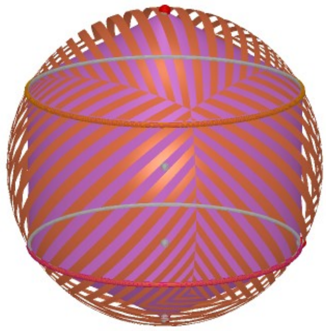
$$V_{màx} = V\left(\frac{2}{3}a\right) = \frac{\sqrt{2}}{12}\left(a\left(\frac{2}{3}a\right)^2 - \left(\frac{2}{3}a\right)^3\right) = \frac{\sqrt{2}}{27}a^3.$$

La proporció entre els volums del prisma i la piràmide és:

$$\frac{V_{màx}}{V_{piràmide}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{27}a^3}{\frac{\sqrt{2}}{12}a^3} = \frac{4}{9}.$$

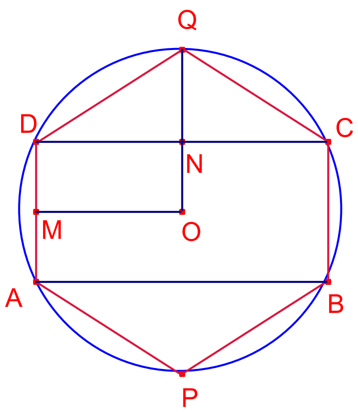
Problema 2

Un cos està format per un cilindre i dos cons superposats que tenen per bases les bases del cilindre.
Determineu el volum màxim que pot tenir el cos amb la condició que ha de ser inscrit en una esfera de radi r.
García Ardura 1230.



Solució:
Siga APBCQD la secció axial del cos.
Siga O el centre de l'esfera circumscrita al cos.
Siga $\overline{AB} = 2x$ diàmetre de les bases del cilindre i els cons.
Siga $\overline{AD} = h$ altura del cilindre.
Siga M el punt mig de $\overline{AD}$.

$\overline{OD} = r$, $\overline{OM} = x$, $\overline{MD} = \frac{h}{2}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMD}$:

$$x^2 = r^2 - \frac{h^2}{4} \qquad (1)$$

Siga N el punt mig de $\overline{CD}$.

$\overline{NQ} = r - \frac{h}{2}$.

El volum del cos és:

$$V = \pi x^2 h + 2\left(\frac{1}{3}\pi x^2\left(r - \frac{h}{2}\right)\right) \qquad (2)$$

Substituint l'expressió (1) en l'expressió (2):

$$V(h) = \pi\left(-\frac{1}{6}h^3 - \frac{1}{6}rh^2 + \frac{2}{3}r^2h + \frac{2}{3}r^3\right),\ h \in [0, 2r].$$

$$V'(h) = \pi\left(-\frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{3}rh + \frac{2}{3}r^2\right).$$

$V'(h) = 0$. $-\frac{1}{2}h^2 - \frac{1}{3}rh + \frac{2}{3}r^2 = 0$. Resolent l'equació:

$$h = \frac{-1+\sqrt{13}}{3}r.$$

$V''(h) = \pi\left(-h - \frac{1}{3}r\right)$. $V''\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{3}r\right) < 0$. Aleshores, $h = \frac{-1+\sqrt{13}}{3}r$ és un màxim relatiu estricte.

El volum màxim és:

$$V\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{3}r\right) = \pi\frac{13\sqrt{13}+35}{81}r^3.$$

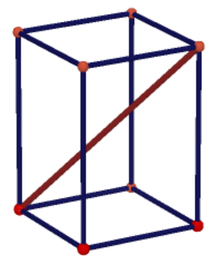
Problema 3

L'àrea de la base d'un ortoedre és igual a 1cm^2 i la longitud de la diagonal és 2cm.

Determineu:

a) Les dimensions de l'ortoedre de volum màxim i el volum màxim

b) Les dimensions de l'ortoedre d'àrea lateral màxima i l'àrea màxima.

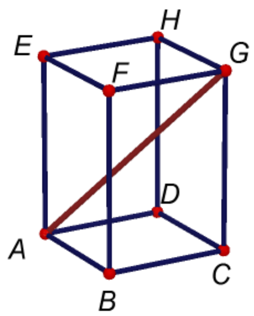


Solució:

Siga l'ortoede ABCDEFGH de diagonal $\overline{AG}=6$

Siga $\overline{AB}=a$.

Si l'àrea de la base ABCD és 1, aleshores: $\overline{BC}=\frac{1}{a}$.



Siga $\overline{AE}=b$ altura de l'ortoedre.

La diagonal de l'ortoedre és:

$$2=\sqrt{a^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2+b^2}\text{, aleshores:}$$

$$b=\sqrt{4-a^2-\frac{1}{a^2}}.$$

a)

El volum de l'ortoedre és:

$$V=a\frac{1}{a}b=b.$$

$$V(a)=\sqrt{4-a^2-\frac{1}{a^2}},\quad a\in\left[\sqrt{2-\sqrt{3}},\sqrt{2+\sqrt{3}}\right]$$

$$V'(a)=\frac{-a+\frac{1}{a^3}}{\sqrt{4-a^2-\frac{1}{a^2}}}.$$

$V'(a)=0$, $-a+\frac{1}{a^3}=0$. Resolent l'equació:

$a=1$.

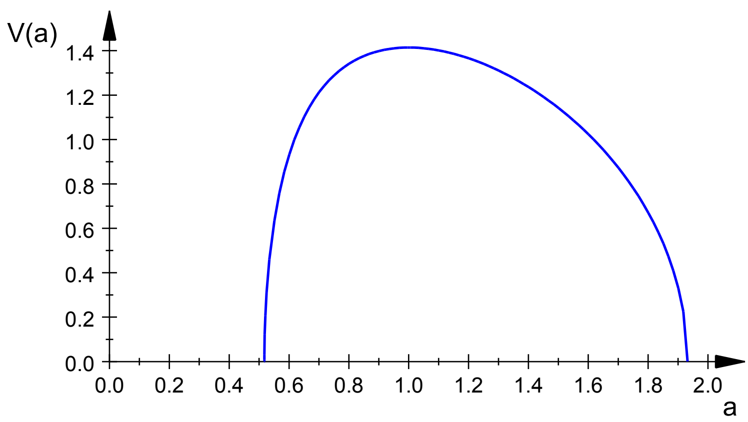
Estudiant el signe de la primera derivada en $a\in\left[\sqrt{2-\sqrt{3}},\sqrt{2+\sqrt{3}}\right]$,

$V'(a)>0$ en l'interval $\left]\sqrt{2-\sqrt{3}},1\right[$,

$V'(a)<0$ en l'interval $\left]1,\sqrt{2-\sqrt{3}}\right[$,

aleshores,

$a=1$ és el màxim de la funció.



En aquest cas $b=\sqrt{2}$.

El volum màxim és: $V(1)=\sqrt{2}\approx 1.4142\text{cm}^3$.

b)
L'àrea lateral de l'ortoedre és:

$$S = 2\left(a+\frac{1}{a}\right)b = 2\left(a+\frac{1}{a}\right)\sqrt{4-a^2-\frac{1}{a^2}}\ .$$

$$S(a) = 2\left(a+\frac{1}{a}\right)\sqrt{4-a^2-\frac{1}{a^2}}\ ,\ a \in \left[\sqrt{2-\sqrt{3}},\sqrt{2+\sqrt{3}}\right].$$

$$S'(a) = \frac{-4a^3+4a-\dfrac{4}{a^3}+\dfrac{4}{a^5}}{\sqrt{-a^4+2a^2+6+\dfrac{2}{a^2}-\dfrac{1}{a^4}}}\ .$$

$S'(a)=0$, $-4a^3+4a-\dfrac{4}{a^3}+\dfrac{4}{a^5}=0$.

$-a^8+a^6-a^2+1=0$. Factoritzant:

$-(a+1)(a-1)(a^6+1)=0$. Resolent l'equació:

$a=1$.

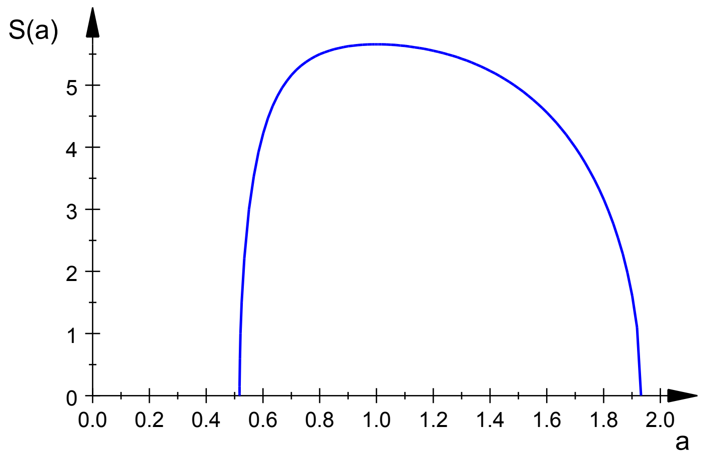
Estudiant el signe de la primera derivada en $a \in \left[\sqrt{2-\sqrt{3}},\sqrt{2+\sqrt{3}}\right]$,

$S'(a)>0$ en l'interval $\left]\sqrt{2-\sqrt{3}},1\right[$, $S'(a)<0$ en l'interval $\left]1,\sqrt{2-\sqrt{3}}\right[$, aleshores,

$a=1$ és el màxim de la funció.

En aquest cas $b=\sqrt{2}$.

L'àrea lateral màxima és: $S(1)=4\sqrt{2}\approx 5.6569\text{cm}^2$.



Problema 4

La base de la piràmide MABC és el triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB} = \overline{BC}$.

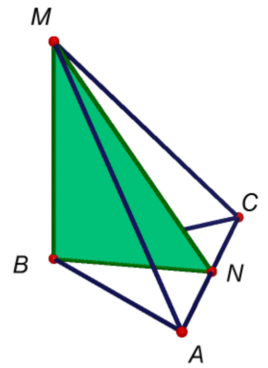
Les cares MBC i MAB són perpendiculars a la base i $\overline{MC} = 2\sqrt{2}$.

Amb quina altura de la piràmide la secció que passa pels punts B, M i pel punt mig de l'aresta $\overline{AC}$ té àrea màxima? Determineu l'àrea màxima.

Gúsiev, 928.

Solució:

Per ser cares MBC i MAB són perpendiculars a la base, $\overline{BM}$ és perpendicular a la base.



Siga $\overline{BM} = h$ altura de la piràmide.

Siga $\overline{AB} = \overline{BC} = a$.

Siga N el punt mig de l'aresta $\overline{AC}$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MBC}$:

$$a^2 + h^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2.$$

$$a = \sqrt{8 - h^2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BNC}$:

$$\overline{BN} = \frac{\sqrt{2}}{2}a.$$

L'àrea de la secció és l'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{MBN}$:

$$S(a,h) = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}ah.$$

$$S(h) = \frac{\sqrt{2}}{4}h\sqrt{8 - h^2}, \quad h \in \left[0, \sqrt{8}\right].$$

$$S'(h) = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{-2h^3 + 8h}{\sqrt{-h^4 + 8h^2}}.$$

$S'(h) = 0$, $-2h^3 + 8h = 0$. Resolent l'equació:

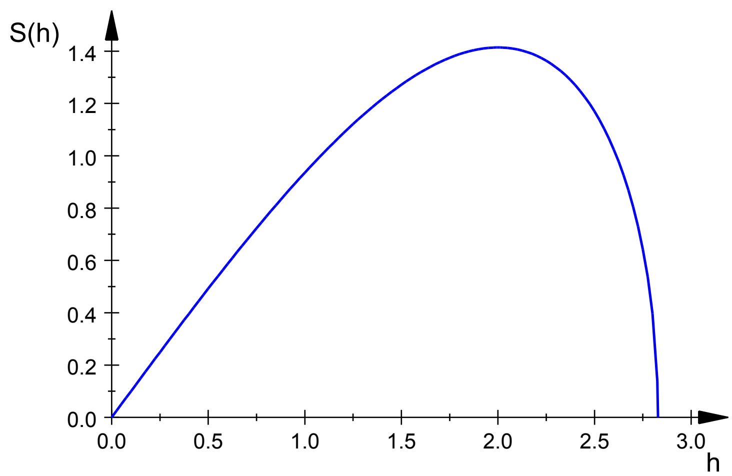
$h = 2$.

Estudiant el signe de la primera derivada en $h \in \left[0, \sqrt{8}\right]$,

$S'(h) > 0$ en l'interval $\left]0, 2\right[$, $S'(h) < 0$ en l'interval $\left]0, \sqrt{8}\right[$, aleshores,

$h = 2$ és el màxim de la funció.

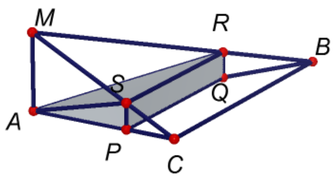
L'àrea màxima s'assoleix quan $h = 2$, $a = 2$ i l'àrea màxima $S(2) = \sqrt{2}$.



Problema 5

La base de la piràmide MABC és el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $C = 90°$, $A = 60°$, $\overline{AC} = 6\text{cm}$. L'aresta $\overline{MA}$ és perpendicular a la base, $\overline{MA} = 3\text{cm}$.
En la piràmide MABC està inscrita una piràmide de vèrtexs A, la base de la qual és la secció de la piràmide donada pel plànol paral·lel a les arestes $\overline{MA}$, $\overline{BC}$.
Determineu el volum màxim de la piràmide inscrita.
Gúsiev, 949.

Solució:
La secció formada pel plànol paral·lel a les arestes $\overline{MA}$, $\overline{BC}$, és el rectangle PQRS.
La piràmide APQRS té altura $\overline{AP}$.
Siga $\overline{AP} = x$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:
$\overline{AB} = 12$, $\overline{BC} = 6\sqrt{3}$.

Aplicant el teorema de Tales als triangles semblants $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{AQP}$:
$\overline{PQ} = x\sqrt{3}$.

$\overline{PC} = 6 - x$.

Aplicant el teorema de Tales als triangles semblants $\overset{\Delta}{ACM}$, $\overset{\Delta}{PCS}$:

$$\overline{PS} = \frac{3}{6}\overline{PC} = \frac{6-x}{2}.$$

El volum de la piràmide APQRS és:

$$V = \frac{1}{3}\overline{PQ}\cdot\overline{PS}\cdot\overline{AP}.$$

$$V(x) = \frac{1}{3}x\sqrt{3}\cdot\frac{6-x}{2}\cdot x,\ x \in [0, 6].$$

$$V(x) = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(-x^3 + 6x^2\right).$$

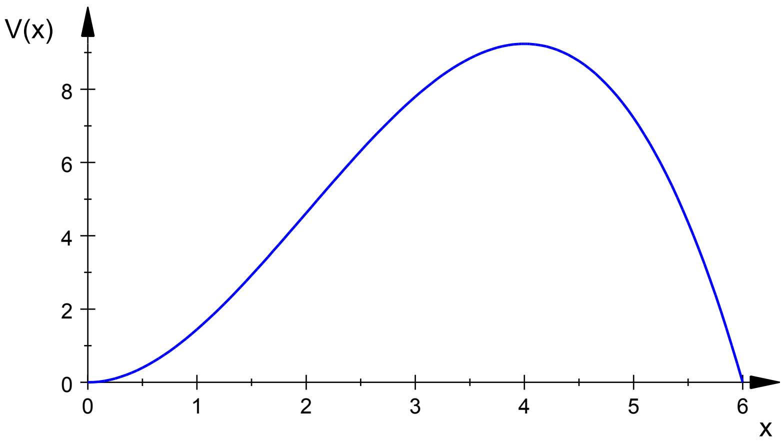
$$V'(x) = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(-3x^2 + 12x\right).$$

$V'(x) = 0$.

$-3x^2 + 12x = 0$, resolent l'equació:
$x = 4$.

$$V''(x) = \frac{\sqrt{3}}{6}(-6x + 12)$$

$V'(4) < 0$.



Aleshores, $x = 4$ és el màxim de la funció.

El volum màxim s'assoleix quan $x = 4$ i el volum màxim és, $V(4) = \frac{16\sqrt{3}}{3} \approx 9.2376\text{cm}^3$

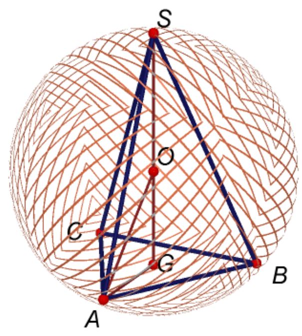
Problema 6

a) Calculeu el volum màxim d'una piràmide regular triangular inscrita en una esfera de radi R.

b) Calculeu el valor màxim de la suma de les arestes d'una piràmide regular triangular inscrita en una esfera de radi R.

Solució:

Siga l'esfera de centre O i radi R



Siga la piràmide ABCS de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$

Siga $\overline{AB}=a$, $\overline{AS}=\overline{BS}=\overline{CS}=b$.

Siga G el baricentre.

$\overline{OS}=\overline{OA}=R$. Siga $\alpha=\angle AOS$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AOS}$

$b^2=R^2+R^2-2R^2\cos\alpha$.

$b=R\sqrt{2-2\cos\alpha}$.

$\overline{AG}=\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOG}$.

$a=R\sqrt{3}\sin\alpha$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AGS}$:

$$\overline{SG}^2=2R^2-2R^2\cos\alpha-\left(\frac{\sqrt{3}}{3}R\sqrt{3}\sin\alpha\right)^2.$$

$$\overline{SG}=R\sqrt{2-2\cos\alpha-\sin^2\alpha}$$

a)

El volum de la piràmide ABCS és:

$$V=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\overline{SG}.$$

$$V(\alpha)=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{4}3R^2\sin^2\alpha\cdot R\sqrt{2-2\cos\alpha-\sin^2\alpha},\ \alpha\in[0,\pi].$$

$$V(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{4}R^3\sqrt{2\sin^4\alpha-2\sin^4\alpha\cos\alpha-\sin^6\alpha}.$$

$$V'(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{4}R^3\frac{8\sin^3\alpha\cos\alpha-8\sin^3\alpha\cos^2\alpha+2\sin^5\alpha-6\sin^5\alpha\cos\alpha}{2\sqrt{2\sin^4-2\sin^2\alpha\cos\alpha-\sin^6\alpha}}.$$

$V'(\alpha)=0$.

$8\sin^3\alpha\cos\alpha-8\sin^3\alpha\cos^2\alpha+2\sin^5\alpha-6\sin^5\alpha\cos\alpha=0$. Simplificant:

$4\cos\alpha-4\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-3\sin^2\alpha\cos\alpha=0$.

$4\cos\alpha-4\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-3\sin^2\alpha\cos\alpha=0$.

$3\cos^3\alpha-5\cos^2\alpha+\cos\alpha+1=0$.

$\cos\alpha=\frac{-1}{3}$.

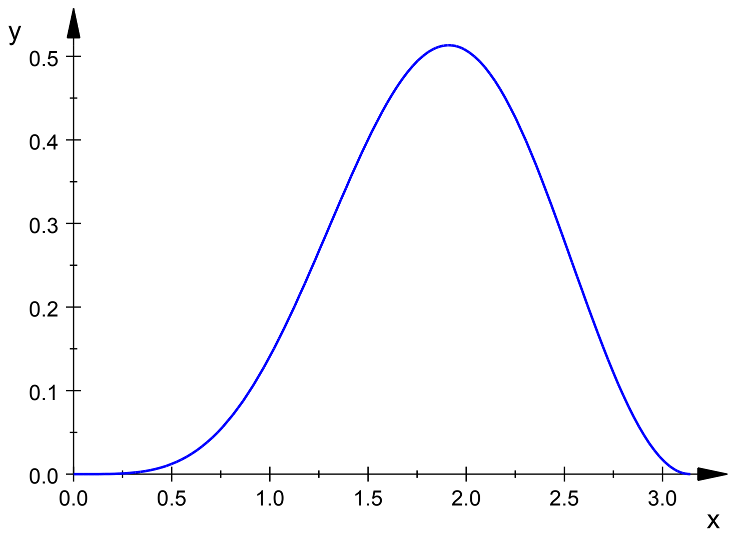
Estudiant el signe de la primera derivada:

$\cos\alpha = \frac{-1}{3}$ és un màxim relatiu estricte.

$a = b = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, és a dir, és un tetraedre regular.

El volum màxim és:

$V\left(\arccos\frac{-1}{3}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{27}R^3$.



Gràfica per a $R = 1$, $y = \frac{\sqrt{3}}{4}\sin^2\alpha\sqrt{2 - 2\cos\alpha - \sin^2\alpha}$.

b)

La suma de les arestes és:

$f(a,b) = 3a + 3b$.

$f(\alpha) = 3\left(\sqrt{3}R\cdot\sin\alpha + R\sqrt{2 - 2\cos\alpha}\right)$, $\alpha \in [0, \pi]$.

$f'(\alpha) = 3R\left(\sqrt{3}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}\sin\alpha}{2\sqrt{1-\cos\alpha}}\right)$

$f'(\alpha) = 0$.

$\sqrt{3}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}\sin\alpha}{2\sqrt{1-\cos\alpha}} = 0$.

$3\cos^2\alpha = \frac{1}{2}\frac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}$.

$3\cos^3\alpha - 7\cos^2\alpha + 1 = 0$. Resolent l'equació:

$\cos\alpha = \frac{-1}{3}$, $\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

La solució $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ no és solució de $\sqrt{3}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}\sin\alpha}{2\sqrt{1-\cos\alpha}} = 0$.

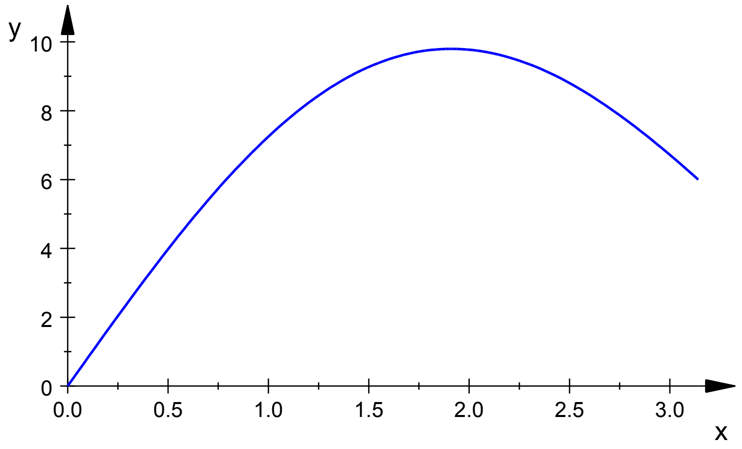
Estudiant el signe de la primera derivada:

$\cos\alpha = \frac{-1}{3}$ és un màxim relatiu estricte.

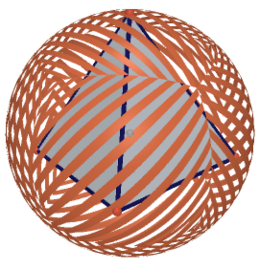
$a = b = \frac{2\sqrt{6}}{3}$, és a dir, és un tetraedre regular.

La suma màxima és:

$f\left(\arccos\frac{-1}{3}\right) = 4\sqrt{6}R$.

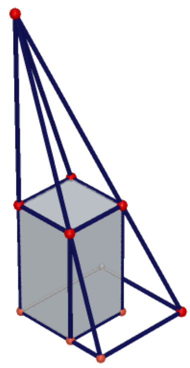


Gràfica per a $R = 1,\ y = 3\left(\sqrt{3}\sin x + \sqrt{2 - 2\cos x}\right)$.



Problema 7

Una piràmide té base quadrada de costat 1dm.
Una de les arestes laterals és perpendicular a la base i mesura 3dm.
La piràmide es talla per un plànol paral·lel a la base a una distància x de la mateixa. Determineu l'àrea total del prisma recte que projecta aquesta secció sobre el plànol de la base de la piràmide.
Determineu el valor de x per al qual és màxima aquesta àrea.
Problemes de Grau. problema 1971.



Solució:

Siga la piràmide ABCDM de base quadrada ABCD, $\overline{AB}=1$.

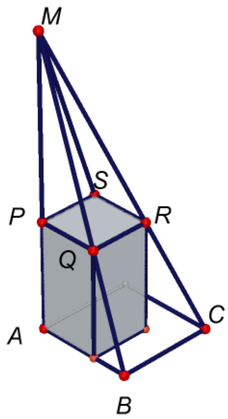
Siga $\overline{AM}=3$ l'aresta lateral perpendicular a la base.

Siga P de l'aresta $\overline{AM}$ tal que $\overline{AP}=x$

La secció formada és el quadrat PQRS, paral·lel al quadrat ABCD.

Siga $\overline{PQ}=c$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABM}$, $\overset{\Delta}{PQM}$ són semblants.



Aplicant el teorema de tales:

$\frac{1}{3}=\frac{a}{3-x}$. Aleshores:

$a=\frac{3-x}{3}$.

L'àrea total del prisma que determina la projecció del quadrat PQRS sobre la base és:

$S=4\cdot\overline{PQ}\cdot\overline{AP}+2\cdot\overline{PQ}^2$

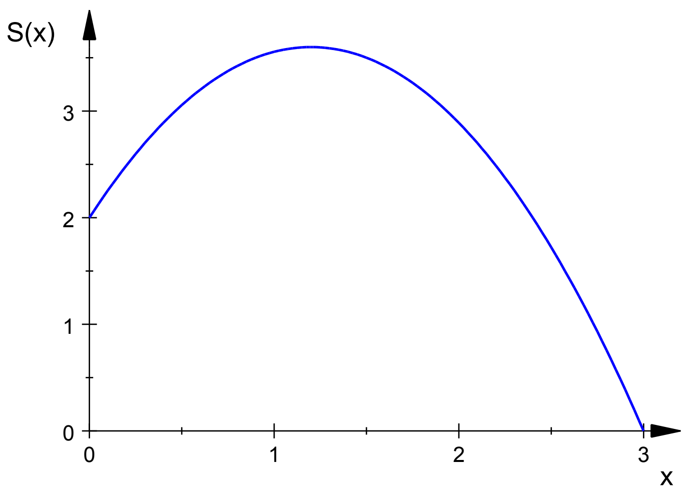
$S(x)=4\left(\frac{3-x}{3}\right)x+2\left(\frac{3-x}{3}\right)^2$. Simplificant:

$S(x)=-\frac{10}{9}x+\frac{8}{3}x+2,\ x\in[0,3]$.

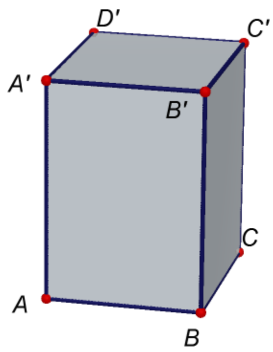
La funció és una paràbola convexa el màxim s'assoleix en el vèrtex.

El vèrtex és: $x=\frac{\frac{-8}{3}}{2\left(\frac{-10}{9}\right)}=\frac{3}{5}=0.6\text{dm}$.

La superfície màxima és $S\left(\frac{3}{5}\right)=3.2\text{dm}^2$.

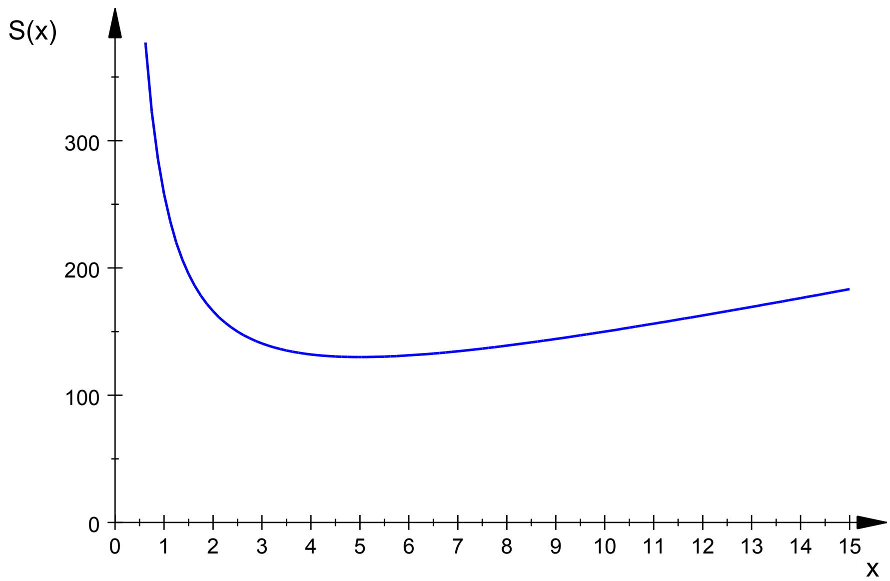


Problema 8



Un ortoedre, de 100dm^3 de volum, té una aresta de 4dm de longitud.
Determineu les altres dues dimensions, si l'àrea total ha de ser la mínima possible. Calculeu l'àrea.
Prova de Grau 1968. Problema 77

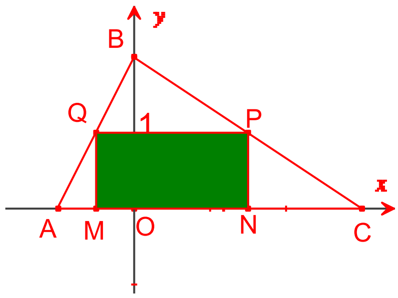
Solució:
Siga l'ortoedre ABCDA'B'C'D' d'aresta $\overline{AB} = 4$.
Siguen $\overline{BC} = x$, $\overline{AA'} = y$.
El volum de l'ortoedre és 100 aleshores:
$4xy = 100$.
$y = \dfrac{25}{x}$.
L'àrea de l'ortoedre és:
$S(x, y) = 2(4x + 4y + xy)$.
$S(x) = 2\left(4x + \dfrac{100}{x} + 25\right)$, $x \in]0, +\infty[$.
$S'(x) = 2\left(4 - \dfrac{100}{x^2}\right)$.
$S'(x) = 0$, $4 - \dfrac{100}{x^2} = 0$. Resolent l'equació:
$x = 5$.
$S''(x) = \dfrac{400}{x^3}$, $S''(5) = \dfrac{400}{5^3} > 0$. Aleshores, $x = 5$ és un mínim relatiu estricte.
La superfície mínima de l'ortoedre s'assoleix quan les altre arestes mesuren $x = y = 5\text{dm}$ i la superfície mínima és $S(5) = 130\text{dm}^2$.



Problema 9

Donat el triangle de vèrtexs $A(-1,0)$, $B(0,2)$, $C(3,0)$ inscrivim en ell el rectangle MNPQ d'àrea màxima, tal que els vèrtex M, N pertanyen al costat $\overline{AC}$, el vèrtex P pertany al costat $\overline{BC}$ i Q pertany al costat $\overline{AB}$.
Determineu els vèrtexs del rectangle MNPQ i la seu àrea.
Prova de Grau, 1968, problema 25.

Solució:



Siga $x=\overline{ON}$, les coordenades de N són $N(x,0)$.

Siga $y=\overline{OM}$, les coordenades de M són $M(-y,0)$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BOC}$, $\overset{\Delta}{PNC}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{2}{3}=\frac{\overline{PN}}{3-x}$. $\overline{PN}=\overline{QM}=\frac{2}{3}(3-x)$.

Les coordenades de P són $P\left(x,\frac{2}{3}(3-x)\right)$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{BOA}$, $\overset{\Delta}{QMA}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{1}{2}=\frac{\overline{AM}}{\overline{QM}}$. $\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{QM}=\frac{1}{3}(3-x)$.

$y=\overline{OM}=1-\overline{AM}=\frac{1}{3}x$.

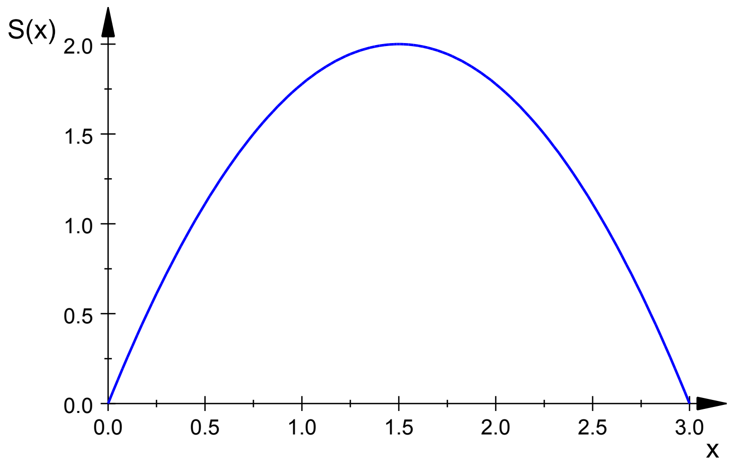
Les coordenades de M són $M\left(\frac{1}{3}x,0\right)$. Les coordenades de Q són $Q\left(\frac{1}{3}x,\frac{2}{3}(3-x)\right)$.

L'àrea del rectangle MNPQ és:

$S=\overline{MN}\cdot\overline{PN}=(x+y)\frac{2}{3}(3-x)$.

$S(x)=\left(x+\frac{1}{3}x\right)\frac{2}{3}(3-x)$, $x\in[0,3]$.

$S(x)=-\frac{8}{9}x^2+\frac{8}{3}x$.



La funció és una paràbola convexa el màx

El vèrtex és: $x=\dfrac{\frac{-8}{3}}{2\left(\frac{-8}{9}\right)}=\frac{3}{2}$.

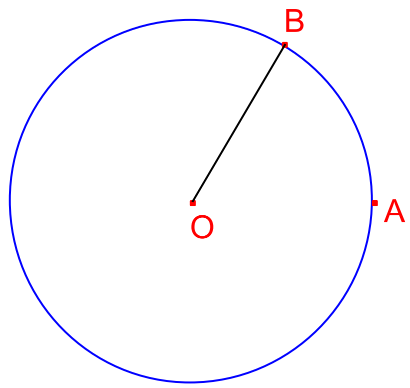
La superfície màxima és $S\left(\frac{3}{2}\right)=2$.

Les coordenades dels vèrtexs del rectangle MNPQ són:

$M\left(-\frac{1}{2},0\right)$, $N\left(\frac{3}{2},0\right)$, $P\left(\frac{3}{2},1\right)$, $Q\left(-\frac{1}{2},1\right)$.

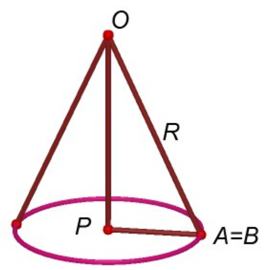
Problema 10
En un disc metàl·lic retallem un sector de manera que amb la part restant construïm un con de volum màxim.
Determineu l'angle del sector que retallem.
Temes de Grau. Problema 1958.

Solució:
Siga el disc de centre O i radi R.



Siga l'arc $\overset{\frown}{AB}$ tal que $\angle AOB = x$.
La longitud de l'arc del sector que retallem és:
Rx
La longitud de l'arc que resta (que és igual a la longitud de la circumferència del con és:
$2\pi R - Rx$.
Siga r el radi del con. La seua longitud és:
$2\pi r = 2\pi R - Rx$. Aleshores:

$$r = R - \frac{R}{2\pi}x.$$



La generatriu del con és igual a radi R del disc metàl·lic.
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle format pel radi del con la generatriu i l'altura, l'altura del con és:

$$h = \sqrt{R^2 - \left(R - \frac{R}{2\pi}x\right)^2}.$$

El volum del con és:

$$V(x) = \frac{\pi}{3}\left(R - \frac{R}{2\pi}x\right)^2 \sqrt{R^2 - \left(R - \frac{R}{2\pi}x\right)^2}, \text{ on } x \in [0, 2\pi].$$

$$V(x) = \frac{\pi}{3}\sqrt{R^2\left(R - \frac{R}{2\pi}x\right)^4 - \left(R - \frac{R}{2\pi}x\right)^6}.$$

$$V'(x) = \frac{\pi}{3}\frac{4R^2\left(R - \frac{R}{2\pi}x\right)^3\left(\frac{-R}{2\pi}\right) - 6\left(R - \frac{R}{2\pi}x\right)^5\left(\frac{-R}{2\pi}\right)}{2\sqrt{R^2\left(R - \frac{R}{2\pi}x\right)^4 - \left(R - \frac{R}{2\pi}x\right)^6}}.$$

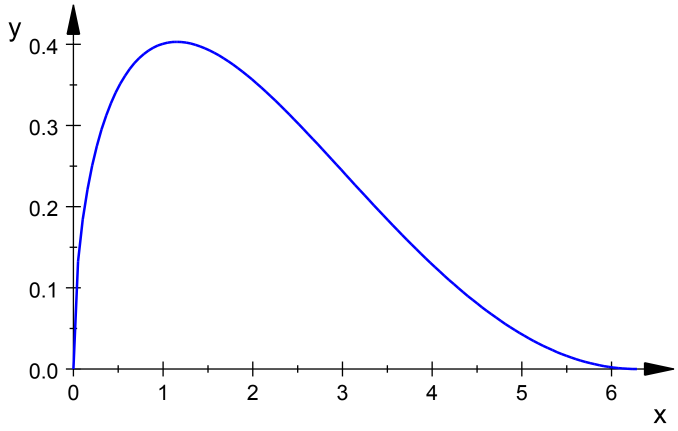
$V'(x) = 0$.

$3x^2 - 12\pi x - 4\pi^2 = 0$. Resolent l'equació:

$$x = \left(2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\pi \approx 1.15299\text{rd}.$$

En graus sexagesimals $x \approx 66°4'$.
Estudiant el signe de la primera derivada, la funció és estrictament creixent en $\left]0, \left(2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\pi\right[$ i monòtona decreixent en $\left]\left(2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\pi, 2\pi\right[$.

Aleshores, $x=\left(2-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\pi$ és el màxim de la funció.



Funció volum per a $R=1$.