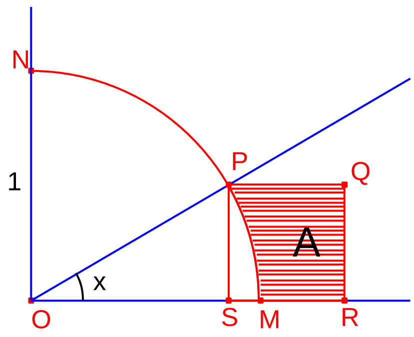
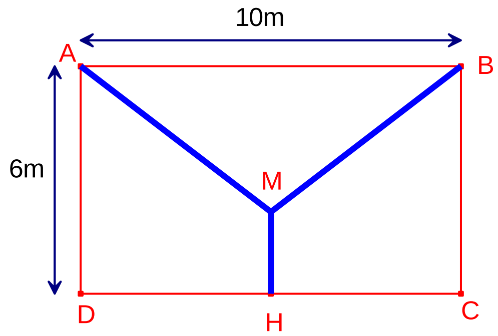
Problema 1

En el gràfics el quadrant de centre O té radi $\overline{OM} = \overline{ON} = 1$.
PQRS és un quadrat.
Per a quins valors de l'angle x l'àrea de la zona ratllada A és màxima.
Calculeu l'àrea màxima.



Problema 2

Siga una façana d'una casa ABCD rectangular de $\overline{AB} = 10\text{m}$, $\overline{AD} = 6\text{m}$.
Dues canonades obliqües AM i BM conflueixen en la canonada vertical MH (MH mediatriu del costat $\overline{AB}$).
On hem de situar el punt M a fi que la suma de les longituds de les tres canonades siga mínima.

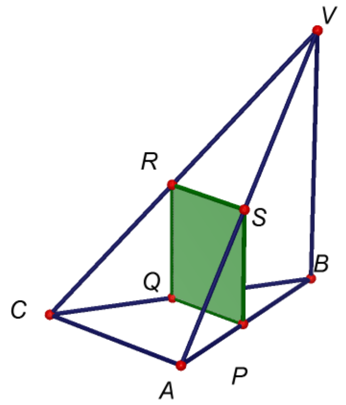


Problema 3

La base del tetraedre VABC és el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^{\circ}$.
L'aresta $\overline{VB}$ és perpendicular al plànol de la base.
Tenim que $\overline{VB} = 5\text{dm}$, $\overline{BA} = 4\text{dm}$, $\overline{AC} = 3\text{dm}$.
Sobre l'aresta $\overline{BA}$ agafem el punt P tal que $\overline{PB} = x$.
Pel punt P tracem un plànol perpendicular a l'aresta $\overline{BA}$.
Es demana determinar:

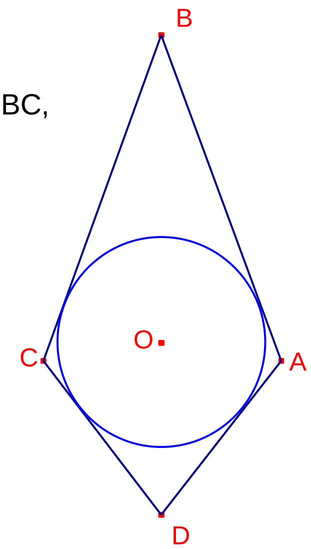
a) L'àrea de la secció que determina el plànol en el tetraedre.
b) El valor de x a fi que aquesta àrea siga màxima.
c) El valor de l'àrea màxima.

Temes de Grau. Problema 47.



Problema 4

De tots els deltoides ABCD (cometes) de costats constants a=AB=BC, b=CD=DA
a) quin és el d'àrea màxima.
b) quin és el cercle inscrit d'àrea màxima.



Problema 5

Partim un cordell de 100cm en dos trossos. En el primer construïm un quadrat i en el segon un rectangle tal que la base siga el doble que l'altura. Per on hem de tallar a fi que la suma de les àrees del quadrat i del rectangle siga mínima.

Problema 6

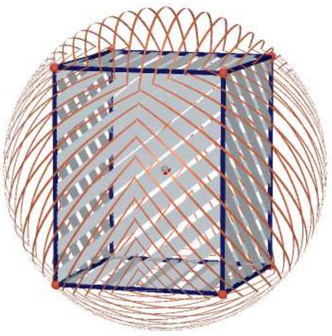
Donat un punt A en una circumferència es dibuixa la secant BC, paral·lela a la recta tangent a la circumferència en A. On hem de dibuixar la secant de manera que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ sigui màxima?.

Problema 7

La base d'una piràmide triangular és un triangle equilàter de costat 1.
Les altres arestes mesuren a.
Determineu la secció de la piràmide, perpendicular a la base, d'àrea màxima.

Problema 8

De tots els prismes regulars quadrangulars inscrits en una esfera de radi r determineu les dimensions del de major volum. Calculeu el volum màxim.



Problema 9

En una esfera de radi R quin és el prisma triangular regular inscrit en l'esfera de volum màxim. Calculeu el volum màxim.

Problema 10

Entre les piràmide de n costats regulars amb àrea constant d'una cara lateral determineu l'angle entre la cara lateral i la base de la de volum màxim.
Gúsiev, problema 925.

Problema 11

Entre les piràmide de n costats regulars amb l'aresta lateral constant determineu l'angle entre l'aresta lateral i la base de la de volum màxim.
Gúsiev, problema 924.

Problema 12

Determineu l'àrea màxima d'un rectangle tal que un costat és tangent a una circumferència
de radi r i els vèrtexs del costat paral·lels pertanyen a la circumferència

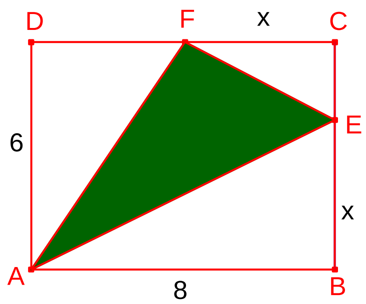
Problema 13

Els costats del rectangle ABCD mesuren $\overline{AB} = 8$, $\overline{AD} = 6$.
Siguen els punts E del costat $\overline{BC}$ i F del costat $\overline{CD}$ tal que
$\overline{BE} = \overline{CF} = x$.

a) Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AEF}$ en funció de x.

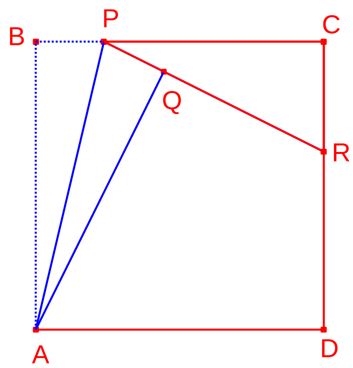
b) Determineu l'àrea mínima del triangle $\overset{\Delta}{AEF}$.

c) Determineu l'àrea màxima del triangle $\overset{\Delta}{AEF}$.



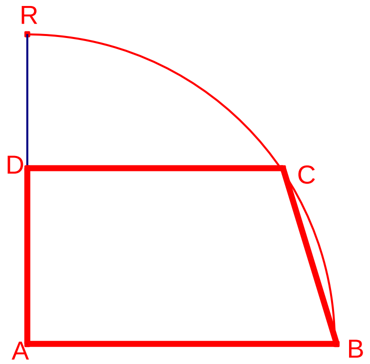
Problema 14

Siga ABCD un quadrat de paper de costat 10.
Siga P un punt del costat $\overline{BC}$.
Dobleguem el paper per la recta AP i el punt B determina el punt Q, com veiem en la figura.
La recta PQ talla el costat $\overline{CD}$ en el punt R.
Calculeu l'àrea màxima del triangle $\overset{\Delta}{PCR}$.



Problema 15

En un quadrant de circumferència de centre A i radi r i arc BR s'ha inscrit un trapezi ABCD.
Determineu el valor de l'angle $\angle BAC$ tal que la l'àrea del trapezi siga màxima.

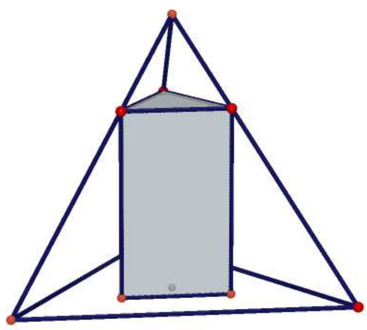


Problema 16

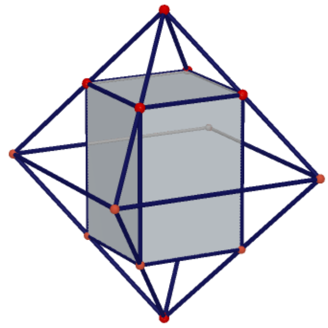
De tots els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que la base $c = \overline{AB} = 6$ i altura sobre aquesta base $h_c = 4$, determineu el de perímetre mínim.

Problema 17

Determineu el prisma regular de volum màxim inscrit en un tetraedre regular d'aresta a (una base del prisma pertany a la cara del tetraedre i els vèrtexs de l'altra cara pertanyen a les altres arestes del tetraedre).



Problema 18



Determineu el prisma regular de volum màxim inscrit en un octaedre regular d'aresta a (els vèrtexs del prisma pertanyen a les arestes de l'octaedre).

Problema 19

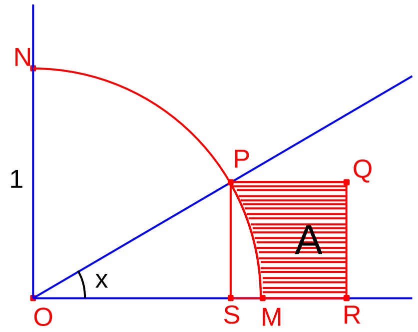
Donat el triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAB}$, O(0, 0) A(a, 0) B(0, b) determineu el pendent de la recta que passa per O i fa màxima la suma de les distàncies dels vèrtexs A i B a la recta.

Problema 20

Tres segments circulars s'han tallat d'una placa metàl·lica semicircular per formar un trapezi. Quines han de ser les dimensions del trapezi per minimitzar la zona tallada?
KöMaL, C1251. Octubre 2014.

Problema 1

En el gràfics el quadrant de centre O té radi $\overline{OM} = \overline{ON} = 1$.
PQRS és un quadrat.
Per a quins valors de l'angle x l'àrea de la zona ratllada A és màxima.
Calculeu l'àrea màxima.



Solució:

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OSP}$

$\overline{PS} = \sin x$, $\overline{OS} = \cos x$.

L'àrea del quadrat PQRS és:

$S_{PQRS} = \sin^2 x$, x en radians.

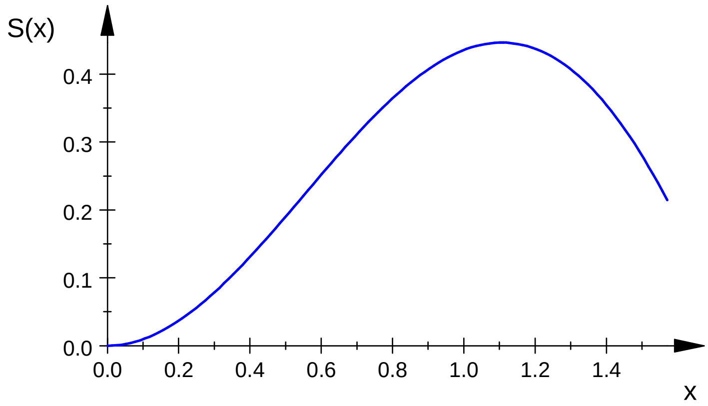
L'àrea del sector circular de radi 1 i angle x és:

$$S_{sector} = \frac{x}{2}1^2 - \frac{1}{2}\cos x \cdot \sin x.$$

L'àrea de la zona ratllada A és:

$S = S_{PQRS} - S_{sector}$.

$$S(x) = \sin^2 x - \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin x \cdot \cos x}{2}\right), \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$



$$S'(x) = 2\sin x \cdot \cos x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2 x - \frac{1}{2}\sin^2 x.$$

$$S'(x) = 2\sin x \cdot \cos x - \sin^2 x.$$

$S'(x) = 0$.

$\sin x \cdot (2\cos x - \sin x) = 0$. Resolent l'equació:

$x = 0, \operatorname{arctg}2$.

$$S''(x) = 2\cos^2 x - 2\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x.$$

$$S''(x) = 2 - 4\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x$$

$S''(0) = 2$. Aleshores, $x = 0$ és un mínim relatiu estricte.

$S''(\operatorname{arctg}2) = \dfrac{-8}{5} < 0$, $x = \operatorname{arctg}2$ és un màxim relatiu estricte.

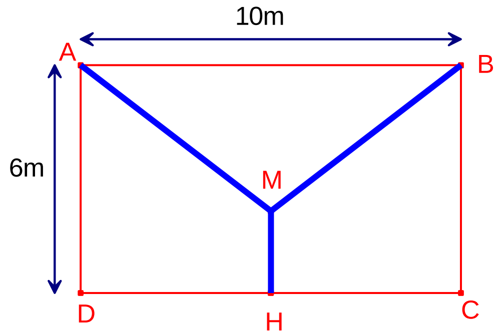
L'àrea màxima de la zona ratllada A, s'assoleix quan $x = \operatorname{arctg}2 \approx 1.10715$, que correspon aproximadament a l'angle en forma sexagesimal 63º26'6". L'àrea màxima és:

$$S(\operatorname{arctg}2) = 1 - \frac{\operatorname{arctg}2}{2} \approx 0.4464.$$

Problema 2

Siga una façana d'una casa ABCD rectangular de $\overline{AB}=10m$, $\overline{AD}=6m$.

Dues canonades obliqües AM i BM conflueixen en la canonada vertical MH (MH mediatriu del costat $\overline{AB}$). On hem de situar el punt M a fi que la suma de les longituds de les tres canonades siga mínima.



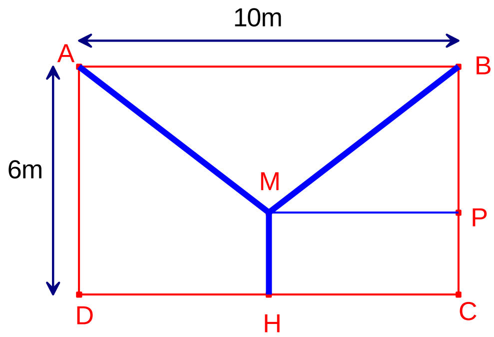
Solució

Siga $\overline{HM}=x$.

Siga P la projecció de M sobre la vertical $\overline{BC}$.

$\overline{PB}=6-x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MPB}$:



$\overline{BM}=\sqrt{5^2+(6-x)^2}=\sqrt{61-12x+x^2}$.

La suma de la longitud de les tres canonades és:

$L(x)=x+2\sqrt{x^2-12x+61}$, $x\in[0,6]$.

$L'(x)=1+\dfrac{2x-12}{\sqrt{x^2-12x+61}}$.

$L'(x)=0$.

$1+\dfrac{2x-12}{\sqrt{x^2-12x+61}}=0$, $12-2x=\sqrt{x^2-12x+61}$.

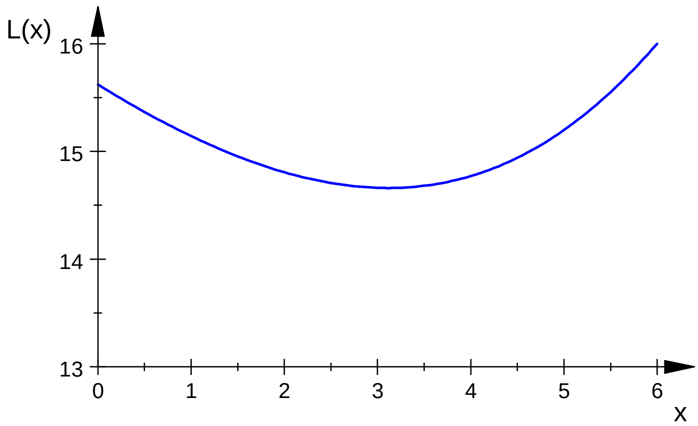
Resolent l'equació:

$x=\dfrac{18-5\sqrt{3}}{3}$.

$L''(x)=\dfrac{50}{(x^2-12+61)\sqrt{x^2-12x+61}}$.

$L''\left(\dfrac{18-5\sqrt{3}}{3}\right)>0$, aleshores, $x=\dfrac{18-5\sqrt{3}}{3}$

és un mínim relatiu estricte.



El mínim de la suma de les longituds de les canonades s'assoleix quan el punt M es troba en la mediatriu del costat $\overline{AB}$ a una distància $x=\dfrac{18-5\sqrt{3}}{3}\approx 3.11m$ del terra i la longitud màxima és $L\left(\dfrac{18-5\sqrt{3}}{3}\right)=5\sqrt{3}+6\approx 14.66m$.

Notem que en aquest cas $\angle AMB=120^o$. Per tant el tres angles que formen les canonades són de 120º.

Problema 3

La base del tetraedre VABC és el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90^o$.

L'aresta $\overline{VB}$ és perpendicular al plànol de la base.

Tenim que $\overline{VB} = 5dm$, $\overline{BA} = 4dm$, $\overline{AC} = 3dm$.

Sobre l'aresta $\overline{BA}$ agafem el punt P tal que $\overline{PB} = x$.

Pel punt P tracem un plànol perpendicular a l'aresta $\overline{BA}$.

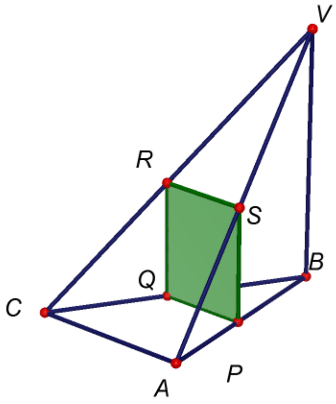
Es demana determinar:

d) L'àrea de la secció que determina el plànol en el tetraedre.

e) El valor de x a fi que aquesta àrea siga màxima.

f) El valor de l'àrea màxima.

Temes de Grau. Problema 47.



Solució:

$\overline{BC} = 5$, $\overline{AV} = \sqrt{41}$, $\overline{CV} = 5\sqrt{2}$.

Vegem que la secció és el rectangle PQRS:

Notem que $\overline{PS}$ és perpendicular a $\overline{BA}$ i $\overline{QR}$ és perpendicular a $\overline{BC}$ i $\overline{PQ}$ és paral·lel a $\overline{CA}$.

Aplicant el teorema de Tales als triangles semblants $\overset{\Delta}{ABV}$, $\overset{\Delta}{APS}$:

$\frac{\overline{PS}}{4-x} = \frac{5}{4}$, Aleshores, $\overline{PS} = \frac{5}{4}(4-x)$.

Aplicant el teorema de Tales als triangles semblants $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{PBQ}$:

$\frac{\overline{CQ}}{4-x} = \frac{5}{4}$, Aleshores, $\overline{CQ} = \frac{5}{4}(4-x)$.

El triangle $\overset{\Delta}{CQR}$ és rectangle i isòsceles com el triangle $\overset{\Delta}{CBV}$:

Aleshores, $\overline{QR} = \overline{CQ} = \frac{5}{4}(4-x)$.

Aleshores, $\overline{PS} = \overline{QR}$ i $\overline{PQ}$ és perpendicular a $\overline{PS}$ i a $\overline{QR}$.

Per tant, PQRS és un rectangle.

Aplicant el teorema de Tales als triangles semblants $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overset{\Delta}{PBQ}$:

$\frac{\overline{PQ}}{x} = \frac{3}{4}$, Aleshores, $\overline{PQ} = \frac{3}{4}x$.

L'àrea del rectangle PQRS és:

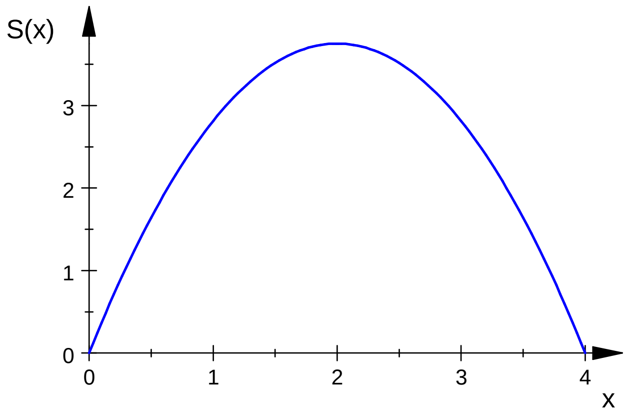
$S_{PQRS} = \overline{PQ} \cdot \overline{PS} = \frac{3}{4}x \cdot \frac{5}{4}(4-x)$.

$S(x) = \frac{15}{16}\left(-x^2 + 4x\right)$, $x \in [0, 4]$.

La funció és una paràbola convexa.

El màxim s'assoleix en el vèrtex, és a dir, quan $x = 2$ i l'àrea màxima és:

$S(2) = \frac{15}{4} = 3.75dm^2$.

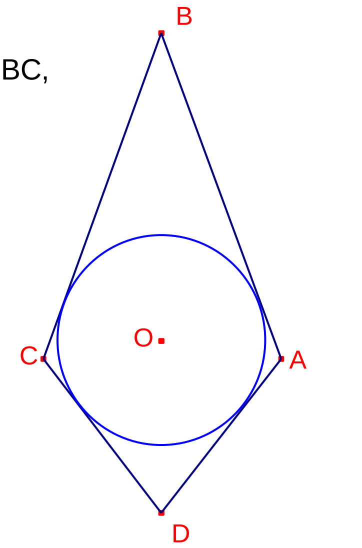


Problema 4

De tots els deltoides ABCD (cometes) de costats constants a=AB=BC, b=CD=DA

a) quin és el d'àrea màxima.

b) quin és el cercle inscrit d'àrea màxima.



Solució:

a)

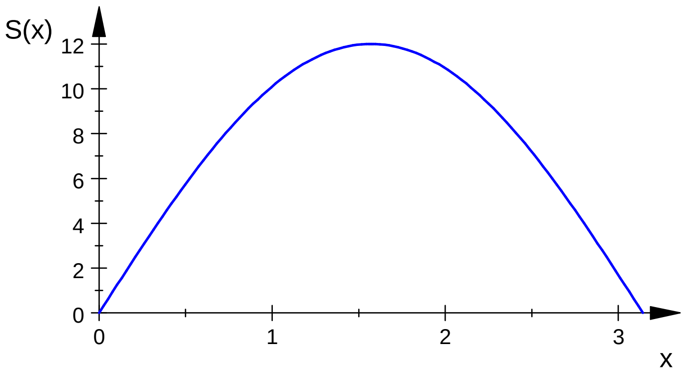
Siga $\alpha = \angle BAD$.

L'àrea del cometa és:

$S(\alpha) = ab \cdot \sin\alpha, \quad \alpha \in [0, \pi]$.

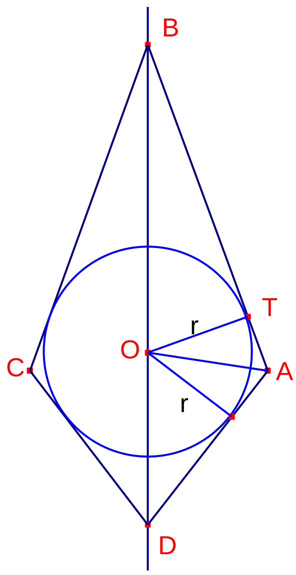
L'àrea màxima s'assoleix quan $\alpha = 90^{o}$.

L'àrea màxima és $S\left(\frac{\pi}{2}\right) = ab$



$a = 4, b = 3, \quad S(x) = 12\sin x$

b)



Siga $r = \overline{OT}$ radi de la circumferència inscrita al cometa.

L'àrea del cometa és:

$$S = 2S_{ABO} + 2S_{ADO} = 2\frac{1}{2}ar + 2\frac{1}{2}br.$$

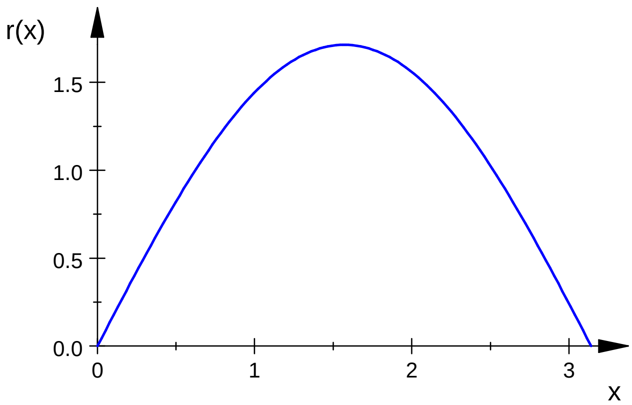
$S = ab \cdot \sin\alpha$.

$ab \cdot \sin\alpha = (a+b)r$.

$$r(\alpha) = \frac{ab}{a+b}\sin\alpha, \quad \alpha \in [0, \pi].$$

El radi màxim s'assoleix quan $\alpha = 90^{o}$.

El radi màxim és $r(\alpha) = \frac{ab}{a+b}\sin\alpha$.

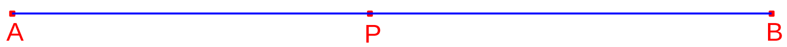


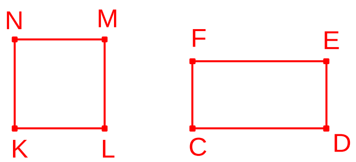
$a = 4, b = 3, \quad r(x) = \frac{12}{7}\sin x$

Problema 5

Partim un cordell de 100cm en dos trossos. En el primer construïm un quadrat i en el segon un rectangle tal que la base siga el doble que l'altura. Per on hem de tallar a fi que la suma de les àrees del quadrat i del rectangle siga mínima.

Solució:





Siga $\overline{AB}=100$ el cordell.

Siga $\overline{AP}=x$ el perímetre del triangle (P el punt de tall del cordell).

El perímetre del rectangle és $\overline{PB}=100-x$

Siga el quadrat KLMN format amb el tros $\overline{AP}$. El seu costat és:

$$\overline{KL}=\frac{x}{4}.$$

Siga CDEF el rectangle format am el tros $\overline{PB}$.

Siga $y=\overline{CF}$ altura, aleshores, $\overline{CD}=2y$.

El perímetre del rectangle és:

$6y=100-x$. Aïllant y:

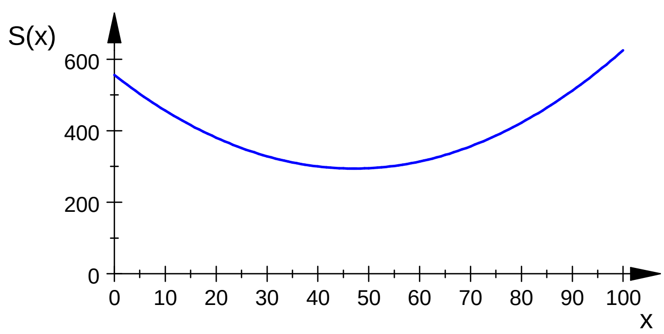
$$y=\frac{100-x}{6}.$$

La suma de les àrees del quadrat i del rectangle és:

$$S(x,y)=\left(\frac{x}{4}\right)^2+2y^2.$$

$$S(x)=\left(\frac{x}{4}\right)^2+2\left(\frac{100-x}{6}\right)^2,\ \ x\in[0,100].$$

$$S(x)=\frac{1}{144}\left(17x^2-1600x+80000\right).$$



La funció és una paràbola còncava.

El seu mínim s'assoleix en el vèrtex.

El vèrtex del la paràbola és:

$$x=\frac{800}{17}\approx 47.06\text{cm}.$$

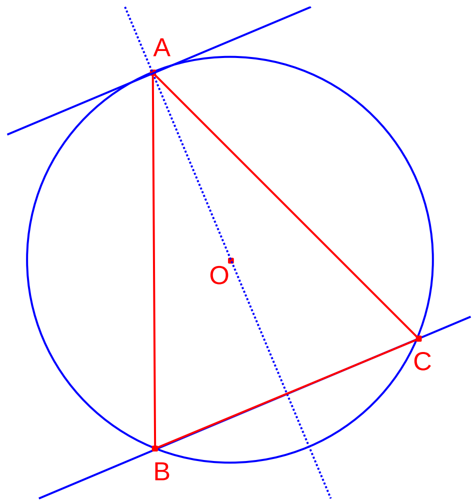
L'àrea mínima és:

$$S\left(\frac{800}{17}\right)=\frac{5000}{17}294.12\text{cm}^2.$$

Problema 6

Donat un punt A en una circumferència es dibuixa la secant BC, paral·lela a la recta tangent a la circumferència en A. On hem de dibuixar la secant de manera que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ sigui màxima?.

Solució:
Siga la circumferència de centre O i radi R.
La recta OA és perpendicular a la recta tangent a la circumferència en el punt A.
La recta perpendicular a la recta BC que passa per O passa pel punt mig M del segment $\overline{BC}$.



Aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és isòsceles, $\overline{AB} = \overline{AC}$.
Siga $\alpha = \angle BAC$.

$\angle ABC = 90^{o} - \frac{\alpha}{2}$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$$\frac{\overline{AB}}{\sin\left(90^{o} - \frac{\alpha}{2}\right)} = 2R.$$

$$\overline{AB} = 2R \cdot \cos\frac{\alpha}{2}.$$

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\left(2R \cdot \cos\frac{\alpha}{2}\right)^2 \sin\alpha.$$

$$S(\alpha) = 2R^2 \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \sin\alpha, \quad \alpha \in [0, \pi].$$

$$S(\alpha) = 2R^2 \frac{1 + \cos\alpha}{2} \cdot \sin\alpha.$$

$$S(\alpha) = R^2(\sin\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha).$$

$$S'(\alpha) = R^2\left(\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1\right).$$

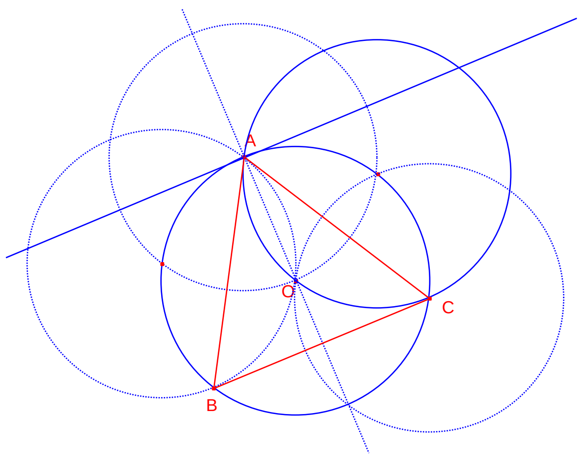
$$S'(\alpha) = 0.$$

$$2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0.$$

Resolent l'equació:

$$\alpha = \frac{\pi}{3}.$$

$$S''(\alpha) = R^2(-\sin\alpha + 4\cos\alpha \cdot \sin\alpha), \quad S''\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0.$$



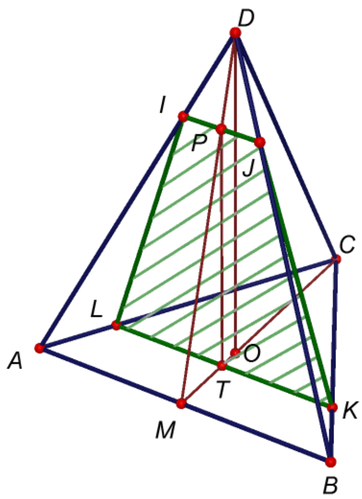
Aleshores, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ és un màxim relatiu estricte.

L'àrea màxima s'assoleix quan el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és equilàter.
Per dibuixar el triangle a partir del punt A dibuixaríem un triangle equilàter inscrit en la circumferència.

Problema 7
La base d'una piràmide triangular és un triangle equilàter de costat 1.
Les altres arestes mesuren a.
Determineu la secció de la piràmide, perpendicular a la base, d'àrea màxima.

Solució:

Siga la piràmide ABCD de base el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB}=1$.
Siga $\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{CD}$.
La piràmide és recta. Siga $\overline{OD}=b$, altura de la piràmide. O és el baricentre de la base.
L'àrea màxima és igual a la secció IJKL, trapezi isòsceles.
L'aresta $\overline{AB}$ és paral·lela al costat $\overline{KL}$.
Siga $\overline{CK}=\overline{CL}=\overline{LK}=x$.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.
Siga T el punt mig del segment $\overline{KL}$.
Siga P el punt mig del segment $\overline{IJ}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CMA}$:

$\overline{CM}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{CTL}$:

$\overline{CT}=\frac{\sqrt{3}}{2}x$. $\overline{MT}=\frac{\sqrt{3}}{2}(1-x)$.

Aplicant la propietat del baricentre al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$: $\overline{CO}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\overline{OM}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{COD}$: $b=\overline{OD}=\frac{1}{3}\sqrt{9a^2-3}$.

Siga $c=\overline{DM}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DOM}$, $\overset{\Delta}{PTM}$. Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{PT}=3b(1-x)$, $\overline{PM}=3c(1-x)$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{ABD}$, $\overset{\Delta}{IJD}$. Aplicant el teorema de Tales:
$\overline{IJ}=3x-2$.
L'àrea del trapezi IJKL és:

$$S_{IJKL}=\frac{\overline{KL}+\overline{IJ}}{2}\overline{PT}=\frac{3x-2+x}{2}3b(1-x).$$

$$S(x)=3b(2x-1)(1-x)=3b\left(-2x^2+3x-1\right),\ x\in\left[\frac{2}{3},1\right].$$

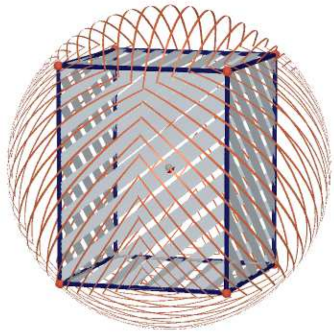
La funció és una paràbola convexa.

El màxim s'assoleix en el vèrtex, $x=\frac{3}{4}$.

L'àrea màxima és: $S\left(\frac{3}{4}\right)=3b\frac{1}{8}=\frac{1}{8}\sqrt{9a^2-3}$.

Problema 8

De tots els prismes regulars quadrangulars inscrits en una esfera de radi r determineu les dimensions del de major volum. Calculeu el volum màxim.



Solució:

Siga ABCDA'B'C'D' el prisma regular quadrangular.

Siga $a = \overline{AB}$ aresta de la base.

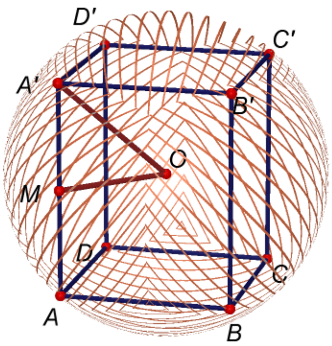
Siga $\overline{AA'} = h$ altura.

Siga O el centre de l'esfera.

O és el punt mig de les diagonals.

Siga M el punt mig de l'aresta lateral $\overline{AA'}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:



$\overline{AC} = a\sqrt{2}$.

$\overline{OM} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

$\overline{A'M} = \frac{1}{2}h$, $\overline{OA'} = r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMA'}$:

$$r^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2.$$

$$a^2 = \frac{1}{2}\left(4r^2 - h^2\right).$$

El volum del prisma és:

$$V = a^2 h.$$

$$V(h) = \frac{1}{2}\left(4r^2 - h^2\right)h, \ h \in [0, 2r].$$

$$V'(h) = \frac{1}{2}\left(-3h^2 + 4r^2\right).$$

$$V'(h) = 0 \text{ si } h = \frac{2\sqrt{3}}{3}r.$$

$V''(h) = -3h$. $V''\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right) < 0$. Aleshores, $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$ és un màxim relatiu estricte.

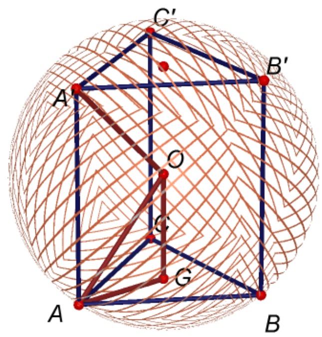
El volum màxim del prisma s'assoleix quan $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$ i $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}r$, és a dir quan el prisma és un cub.

El volum màxim és $V_{Màx} = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}r\right)^3 = \frac{8\sqrt{3}}{9}r^3$.

Problema 9
En una esfera de radi R quin és el prisma triangular regular inscrit en l'esfera de volum màxim. Calculeu el volum màxim.

Solució:
Siga l'esfera de centre O i radi R.
Siga ABCA'B'C' el prisma regular triangular inscrit en l'esfera.
Siga $\overline{AB} = a$ aresta de la base, $\overline{AA'} = h$ altura.
La perpendicular a la base del prisma que passa pel centre de la esfera talla la base en el baricentre G del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$.

$\overline{AG} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, $\overline{OG} = \frac{h}{2}$, $\overline{OA} = R$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AGO}$:

$$R^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2.$$

$$a^2 = \frac{1}{4}\left(12R^2 - 3h^2\right).$$

El volum del prisma ABCA'B'C' és:

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2h.$$

$$V(h) = \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(4R^2h - h^3\right),\ h \in [0, 2R].$$

Derivant la funció:

$$V'(h) = \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(4R^2 - 3h^2\right).$$

$V'(h) = 0$. Resolent l'equació, $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$.

$V''(h) = \frac{-27\sqrt{3}}{8}h$. $V''\left(\frac{2}{3}R\right) < 0$.

Aleshores, $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$ és un màxim relatiu de la funció.

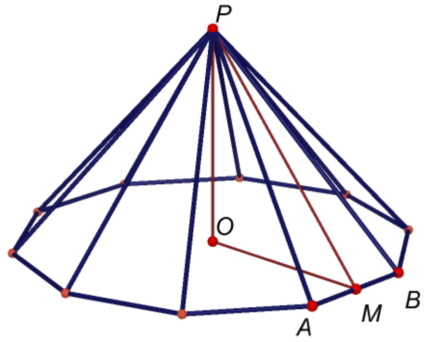
El volum màxim del prisma inscrit en l'esfera de radi R s'assoleix quan L'altura és $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$ i l'aresta de la base és $a = R\sqrt{2}$.

El volum màxim és $V\left(\frac{2}{3}h\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2h = R^3$.

Problema 10

Entre les piràmide de n costats regulars amb àrea constant d'una cara lateral determineu l'angle entre la cara lateral i la base de la de volum màxim.

Gúsiev, problema 925.



Solució:

Siga $\overline{AB} = a$ aresta de la base. Siga O en centre de la base.

Siga P el vèrtex de la piràmide.

Siga $\overline{OP} = h$ altura de la piràmide.

Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.

Siga $\alpha = \angle OMP$ l'angle entre la cara lateral i la base.

Siga S l'àrea de la cara lateral.

$\angle AOM = \frac{\pi}{n}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$: $\overline{OM} = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMP}$:

$$h = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\cdot\operatorname{tg}\alpha, \quad \overline{PM} = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{\cos\alpha}.$$

L'àrea de la cara lateral $\overset{\Delta}{ABP}$ és S:

$$S = \frac{1}{2}a\cdot\overline{PM} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{4}a^2\frac{1}{\cos\alpha}. \quad a^2 = \frac{4S}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}\cos\alpha.$$

L'àrea de la base de la piràmide és: $S_b = \frac{na\cdot\overline{OM}}{2} = \frac{n\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{4}a^2$.

El volum de la piràmide és:

$$V = \frac{1}{3}S_b\cdot h = \frac{1}{3}\frac{n\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{4}\frac{4S}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}\cos\alpha\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}{2}\sqrt{\frac{4S}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}}\cos\alpha} = \frac{2n}{3}\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}S^3}\sqrt{\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}.$$

El màxim del volum s'assoleix en el màxim de la funció:

$$f(\alpha) = \sin^2\alpha\cdot\cos\alpha, \quad \alpha\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$f'(\alpha) = \sin\alpha\left(2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right).$$

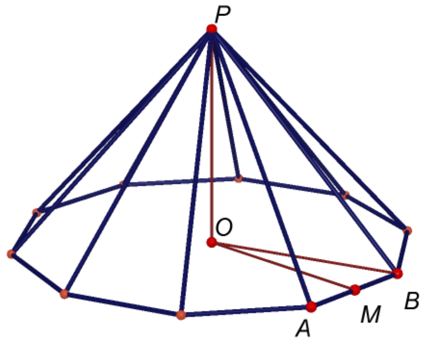
$f'(\alpha) = 0$, $\operatorname{tg}^2\alpha = 2$, $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$. En aquest cas, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$f''(\alpha) = \cos\alpha\left(2\cos^2\alpha - 7\sin^2\alpha\right). \quad f''\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{3} - \frac{14}{3}\right) < 0.$$

Aleshores, $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$ és un màxim relatiu estricte.

El volum màxim de la piràmide s'assoleix quan l'angle diedre de l'aresta de la base és $\alpha = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$.

Problema 11
Entre les piràmide de n costats regulars amb l'aresta lateral constant determineu l'angle entre l'aresta lateral i la base de la de volum màxim.
Gúsiev, problema 924.



Solució:
Siga $\overline{AB} = a$ aresta de la base. Siga O en centre de la base.
Siga P el vèrtex de la piràmide.
Siga $\overline{OP} = h$ altura de la piràmide.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AB}$.
Siga $\alpha = \angle OBP$ l'angle entre l'aresta lateral i la base.
Siga $d = \overline{AP} = \overline{BP}$ aresta lateral.
$\angle AOM = \frac{\pi}{n}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMO}$: $\overline{OM} = \frac{a}{2}\text{tg}\frac{\pi}{n}$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OBP}$:
$h = d \cdot \sin\alpha$, $\overline{OB} = d \cdot \cos\alpha$.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMO}$:

$$a = 2 \cdot \overline{OB} \cdot \sin\frac{\pi}{n} = 2d \cdot \sin\frac{\pi}{n}\cos\alpha.$$

L'àrea de la base de la piràmide és: $S_b = \frac{na \cdot \overline{OM}}{2} = \frac{n \cdot \text{tg}\frac{\pi}{n}}{4}a^2$.

El volum de la piràmide és:

$$V = \frac{1}{3}S_b \cdot h = \frac{1}{3}\frac{n \cdot \text{tg}\frac{\pi}{n}}{4}\left(2d \cdot \sin\frac{\pi}{n} \cdot \cos\alpha\right)^2 d \cdot \sin\alpha = \frac{n}{3}\text{tg}\frac{\pi}{n} \cdot \sin^2\frac{\pi}{n}\frac{\pi}{n}d^3 \cdot \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha$$

El màxim del volum s'assoleix en el màxim de la funció:

$f(\alpha) = \sin\alpha \cdot \cos^2\alpha$, $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$f'(\alpha) = \cos\alpha\left(\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha\right)$.

$f'(\alpha) = 0$, $\text{tg}^2\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = \text{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$. En aquest cas, $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$f''(\alpha) = \sin\alpha\left(2\sin^2\alpha - 7\cos^2\alpha\right)$. $f''\left(\text{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{2}{3} - \frac{7}{3}\right) < 0$.

Aleshores, $\alpha = \text{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$ és un màxim relatiu estricte.

El volum màxim de la piràmide s'assoleix quan l'angle de l'aresta lateral i la base és: $\alpha = \text{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Problema 12

Determineu l'àrea màxima d'un rectangle tal que un costat és tangent a una circumferència
de radi r i els vèrtexs del costat paral·lels pertanyen a la circumferència

Solució:

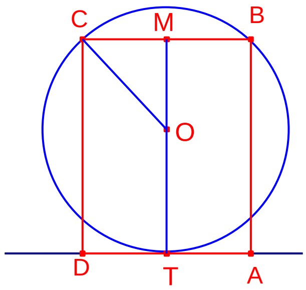
Siga la circumferència de centre O i radi r.

Siga el rectangle ABCD tal que el costat $\overline{AD}$ és tangent a la circumferència i els vèrtexs del costat $\overline{BC}$ pertanyen a la circumferència.

Siga T el punt de tangència de la circumferència i el costat $\overline{AD}$. T és el punt mig del costat $\overline{AD}$.

Siga M el punt mig del costat $\overline{BC}$.

Siga $\overline{AD} = 2c$. $\overline{CM} = c$.



Aplicant el teorema del cosinus al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OMC}$:

$\overline{OM} = \sqrt{r^2 - c^2}$.

$\overline{AB} = \overline{OT} + \overline{OM} = r + \sqrt{r^2 - c^2}$.

L'àrea del rectangle ABCD és:

$S(c) = 2c\left(r + \sqrt{r^2 - c^2}\right)$, $c \in [0, c]$.

Derivant la funció:

$$S'(c) = 2\left(r + \frac{r^2 - 2c^2}{\sqrt{r^2 - c^2}}\right).$$

$$S'(c) = 0, \; r + \frac{r^2 - 2c^2}{\sqrt{r^2 - c^2}} = 0.$$

Resolent l'equació: $c = \frac{\sqrt{3}}{2}r$.

$$S''(c) = -4\frac{cr^2}{(r^2 - c^2)\sqrt{r^2 - c^2}}. \quad S''\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right) < 0.$$

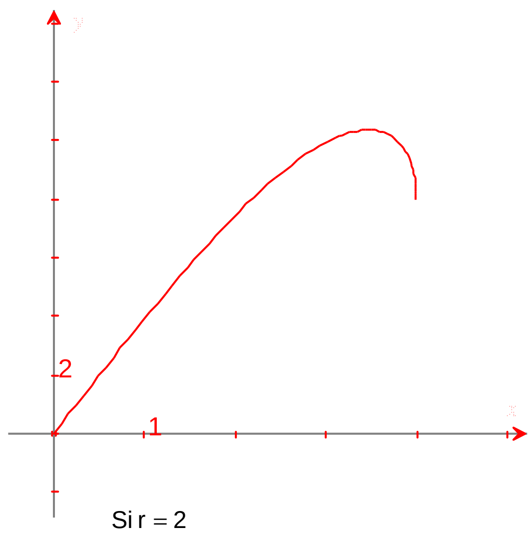
Aleshores, el màxim s'assoleix quan $c = \frac{\sqrt{3}}{2}r$.

Les mesures del rectangle d'àrea màxima són:

$$\overline{AD} = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right) = r\sqrt{3}.$$

$$\overline{AB} = r + \sqrt{r^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2} = \frac{3}{2}r.$$

L'àrea màxima és: $S_M = r\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2}r = \frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$.



Si $r = 2$

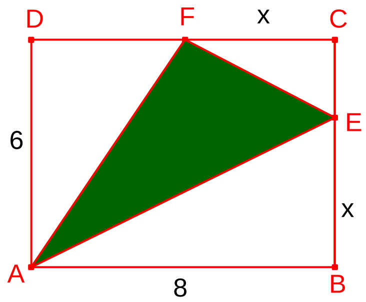
$S(x) = 2x\left(2 + \sqrt{4 - x^2}\right)$

Notem que en aquest cas el triangle $\overset{\Delta}{TBC}$ és equilàter.

Problema 13

Els costats del rectangle ABCD mesuren $\overline{AB} = 8$, $\overline{AD} = 6$.

Siguen els punts E del costat $\overline{BC}$ i F del costat $\overline{CD}$ tal que $\overline{BE} = \overline{CF} = x$.



a) Determineu l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AEF}$ en funció de x.

b) Determineu l'àrea mínima del triangle $\overset{\Delta}{AEF}$.

c) Determineu l'àrea màxima del triangle $\overset{\Delta}{AEF}$.

Solució:

a)

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{AEF}$ és:

$S_{AEF} = S_{ABCD} - (S_{ABE} + S_{CEF} + S_{DAF})$.

$$S(x) = 48 - \left(\frac{1}{2}8x + \frac{1}{2}x(6-x) + \frac{1}{2}6(8-x)\right).$$

$$S(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 24, \quad x \in [0, 6].$$

b)

La funció és una paràbola còncava el mínim s'assoleix en el vèrtex de la paràbola:

$$x = \frac{-(-4)}{2\frac{1}{2}} = 4. \quad x = 4 \in [0, 6].$$

El mínim s'assoleix quan $x = 4$, l'àrea mínima és $S(4) = 16$.

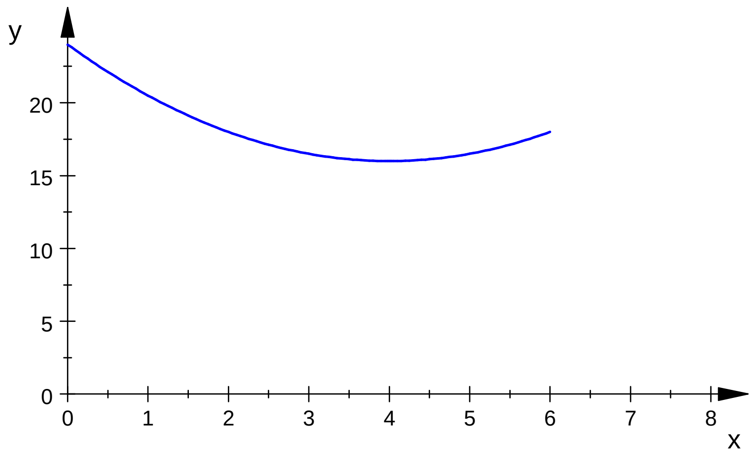
c)

El màxim de la paràbola s'assoleix en els extrems del domini de la funció.

$S(0) = 24$.

$S(6) = 18$.

El màxim s'assoleix quan $x = 0$ i l'àrea màxima és $S(0) = 24$, la meitat del rectangle ABCD.



Problema 14

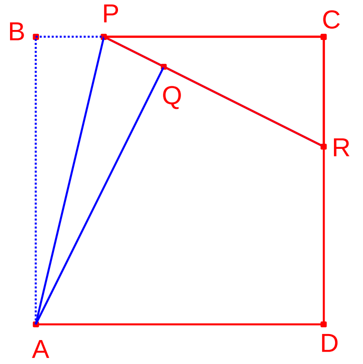
Siga ABCD un quadrat de paper de costat 10.

Siga P un punt del costat $\overline{BC}$.

Dobleguem el paper per la recta AP i el punt B determina el punt Q, com veiem en la figura.

La recta PQ talla el costat $\overline{CD}$ en el punt R.

Calculeu l'àrea màxima del triangle $\overset{\Delta}{PCR}$.



Solució:

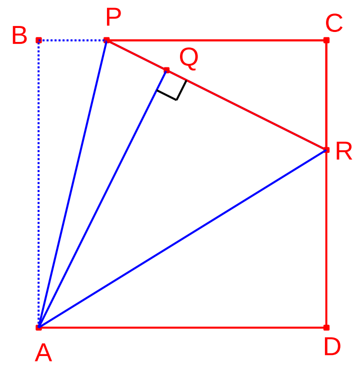
Siga el quadra ABCD de costat $\overline{AB} = 10$.

Siga $\overline{BP} = x$.

Aleshores, $\overline{PQ} = \overline{BP}$, $\overline{AQ} = \overline{AB} = 10$. $\angle ABP = \angle AQP = 90^o$.

$\angle AQR = 90^o$.

$\overline{AQ} = \overline{AD}$.



Aleshores, els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AQR}$, $\overset{\Delta}{ADR}$ són iguals.

Per tant, $\overline{DR} = \overline{QR} = y$.

$\overline{PC} = 10 - x$, $\overline{CR} = 10 - y$.

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{PCR}$ és:

$$S(x,y) = \frac{1}{2}(10-x)(10-y).$$

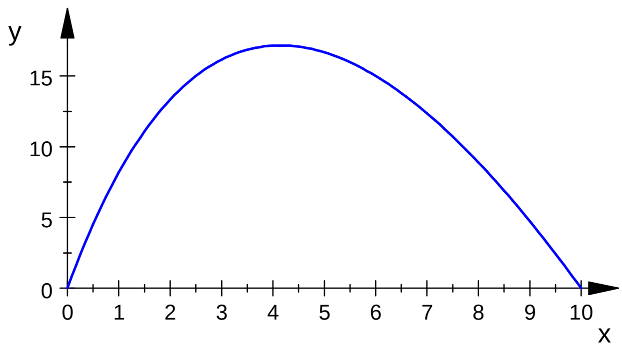
Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{PCR}$:

$$(10-x)^2 + (10-y)^2 = (x+y)^2.$$

$$y = \frac{100-10x}{x+10}.$$

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{PCR}$ és:

$$S(x) = \frac{1}{2}(10-x)\left(10 - \frac{100-10x}{x+10}\right), \quad x \in [0,10].$$



$$S(x) = \frac{1}{2}\frac{200x-20x^2}{x+10}.$$

$$S'(x) = \frac{1}{2}\frac{-20x^2-400x+2000}{(x+10)^2}.$$

$S'(x) = 0$, $-20x^2 - 400x + 2000 = 0$. Resolent l'equació:

$x = -10 + 10\sqrt{2}$. En aquest cas $y = -10 + 10\sqrt{2}$.

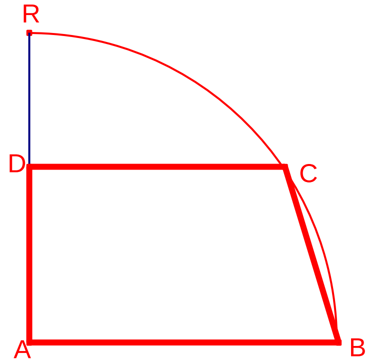
$S''\left(10 + 10\sqrt{2}\right) < 0$, aleshores, $x = -10 + 10\sqrt{2}$ és un màxim relatiu estricte.

El valor màxim de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{PCR}$, s'assoleix quan $x = -10 + 10\sqrt{2}$.

L'àrea màxima és: $S\left(10 + 10\sqrt{2}\right) = 300 - 200\sqrt{2}$.

Problema 15

En un quadrant de circumferència de centre A i radi r i arc BR s'ha inscrit un trapezi ABCD.
Determineu el valor de l'angle $\angle BAC$ tal que la l'àrea del trapezi siga màxima.



Solució:

Siga $\alpha = \angle BAC$.

$\overline{CD} = r \cdot \cos\alpha$.

$\overline{AD} = r \cdot \sin\alpha$.

L'àrea del trapezi ABCD és:

$$S = \frac{\overline{AB} + \overline{CD}}{2}\overline{AD}.$$

$$S(\alpha) = \frac{1}{2}(r + r \cdot \cos\alpha)r \cdot \sin\alpha, \quad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$S(\alpha) = \frac{r^2}{2}(1 + \cos\alpha)\sin\alpha.$$

Derivant la funció:

$$S'(\alpha) = \frac{r^2}{2}\left(-\sin^2\alpha + \cos\alpha + \cos^2\alpha\right).$$

$$S'(\alpha) = \frac{r^2}{2}\left(\cos 2\alpha + \cos\alpha\right).$$

$S'(\alpha) = 0$.

$\cos 2a = -\cos\alpha$. Resolent l'equació:

$$\alpha = \frac{\pi}{3}.$$

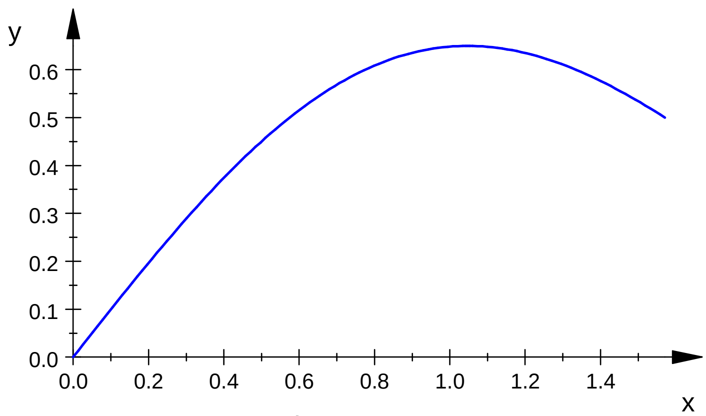
$$S''(\alpha) = \frac{r^2}{2}\left(-2\sin 2\alpha - \sin\alpha\right).$$

$S''\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$, aleshores, $\alpha = \frac{\pi}{3}$ és un màxim relatiu estricte.

El màxim s'assoleix quan $\alpha = \frac{\pi}{3}$,

i l'àrea màxima és:

$$S\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}r^2.$$



$r = 1$

$S(x)\frac{1}{2}(1 + \cos x)\sin x$

Problema 16

De tots els triangles $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que la base $c=\overline{AB}=6$ i altura sobre aquesta base $h_c=4$, determineu el de perímetre mínim.

Solució 1:

Tots el triangles tenen el vèrtex C sobre una recta r paral·lela al costat $\overline{AB}$ a una distància h_c.

Siga A' el punt simètric de A respecte de la recta r.

La recta que passa per A' i B talla la recta r en el punt C.

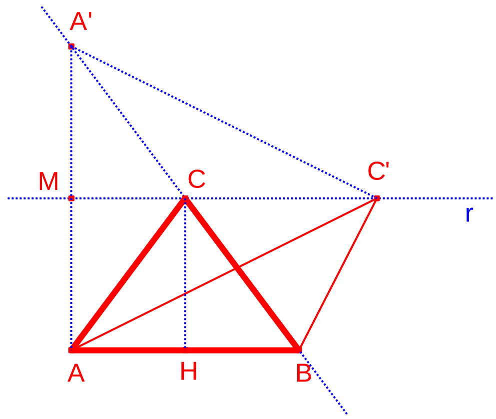
Vegem que aquest C és el que fa mínim el perímetre dels triangles.

La recta r és mediatriu del segment $\overline{AA'}$.

$\overline{AC}=\overline{A'C}$

Siga C' un punt qualsevol de la recta r.

$\overline{AC'}=\overline{A'C'}$.



El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{ABC'}$ és:

$P_{ABC'}=\overline{AB}+\overline{AC'}+\overline{BC'}=\overline{AB}+\overline{A'C'}+\overline{BC'}$.

Aplicant la desigualtat triangular al triangle $\overset{\Delta}{A'BC'}$

$\overline{A'C'}+\overline{BC'}\geq\overline{A'B}$.

$P_{ABC'}=\overline{AB}+\overline{A'C'}+\overline{BC'}\geq\overline{AB}+\overline{A'B}=\overline{AB}+\overline{A'C}+\overline{CB}=P_{ABC}$.

Siga M el punt mig del segment $\overline{AA'}$.

La recta r és paral·lela mitjana del triangle $\overset{\Delta}{ABA'}$.

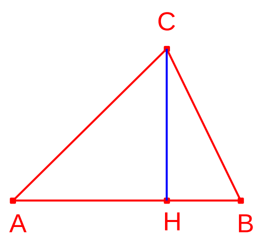
Aleshores, $\overline{MC}=\frac{1}{2}\overline{AB}$, aleshores, el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és isòsceles, $\overline{AC}=\overline{BC}$.

Siga H el peu de l'altura referida al vèrtex C.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AHC}$:

$\overline{AC}=\overline{BC}=5$.

El perímetre mínim és $P_{ABC}=6+5+5=16$.



Solució 2:

$h_c=\overline{CH}$. Siga $x=\overline{AH}$, $\overline{BH}=c-x$.

$b=\sqrt{x^2+h_c^2}$, $a=\sqrt{(c-x)^2+h_c^2}$.

El perímetre del triangle és:

$$P(x)=c+\sqrt{x^2+h_c^2}+\sqrt{(c-x)^2+h_c^2}.$$

$$P'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+h_c^2}}+\frac{x-c}{\sqrt{(c-x)^2+h_c^2}}.$$

$$P'(x)=0,\ \frac{x}{\sqrt{x^2+h_c^2}}=\frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+h_c^2}}.$$

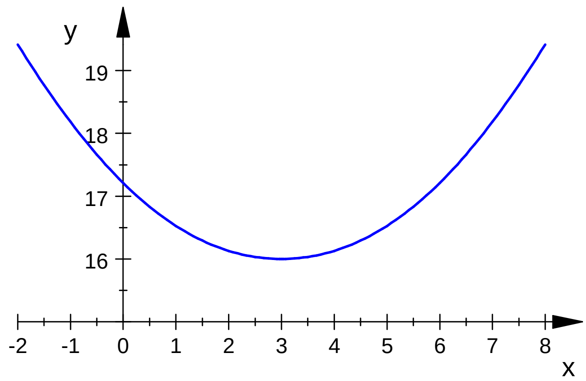
Resolent l'equació:

$x = \dfrac{c}{2}$.

$$P''(x) = \frac{h_c{}^2}{\left(x^2 + h_c{}^2\right)\sqrt{x^2 + h_c{}^2}} + \frac{h_c{}^2}{\left((x-c)^2 + h_c{}^2\right)\sqrt{(x-c)^2 + h_c{}^2}}$$

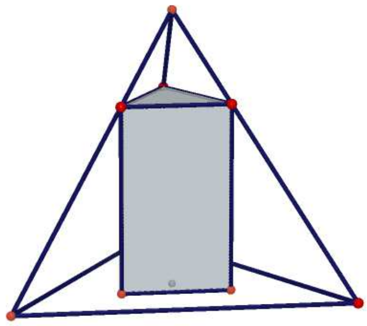
$P''\left(\dfrac{c}{2}\right) > 0$. Aleshores, $x = \dfrac{c}{2}$ és un mínim relatiu.

Si base $c = \overline{AB} = 6$ $h_c = 4$, $P\left(\dfrac{6}{2}\right) = 6 + 5 + 5 = 16$.



$P(x) = 6 + \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{(6-x)^2 + 16}$.

Problema 17



Determineu el prisma regular de volum màxim inscrit en un tetraedre regular d'aresta a (una base del prisma pertany a la cara del tetraedre i els vèrtexs de l'altra cara pertanyen a les altres arestes del tetraedre).

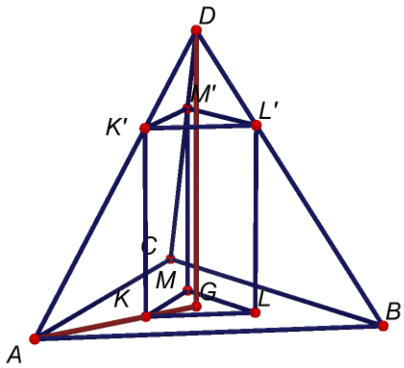
Solució:

Siga el tetraedre regular ABCD d'aresta $\overline{AB} = a$.

Siga G el baricentre del triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$:

$\overline{AG} = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AGD}$:



$\overline{GD} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$.

Siga KLMK'L'M' el prisma inscrit en el tetraedre ABCD.

Siga $\overline{KL} = x$ base del prisma, $\overline{KK'} = y$ altura del prisma.

$\overline{DK'} = \overline{K'L'} = \overline{KL} = x$.

$\overline{AK'} = a - x$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AGD}$, $\overset{\Delta}{AKK'}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{y}{\frac{\sqrt{6}}{3}a} = \frac{a-x}{a}. \quad y = \frac{\sqrt{6}}{3}(a-x).$$

El volum del prisma és:

$$V_{prisma} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 y = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2\frac{\sqrt{6}}{3}(a-x) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(-x^3 + ax^2\right).$$

$$V(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(-x^3 + ax^2\right), \; x \in [0, a].$$

$$V'(x) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(-3x^2 + 2ax\right).$$

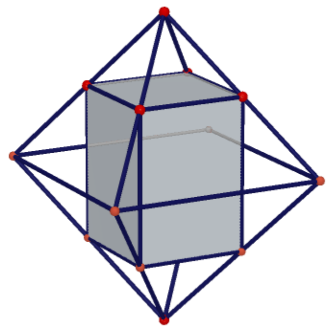
$$V'(x) = 0, \; -3x^2 + 2ax = 0, \; x = \frac{2}{3}a.$$

$V''(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-3x + a)$, $V''\left(\frac{2}{3}a\right) = -\frac{\sqrt{2}}{6}a < 0$. Aleshores, $x = \frac{2}{3}a$ és un màxim relatiu estricte.

Les dimensions del prisma de volum màxim són: l'aresta de la base $x = \frac{2}{3}a$ i l'altura $y = \frac{\sqrt{6}}{9}a$.

El volum màxim és $V_{màx} = \frac{\sqrt{2}}{27}a^3$.

Problema 18



Determineu el prisma regular de volum màxim inscrit en un octaedre regular d'aresta a (els vèrtexs del prisma pertanyen a les arestes de l'octaedre).

Solució:

Siga ABCDEF l'octaedre regular d'aresta $\overline{AB} = a$.

$\angle EAF = 90º$.

Siga KLMNK'L'M'N' el prisma inscrit en l'octaedre ABCDEFF.

Siga $\overline{KL} = x$ base del prisma, $\overline{KK'} = y$ altura del prisma.

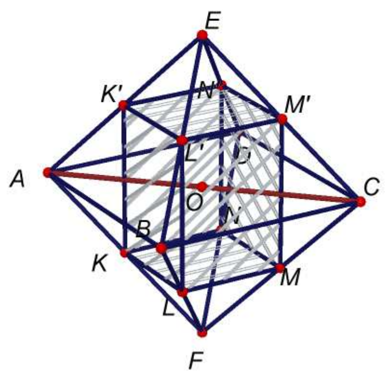
$\overline{EK'} = \overline{K'L'} = \overline{KL} = x$.

$\overline{AK'} = a - x$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{AKK'}$:

$y = (a - x)\sqrt{2}$.

El volum del prisma és:



$V_{prisma} = x^2 y = x^2(a - x)\sqrt{2} = \left(-x^3 + ax^2\right)\sqrt{2}$.

$V(x) = \left(-x^3 + ax^2\right)\sqrt{2}$, $x \in [0, a]$.

$V'(x) = \left(-3x^2 + 2ax\right)\sqrt{2}$.

$V'(x) = 0$, $-3x^2 + 2ax = 0$, $x = \dfrac{2}{3}a$.

$V''(x) = 2\sqrt{2}(-3x + a)$, $V''\left(\dfrac{2}{3}a\right) = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}a < 0$. Aleshores,

$x = \dfrac{2}{3}a$ és un màxim relatiu estricte.

Les dimensions del prisma de volum màxim són: l'aresta de la base $x = \dfrac{2}{3}a$ i l'altura

$y = \dfrac{\sqrt{2}}{3}a$.

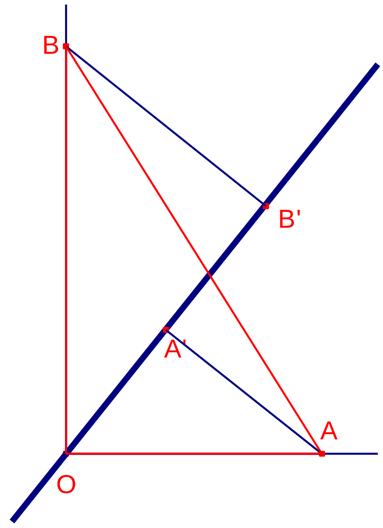
El volum màxim és $V_{màx} = \dfrac{4\sqrt{2}}{27}a^3$.

Problema 19

Donat el triangle rectangle $\overset{\Delta}{OAB}$, O(0, 0) A(a, 0) B(0, b) determineu el pendent de la recta que passa per O i fa màxima la suma de les distàncies dels vèrtexs A i B a la recta.

Solució:
Siga $r \equiv mx + y = 0$ qualsevol recta que passa per O menys la recta $s \equiv x = 0$.
Les distàncies de A i B a la recta r són:

$$\frac{|ma|}{\sqrt{1+m^2}},\ \frac{b}{\sqrt{1+m^2}}.$$



La suma de les distàncies de A i B a la recta r és:

$$f(m) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}(ma+b) & \text{si } m \geq 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+m^2}}(-ma+b) & \text{si } m < 0 \end{cases}.$$

La funció derivada és:

$$f'(m) = \begin{cases} \dfrac{a-bm}{(1+m^2)\sqrt{1+m^2}} & \text{si } m > 0 \\ \dfrac{-a-mb}{(1+m^2)\sqrt{1+m^2}} & \text{si } m < 0 \end{cases}$$

. Notem que en $m = 0$ no és derivable.

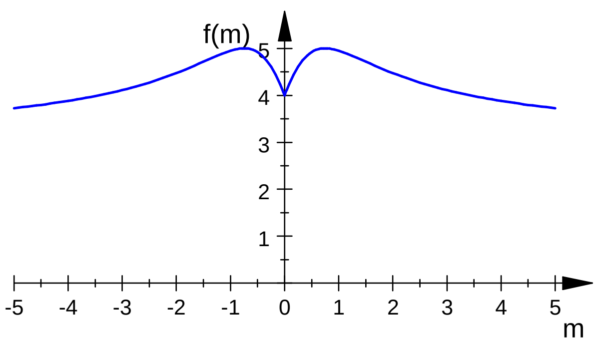
$f'(x) = 0$ si $m = \frac{a}{b}$, $m = -\frac{a}{b}$.

$$f''(m) = \begin{cases} \dfrac{-b(1+m^2)\sqrt{1+m^2} - (a-bm)3m\sqrt{1+m^2}}{(1+m^2)^3} & \text{si } m > 0 \\ \dfrac{-b(1+m^2)\sqrt{1+m^2} - (-a-bm)3m\sqrt{1+m^2}}{(1+m^2)^3} & \text{si } m < 0 \end{cases}.$$

$f''\left(\frac{a}{b}\right) = f''\left(-\frac{a}{b}\right) < 0$ .Aleshores, $m = \frac{a}{b}$, $m = -\frac{a}{b}$ són màxims relatius estrictes.

$f\left(\frac{a}{b}\right) = f\left(-\frac{a}{b}\right) = \sqrt{a^2+b^2}$.

Notem que els pendents que fan màxim la suma de distàncies és $m = \frac{a}{b}$ (altura del triangle) i $m = -\frac{a}{b}$ i la suma màxima és igual a la mesura de la hipotenusa.



$a = 3, b = 4$

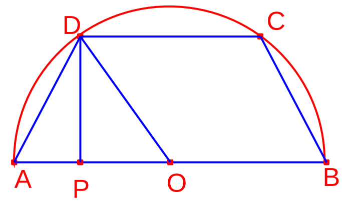
Nota: La recta $s \equiv x = 0$ o la recta $y = 0$, una d'aquestes, és el mínim de la suma.

Problema 20

Tres segments circulars s'han tallat d'una placa metàl·lica semicircular per formar un trapezi. Quines han de ser les dimensions del trapezi per minimitzar la zona tallada?
KöMaL, C1251. Octubre 2014.

Solució 1:

Siga la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB}=2R$ i centre O.
Siga el trapezi ABCD inscrit en la semicircumferència.
Siga $\angle BAD=\alpha$.
$\angle AOD=180^o-2\alpha$.
Siga P la projecció de D sobre el diàmetre $\overline{AB}$.



Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPD}$:

$\overline{OP}=R\cdot\cos(180^o-2\alpha)=-R\cdot\cos 2\alpha$.

$\overline{PD}=R\cdot\sin(180^o-2\alpha)=R\cdot\sin 2\alpha$.

$\overline{Cd}=2\overline{OP}=-2R\cdot\cos 2\alpha$

L'àrea del trapezi és:

$$S_{ABCD}=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}\overline{PD}=\frac{2R-2R\cdot\cos 2\alpha}{2}R\cdot\sin 2\alpha.$$

$$S(\alpha)=R^2(\sin 2\alpha-\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha),\ \alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right].$$

$$S'(\alpha)=R^2\left(2\cos 2\alpha-2\cos^2 2\alpha+2\sin^2\alpha\right).$$

$$S'(\alpha)=2R^2\left(\cos 2\alpha-2\cos^2 2\alpha+1\right).$$

$S'(\alpha)=0$, $\cos 2\alpha-2\cos^2 2\alpha+1=0$.

Resolent l'equació:

$\cos 2\alpha=-\frac{1}{2}$, $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

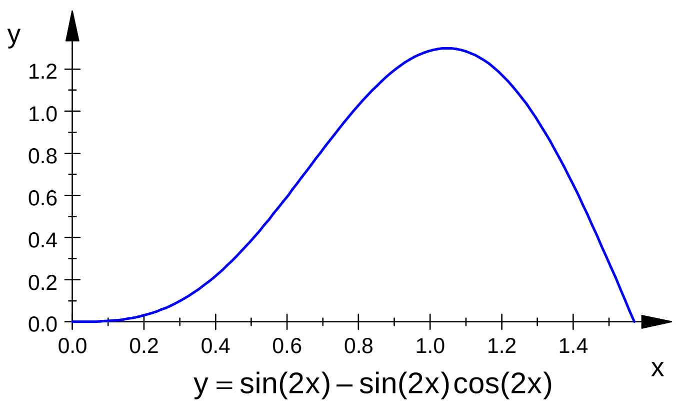
$\cos 2\alpha=1$, $\alpha=0$. En aquest cas el trapezi no existeix)

$S''(\alpha)=4R^2(-\sin 2\alpha+\sin 4\alpha)$

$S''\left(\frac{\pi}{3}\right)=-2\sqrt{3}R^2<0$. Aleshores, $\alpha=\frac{\pi}{3}$ és un

La superfície màxima s'assoleix quan el trapez
60º amb el diàmetre de la semicircumferència.

L'àrea màxima és $S\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

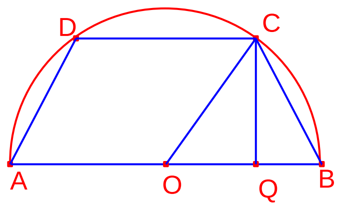


$y=\sin(2x)-\sin(2x)\cos(2x)$

$R=1$

Solució 2:

Siga la semicircumferència de diàmetre $\overline{AB}=2R$ i centre O.
Siga el trapezi ABCD inscrit en la semicircumferència.
Siga Q la projecció de C sobre el diàmetre $\overline{AB}$.
Siga $\overline{OQ}=x$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OQC}$:

$\overline{CQ}=\sqrt{R^2-x^2}$.

$\overline{CD}=2\cdot\overline{CQ}=2\sqrt{R^2-x^2}$.

L'àrea del trapezi és:

$$S_{ABCD}=\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}\overline{CQ}=\frac{2R+2x}{2}\sqrt{R^2-x^2}.$$

$$S(x)=(R+x)\sqrt{R^2-x^2}=\sqrt{-4x^4-2Rx^3+2R^3x+R^4},\ x\in[0,R].$$

El màxim de la funció $S(x)$ s'assoleix en el màxim de la funció

$f(x)=-4x^4-2Rx^3+2R^3x+R^4$, ja que la funció $y=\sqrt{x}$ és contínua i creixent.

$f'(x)=-4x^3-6Rx^2+2R^3$. Factoritzant el polinomi:

$$f'(x)=-4\left(x-\frac{R}{2}\right)(x+R)^2,\ x\in[0,R].$$

$f'(x)=0$, $\left(x-\frac{R}{2}\right)(x+R)^2=0$. Resolent l'equació:

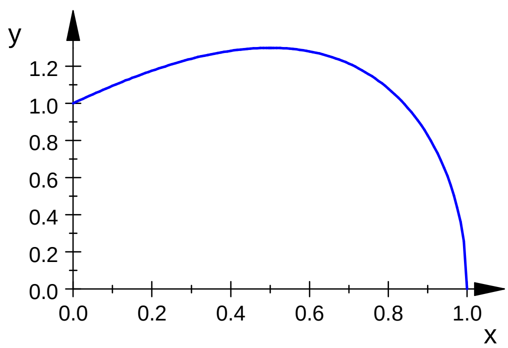
$$x=\frac{R}{2}.$$

$f''(x)=-12x^2-12R$.

$f''\left(\frac{R}{2}\right)<0$, aleshores, $x=\frac{R}{2}$ és un màxim relatiu de la funció $S(x)$.

La superfície màxima s'assoleix quan $x=\frac{R}{2}$.

L'àrea màxima és $S\left(\frac{R}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.



$y=(1+x)\sqrt{1-x^2}$
$R=1$