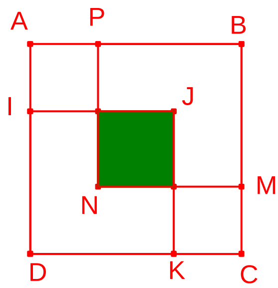
Problemes d'optimització 2016

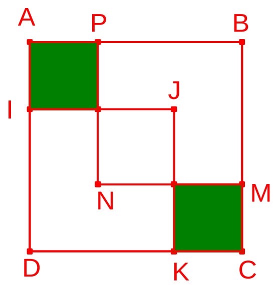
Problema 1
El perímetre d'un trapezi rectangular és 400.
Un costat forma un angle de 45º amb la base.
Quines són les mesures del trapezi que fan màxima la seua àrea.

Problema 2

Determineu el perímetre mínim d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ conegudes dos altures $h_a = h_b$.

Problema 3
Siga ABCD un quadrat de costat 1. Siga x un nombre real entre 0 i 1.
Siguen IJKD i PBMN dos quadrats de costat x.
Designem $S_1(x)$ l'àrea de la part comuna dels quadrats IJKD i PBMN si existeix i zero si no existeix.
Designem $S_2(x)$ l'àrea de la part exterior als quadrats IJKD i PBMN dins del quadrat ABCD.





$S_1(x)$ $S_2(x)$.

a) Definiu i representeu $S_1(x)$, $S_2(x)$.

b) Per a quin valor de x $S_1(x) = \frac{1}{4}$.

c) Per a quin valor de x $S_1(x) = S_2(x)$.

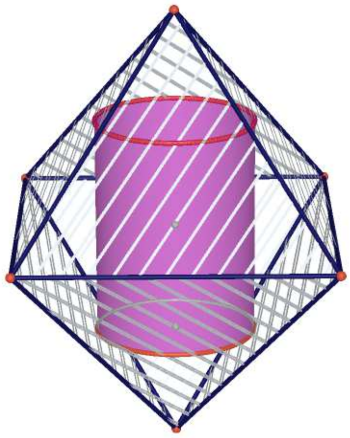
d) Per a quin valor de x $S_1(x) + S_2(x)$ és mínim.

Quin és valor mínim?.

Problema 4
Una corba bisectriu d'una superfície és una corba que talla la superfície en dues regions de la mateixa àrea.
La corba bisectriu d'una circumferència és evidentment un diàmetre.
Quina és la corba bisectriu mínima d'un triangle equilàter.
Crux Mathematicorum CC1995.

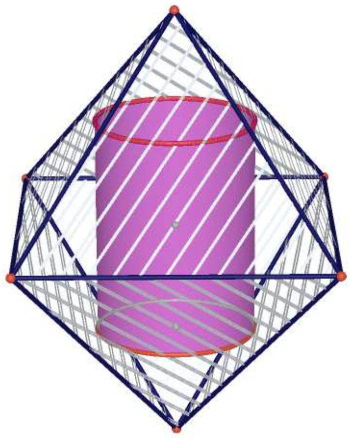
Problema 5

De tots els cilindres inscrits en un octàedre regular d'aresta 1, les bases tangents a les cares (veure figura), determineu les dimensions i el volum d'aquell que té volum màxim.



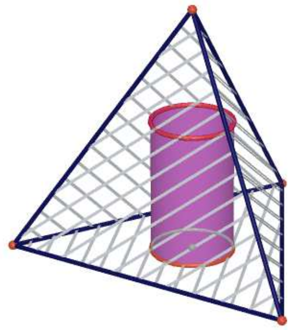
Problema 6

De tots els cilindres inscrits en un octàedre regular d'aresta 1, les bases tangents a les cares (veure figura), determineu les dimensions i l'àrea d'aquell que té superfície màxima.



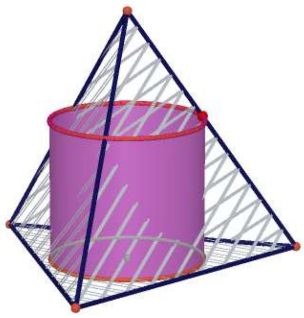
Problema 7

En un tetraedre regular d'aresta 1 s'ha inscrit un cilindre que té una base en una cara i l'altra base és tangent a les altres cares.
De tots els cilindres inscrits determineu les dimensions i el volum d'aquell que té volum màxim.

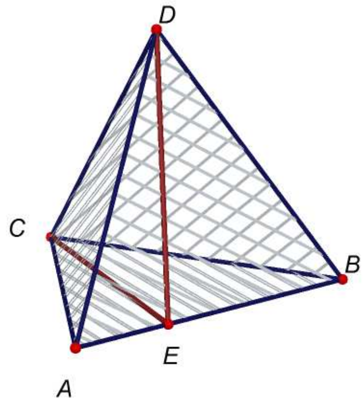


Problema 8

En la figura el cilindre té una cara en la base d'un tetraedre regular d'aresta 1 i l'altra base en les altres 3 arestes laterals.
De tots els cilindres determineu les dimensions i el volum d'aquell que té volum màxim.



Problema 9



Considerem el tetraedre regular ABCD.
Siga E un punt de l'aresta $\overline{AB}$.
Determineu el màxim de l'angle $\angle CED$ quan E recorre l'aresta $\overline{AB}$.

Problema 10

De totes les famílies d'el·lipses $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ que passen pel punt $P(1,1)$ determineu

a) Aquella que té àrea mínima.
b) Aquella que té mínim el volum de revolució de l'el·lipse al voltant de l'eix d'abscisses.

Problema 1

El perímetre d'un trapezi rectangular és 400.
Un costat forma un angle de 45º amb la base.
Quines són les mesures del trapezi que fan màxima la seua àrea.
KöMaL, C1326.

Solució:

Siga ABCD el trapezi rectangle de costats paral·leles $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\angle DAB = 90º$, $\angle ABC = 45º$.

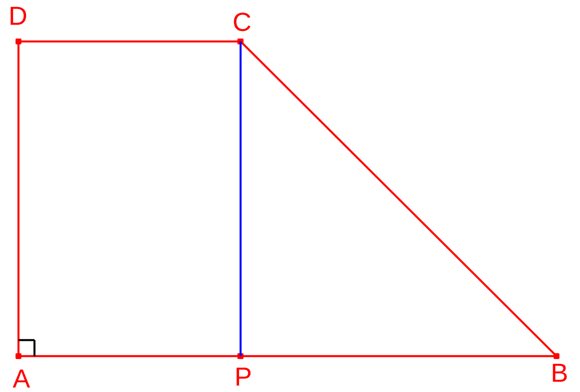
Siga P la projecció de C sobre la base $\overline{AB}$.

Siga $\overline{AD} = h$, $\overline{CD} = b$.

$\overline{AB} = b + h$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle isòsceles $\overset{\Delta}{CPB}$:

$\overline{BC} = h\sqrt{2}$.



El perímetre del trapezi és 400. Aleshores:

$$2b + \left(2 + \sqrt{2}\right)h = 400.$$

$$2b = 400 - \left(2 + \sqrt{2}\right)h.$$

L'àrea del trapezi és: $S_{ABCD} = \dfrac{2b + h}{2}h$.

$$S(h) = \frac{400 - \left(2 + \sqrt{2}\right)h}{2}h.$$

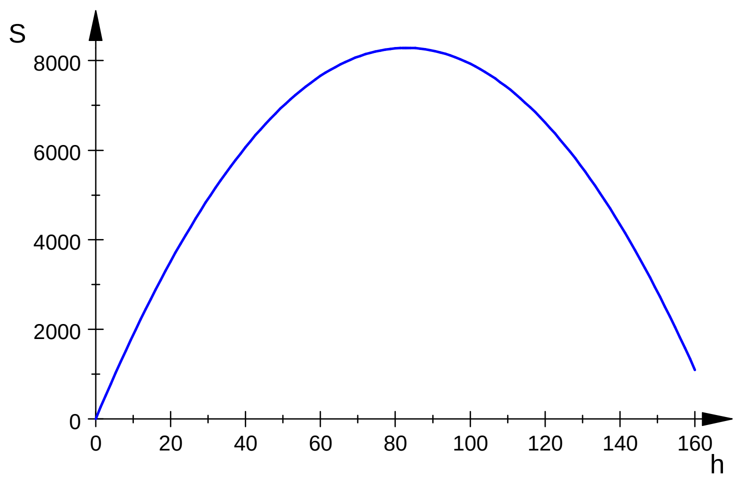
$$S(h) = \frac{1}{2}\left(400h - \left(2 + \sqrt{2}\right)h^2\right).$$

La funció és una paràbola convexa. El màxim s'assoleix en el vèrtex:

$h = 200\left(\sqrt{2} - 1\right)$. Aleshores, $b = 100\left(2 - \sqrt{2}\right)$, $b + h = 100\sqrt{2}$.

L'àrea màxima és:

$$S_{max} = \frac{2\left(100\left(2 - \sqrt{2}\right)\right) + 200\left(\sqrt{2} - 1\right)}{2}200\left(\sqrt{2} - 1\right) = 20000\left(\sqrt{2} - 1\right).$$



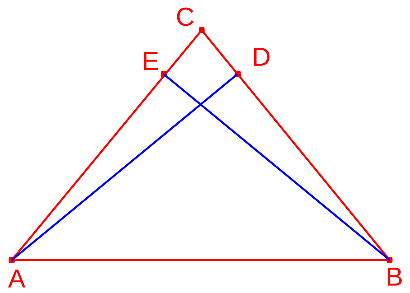
$$S(h) = \frac{1}{2}\left(400h - \left(2 + \sqrt{2}\right)h^2\right)$$

Problema 2

Determineu el perímetre mínim d'un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ conegudes dos altures $h_a = h_b$.

Solució:

Siguen $h_a = \overline{AD}$, $h_b = \overline{BE}$ altures del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.



Si $h_a = h_b$. L'àrea del triangle és $\frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2}$.

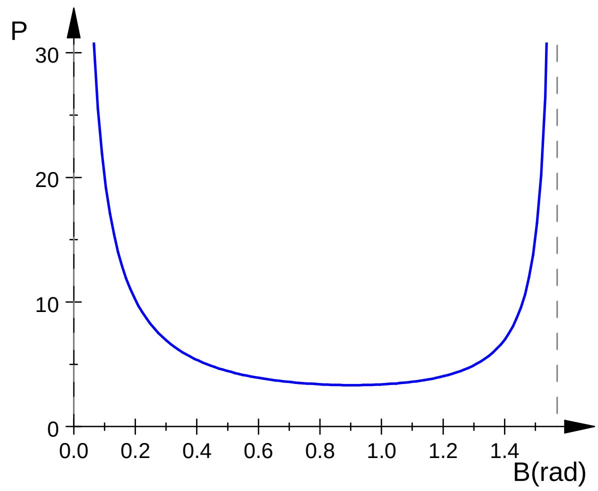
Aleshores, $a = b$, el triangle és isòsceles.

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADB}$:

$$c = \frac{1}{\sin B} h_a$$

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

$b^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos B$. $2b = \frac{1}{\cos B} c$.



El perímetre del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és:

$P(b, c) = 2b + c$.

$$P(B) = \frac{1}{\cos B} \frac{1}{\sin B} h_a + \frac{1}{\sin B} h_a, \quad B = A \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$P(B) = h_a \left(\frac{2}{\sin 2B} + \frac{1}{\sin B} \right)$$

$$P'(B) = h_a \left(\frac{-4\cos 2B}{\sin^2 2B} + \frac{-\cos B}{\sin^2 B} \right).$$

$P'(B) = 0$.

$-4\cos 2B \cdot \sin^2 B - \cos B \cdot \sin^2 2B = 0$. Simplificant:

$\cos^3 B + 2\cos^2 B - 1 = 0$.

Resolent l'equació:

$\cos B = -1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. L'única solució possible és:

$\cos B = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $B = \arccos \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \approx 51^{\circ}49'38''$. $\quad B \approx 0.9045568943 \text{rad}$.

Amb la segona derivada comprovem que si $\cos B = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ és un mínim de la funció.

Per tant, podem calcular $a = b$, c.

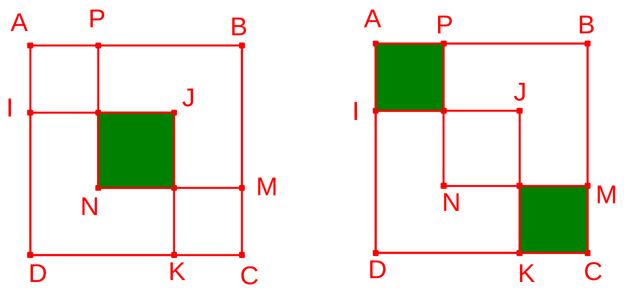
$$\sin B = \frac{\sqrt{2\left(\sqrt{5}-1\right)}}{2}.$$

$$a = b = \frac{1}{2\cos B} \frac{1}{\sin B} ha = \frac{\sqrt{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\sqrt{1+\sqrt{5}}}{8} h_a \approx 1.029085514 h_a.$$

$$c = \frac{1}{\sin B} h_a = \frac{\sqrt{2\left(1+\sqrt{5}\right)}}{2} h_a \approx 1.27201965 h_a.$$

Problema 3

Siga ABCD un quadrat de costat 1. Siga x un nombre real entre 0 i 1.
Siguen IJKD i PBMN dos quadrats de costat x.
Designem $S_1(x)$ l'àrea de la part comuna dels quadrats IJKD i PBMN si existeix i zero si no existeix.
Designem $S_2(x)$ l'àrea de la part exterior als quadrats IJKD i PBMN dins del quadrat ABCD.



$S_1(x)$ $S_2(x)$.

a) Definiu i representeu $S_1(x)$, $S_2(x)$.

b) Per a quin valor de x $S_1(x) = \frac{1}{4}$.

c) Per a quin valor de x $S_1(x) = S_2(x)$.

d) Per a quin valor de x $S_1(x) + S_2(x)$ és mínim.
Quin és valor mínim?.

Solució:

a)

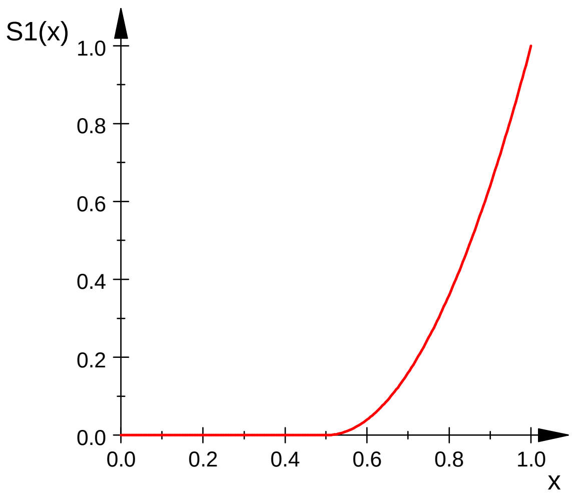
Siga c el costat del quadrat $S_1(x)$.

$2x - c = 1$.

$c = 2x - 1$

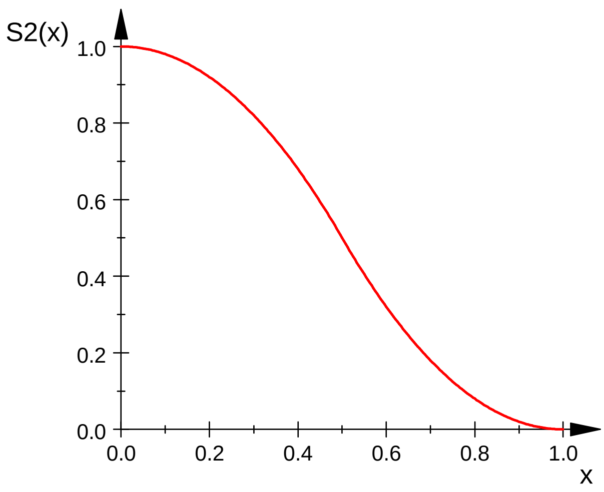
La funció $S_1(x)$ és

$$S_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ (2x-1)^2 & \text{si } \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}.$$



La funció $S_2(x)$ és:

$$S_2(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2 & \text{si } 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2(1-x)^2 & \text{si } \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}.$$



b)

$S_1(x)=\frac{1}{4}$. $(2x-1)^2=\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}<x\le 1$.

Resolent l'equació:

$x=\frac{3}{4}$.

c)

$S_1(x)=S_2(x)$.

$(2x-1)^2=2(1-x)^2$, $\frac{1}{2}<x\le 1$.

Resolent l'equació:

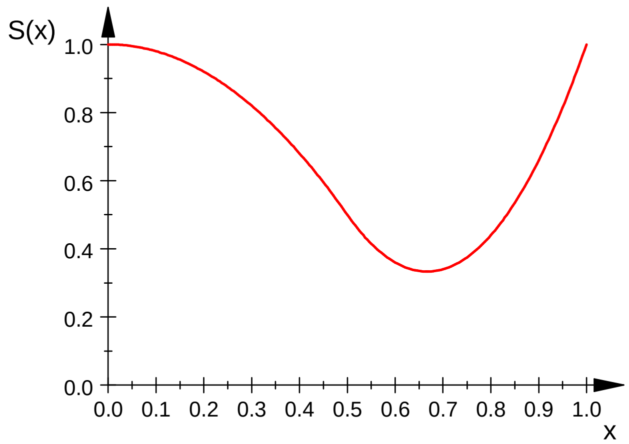
$x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

d)

Siga $S(x)=S_1(x)+S_2(x)$.

$$S(x)=\begin{cases}1-2x^2 & \text{si } 0\le x\le \frac{1}{2}\\ (2x-1)^2+2(1-x)^2 & \text{si } \frac{1}{2}<x\le 1\end{cases}.$$

$$S(x)=\begin{cases}1-2x^2 & \text{si } 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 6x^2-8x+3 & \text{si } \frac{1}{2}<x\le 1\end{cases}.$$



El valor x que fa mínima la funció s'assoleix en el mínim dels dos trossos on està definida la funció:

La paràbola $y=1-2x^2$ definida en $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ és convexa i $x=0$ és el seu eix de simetria. El valor mínim s'assoleix en $x=\frac{1}{2}$, $S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$.

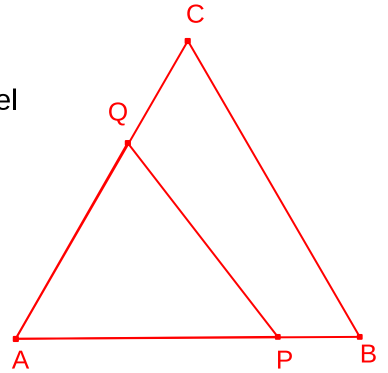
La paràbola $y=6x^2-8x+3$ definida en $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ és còncava i $x=\frac{2}{3}$ és el seu eix de simetria. El valor mínim s'assoleix en el vèrtex $x=\frac{2}{3}$, $S\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$.

Aleshores, el mínim de la funció s'assoleix quan $x=\frac{2}{3}$ i l'àrea mínima és $S\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$.

Problema 4

Una corba bisectriu d'una superfície és una corba que talla la superfície en dues regions de la mateixa àrea.
La corba bisectriu d'una circumferència és evidentment un diàmetre.
Quina és la corba bisectriu mínima d'un triangle equilàter.
Crux Mathematicorum CC1995.

Solució:



Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$.
Siguen P i Q en els costats $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ respectivament tal que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APQ}$ siga la meitat de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.
Siga $\overline{AP} = x$, $\overline{AQ} = y$.
Volem determinar el valor x a fi que la mesura del segment $\overline{PQ}$ siga mínima.

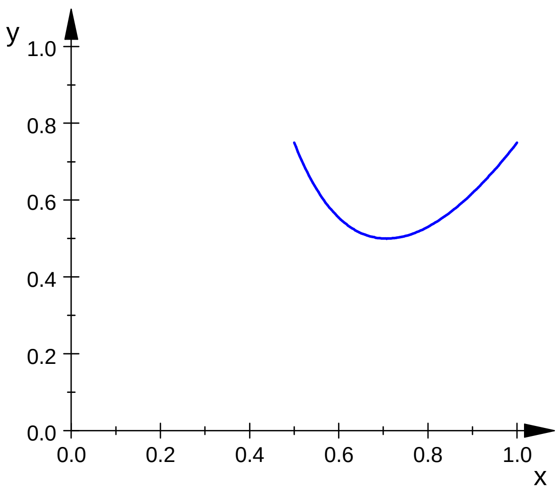
L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és: $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

$S_{APQ} = \frac{1}{2}S_{ABC}$. $\frac{1}{2}xy \cdot \sin 60^o = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$. Simplificant: $xy = \frac{1}{2}c^2$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{APQ}$:

$\overline{PQ}^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cdot \cos 60^o$. Simplificant:

$\overline{PQ}^2 = x^2 + \frac{1}{4x^2}c^4 - \frac{1}{2}c^2$.



$y = x^2 + \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2}$

El mínim de la mesura del segment $\overline{PQ}$ s'assoleix en el mínim de la funció:

$f(x) = x^2 + \frac{1}{4x^2}c^4 - \frac{1}{2}c^2$, $x \in [0, c]$.

Derivant l'a funció:

$f'(x) = 2x - \frac{1}{2x^3}c^4$.

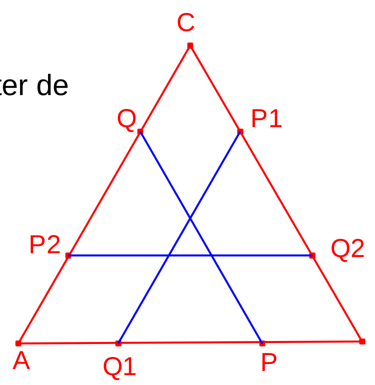
$f'(x) = 0$. $2x - \frac{1}{2x^3}c^4 = 0$.

Resolent l'equació: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}c$.

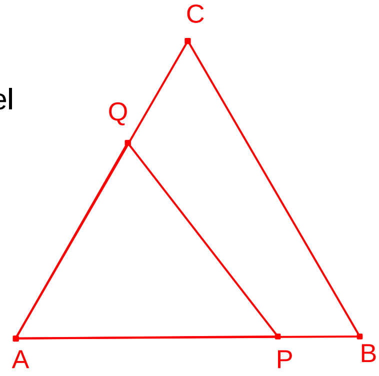
$f''(x) = 2 + \frac{3}{2x^4}c^4$. $f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}c\right) > 0$. Aleshores, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}c$ és un mínim absolut de la funció.

En aquest cas, $y = x = \frac{\sqrt{2}}{2}c$. Aleshores, $\overset{\Delta}{APQ}$ és un triangle equilàter de costat $\frac{\sqrt{2}}{2}c$.

Un triangle equilàter té tres "corbes bisectrius" mínimes.



Solució 2:



Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat $\overline{AB} = c$.

Siguen P i Q en els costats $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ respectivament tal que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{APQ}$ siga la meitat de l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Siga $\overline{AP} = x$, $\alpha = \angle APQ$.

Volem determinar el valor x a fi que la mesura del segment $\overline{PQ}$ siga mínima.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és: $S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

$S_{APQ} = \frac{1}{2}S_{ABC}$. $\frac{1}{2}x \cdot \overline{PQ} \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$. Simplificant: $x = \frac{\sqrt{3}}{4\overline{PQ} \cdot \sin\alpha}c^2$ (1)

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{APQ}$:

$$\frac{\overline{PQ}}{\sin 60^\circ} = \frac{x}{\sin(60^\circ + \alpha)} \qquad (2)$$

Substituint l'expressió (1) en l'expressió (2):

$$\frac{\overline{PQ}}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{4 \cdot \overline{PQ} \cdot \sin\alpha \cdot \sin(60^\circ + \alpha)}c^2.$$ Simplificant:

$$\overline{PQ}^2 = \frac{3}{8}\frac{1}{\sin\alpha \cdot \sin(60^\circ + \alpha)}.$$

$$\overline{PQ}^2 = \frac{3}{8}\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\cos 60^\circ - \cos(60^\circ + 2\alpha)\right)},$$

El valor mínim de $\overline{PQ}$ s'assoleix quan $\cos(60^\circ + 2\alpha) = -1$.

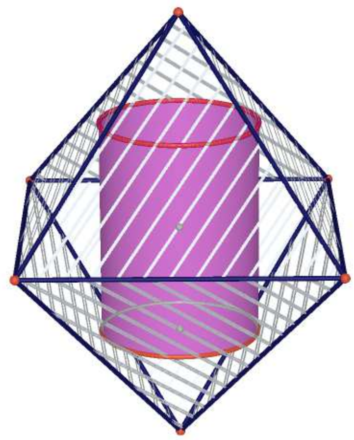
És a dir, quan $\alpha = 60^\circ$.

Per tant, quan $\overset{\Delta}{APQ}$ és un triangle equilàter.

El valor mínim de $\overline{PQ}$ és:

$$\overline{PQ}_{mín} = \sqrt{\frac{3}{8}\frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Problema 5



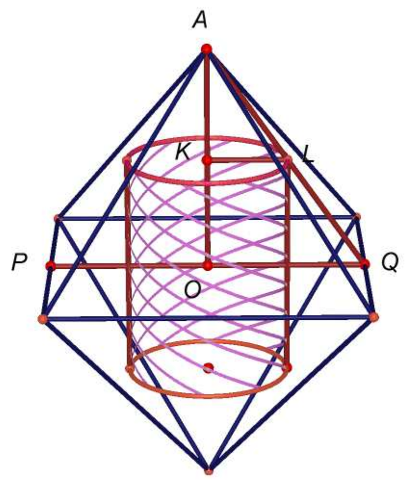
De tots els cilindres inscrits en un octàedre regular d'aresta 1, les bases tangents a les cares (veure figura), determineu les dimensions i el volum d'aquell que té volum màxim.

Solució:
Siga O el centre de l'octàedre.
Siga Q el punt mig de l'aresta.

$\overline{AQ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\overline{OQ}=\frac{1}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOQ}$:

$\overline{OA}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Siga $\overline{KL}=R$ radi del cilindre, (L sobre $\overline{AQ}$).
Siga $\overline{OK}=x$ mitja altura del cilindre.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AOQ}$, $\overset{\Delta}{AKL}$ són semblants.
Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-x}{R}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}$. Simplificant:

$\frac{\sqrt{2}}{2}-x=R\sqrt{2}$. $x=\frac{\sqrt{2}}{2}-R\sqrt{2}$

El volum del cilindre és: $V_{cilindre}=\pi R^2 2x$.

$V(R)=\pi\sqrt{2}\left(-2R^3+R^2\right)$, $R\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

Derivant la funció volum:

$V'(R)=\pi\sqrt{2}\left(-6R^2+2R\right)$

$V'(R)=0$. Resolent l'equació: $R=\frac{1}{3}$.

Calculem la segona derivada del volum:

$V''(R)=\pi\sqrt{2}(-12R+2)$.

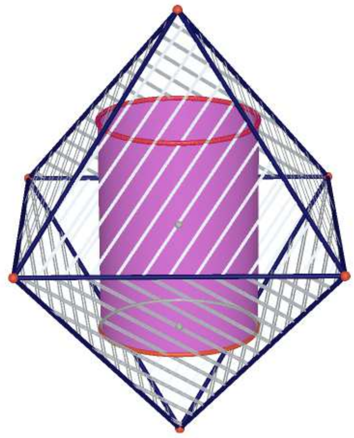
$V''\left(\frac{1}{3}\right)=\pi\sqrt{2}\left(-12\frac{1}{3}+2\right)<0$, aleshores, quan $R=\frac{1}{3}$ s'assoleix el màxim de la funció volum.

En aquest cas, l'altura del cilindre és; $2x=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3}\sqrt{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

El volum màxim és $V_{màx}=\pi\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{\pi\sqrt{2}}{27}$.

Problema 6

De tots els cilindres inscrits en un octàedre regular d'aresta 1, les bases tangents a les cares (veure figura), determineu les dimensions i l'àrea d'aquell que té superfície màxima.



Solució:

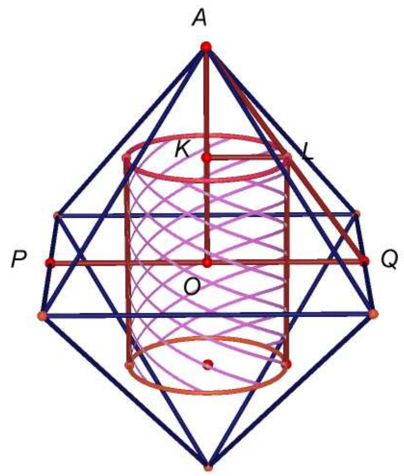
Siga O el centre de l'octàedre.

Siga Q el punt mig de l'aresta.

$\overline{AQ}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\overline{OQ}=\frac{1}{2}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AOQ}$:

$\overline{OA}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Siga $\overline{KL}=R$ radi del cilindre, (L sobre $\overline{AQ}$).

Siga $\overline{OK}=x$ mitja altura del cilindre.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AOQ}$, $\overset{\Delta}{AKL}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-x}{R}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}$. Simplificant:

$\frac{\sqrt{2}}{2}-x=R\sqrt{2}$. $x=\frac{\sqrt{2}}{2}-R\sqrt{2}$

L'àrea del cilindre és: $S_{cilindre}=2\pi R^2+2\pi R\cdot 2x$.

$S(R)=2\pi\left(R^2+\left(\sqrt{2}-2\sqrt{2}R\right)R\right)$

$S(R)=2\pi\left(\left(1-2\sqrt{2}\right)R^2+\sqrt{2}R\right)$, $R\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$.

La funció és una paràbola convexa. El seu màxim s'assoleix en el vèrtex:

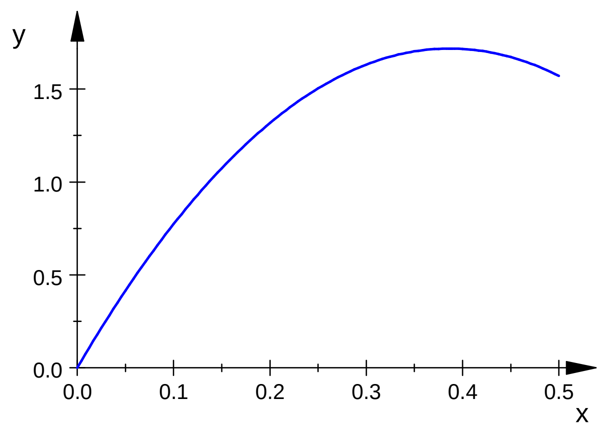
$R=\frac{-\sqrt{2}}{2\left(1-2\sqrt{2}\right)}=\frac{4+\sqrt{2}}{14}$.

En aquest cas, $2x=\frac{-2+3\sqrt{2}}{7}$ és l'altura del cilindre.

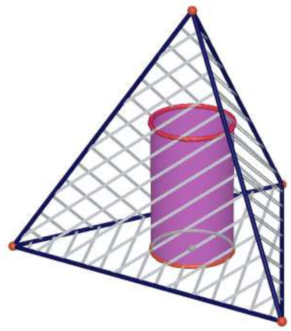
En aquest cas, l'altura del cilindre és;

$2x=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{4+\sqrt{2}}{14}\sqrt{2}\right)=\frac{-2+3\sqrt{2}}{7}$.

L'àrea màxima és $S_{màx}=S\left(\frac{4+\sqrt{2}}{14}\right)=\frac{\pi\left(1+2\sqrt{2}\right)}{7}$.

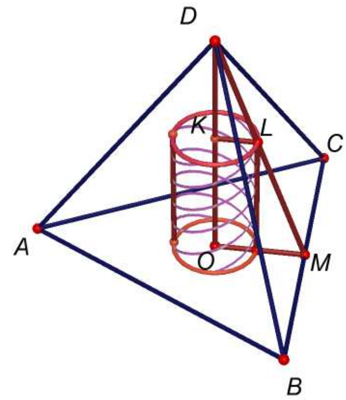


Problema 7



En un tetraedre regular d'aresta 1 s'ha inscrit un cilindre que té una base en una cara i l'altra base és tangent a les altres cares.
De tots els cilindres inscrits determineu les dimensions i el volum d'aquell que té volum màxim.

Solució:
Siga el tetraedre regular ABCD d'aresta 1. Siga O el centre de la cara ABC. Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{BC}$.
Siga K el centre de la base superior del cilindre.
Siga L el punt de tangència del cilindre i la cara BCD.
Siga $\overline{KL} = R$ el radi del cilindre i $OK = h$ altura del cilindre.
L pertany al segment $\overline{DM}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BMD}$: $\overline{DM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Aplicant la propietat del baricentre al punt O: $\overline{OM} = \frac{1}{3}\overline{DM} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DOM}$: $\overline{OD} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DOM}$, $\overset{\Delta}{DKL}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:
$\dfrac{\frac{\sqrt{6}}{3} - h}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \dfrac{R}{\frac{\sqrt{3}}{6}}$. Simplificant: $h = \frac{\sqrt{6}}{3} - 2\sqrt{2} \cdot R$. El volum del cilindre és:

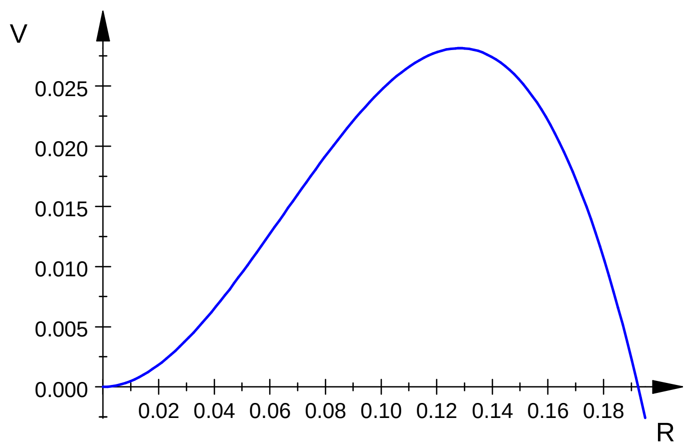
$$V = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{\sqrt{6}}{3}R^2 - 2\sqrt{2}\,R^3\right).$$

Derivant la funció respecte de R:

$$V' = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}R - 6\sqrt{2}\,R^2\right).$$

$V' = 0$. Resolent l'equació: $R = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

En aquest cas l'altura del cilindre és $h = \frac{\sqrt{6}}{9}$.



Calculant la segona derivada:

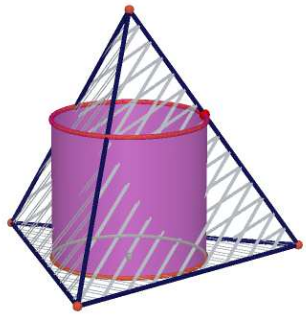
$$V'' = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{2\sqrt{6}}{3} - 12\sqrt{2}\,R^2\right). \quad V''\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right) = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{-2\sqrt{6}}{3}\right) < 0.$$

Aleshores, en $R = \frac{\sqrt{3}}{9}$ s'assoleix el màxim del volum.

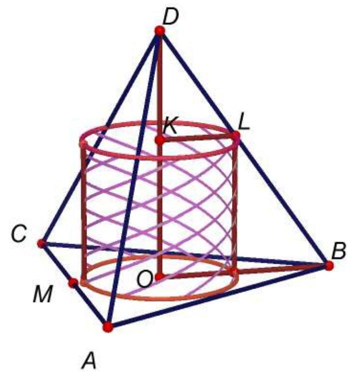
El volum màxim és: $V\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right) = \pi\frac{\sqrt{6}}{243}$.

Problema 8

En la figura el cilindre té una cara en la base d'un tetraedre regular d'aresta 1 i l'altra base en les altres 3 arestes laterals.
De tots els cilindres determineu les dimensions i el volum d'aquell que té volum màxim.



Solució:
Siga el tetraedre regular ABCD d'aresta 1. Siga O el centre de la cara ABC.
Siga M el punt mig de l'aresta $\overline{AC}$.
Siga K el centre de la base superior del cilindre.
Siga L el punt de la base superior del cilindre i l'aresta $\overline{BD}$.
Siga $\overline{KL} = R$ el radi del cilindre i $OK = h$ altura del cilindre.
L pertany al segment $\overline{DM}$.



Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AMB}$: $\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

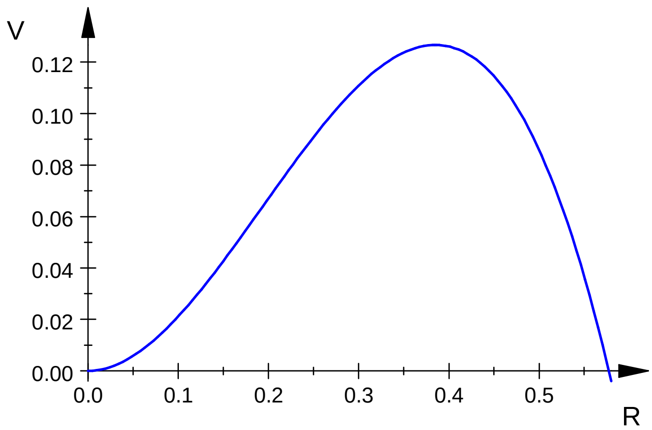
Aplicant la propietat del baricentre al punt O: $\overline{OB} = \frac{2}{3}\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{DOB}$: $\overline{OD} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DOB}$, $\overset{\Delta}{DKL}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\dfrac{\frac{\sqrt{6}}{3} - h}{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \dfrac{R}{\frac{\sqrt{3}}{3}}$. Simplificant: $h = \frac{\sqrt{6}}{3} - \sqrt{2} \cdot R$. El volum del cilindre és:

$$V = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{\sqrt{6}}{3}R^2 - \sqrt{2}\,R^3\right).$$



Derivant la funció respecte de R:

$$V' = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}R - 3\sqrt{2}\,R^2\right).$$

$V' = 0$. Resolent l'equació: $R = \frac{2\sqrt{3}}{9}$.

En aquest cas l'altura del cilindre és $h = \frac{\sqrt{6}}{9}$.

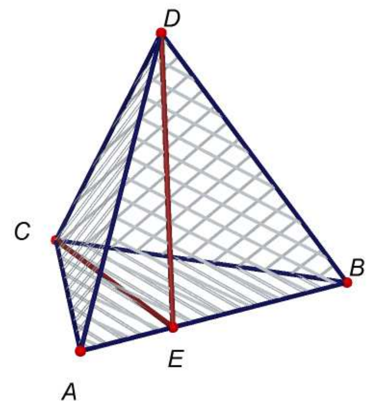
Calculant la segona derivada:

$$V'' = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{2\sqrt{6}}{3} - 6\sqrt{2}\,R^2\right). \quad V''\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}\right) = \pi R^2 h = \pi\left(\frac{-2\sqrt{6}}{3}\right) < 0.$$

Aleshores, en $R = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ s'assoleix el màxim del volum.

El volum màxim és: $V\left(\frac{2\sqrt{3}}{9}\right) = \pi\frac{4\sqrt{6}}{243}$.

Problema 9



Considerem el tetraedre regular ABCD.

Siga E un punt de l'aresta $\overline{AB}$.

Determineu el màxim de l'angle $\angle CED$ quan E recorre l'aresta $\overline{AB}$.

Solució 1:

$\overline{AC} = \overline{AD}$, $\angle CAE = \angle DAE = 60^o$.

Els triangles $\overset{\Delta}{CAE}$, $\overset{\Delta}{DAC}$ són iguals. Aleshores, $\overline{CE} = \overline{DE}$.

El triangle $\overset{\Delta}{CED}$ és isòsceles.

El major angle $\angle CED$ s'assoleix en el menor valor per als costats $\angle CED$.

És a dir, en la mínima distancia de D a l'aresta $\overline{AB}$.

Quan E és el punt mig.

L'angle màxim és igual a l'angle díedre del tetràedre regular.

En aquest cas $\overline{CE} = \overline{DE} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Calculem l'angle díedre. Siga $\alpha = \angle CED$.

Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CED}$:

$$\cos\alpha = \frac{1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{1}{3}. \quad \alpha = \arccos\frac{1}{3}.$$

Solució 2:

$\overline{AC} = \overline{AD}$, $\angle CAE = \angle DAE = 60^o$. Els triangles $\overset{\Delta}{CAE}$, $\overset{\Delta}{DAC}$ són iguals.

Aleshores, $\overline{CE} = \overline{DE}$.

Siga $\overline{AE} = x$. Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{AED}$:

$\overline{DE}^2 = 1^2 + x^2 - 2\cdot 1\cdot x\cdot \cos 60^o = x^2 - x + 1$.

$\alpha = \angle CED$. Aplicant el teorema del cosinus al triangle $\overset{\Delta}{CED}$:

$\cos\alpha = \frac{2x^2 - 2x + 1}{2(x^2 - x + 1)}$. Com que la funció $f(x) = \cos x$ és decreixent en $[0, \pi]$.

El valor màxim de l'angle s'assoleix en el valor mínim de la funció $g(x) = \frac{2x^2 - 2x + 1}{2(x^2 - x + 1)}$.

$g'(x) = \frac{2x - 1}{2(x^2 - x + 1)^2}$. $g'(x) = 0$, quan $x = \frac{1}{2}$.

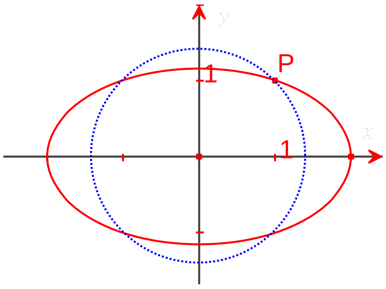
$g''\left(\frac{1}{2}\right) > 0$. Aleshores, $x = \frac{1}{2}$ és un mínim de la funció g(x) i per tant, el valor on s'assoleix el màxim de l'angle. $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. $\alpha = \arccos\frac{1}{3}$.

Problema 10

De totes les famílies d'el·lipses $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ que passen pel punt $P(1,1)$ determineu

a) Aquella que té àrea mínima.
b) Aquella que té mínim el volum de revolució de l'el·lipse al voltant de l'eix d'abscisses.

Solució:



Si el punt P pertany a l'el·lipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ aleshores:

$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1$, aleshores, $b^2=\frac{a^2}{a^2-1}$.

a)

L'àrea de l'el·lipse és:

$S=4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx=\pi\cdot ab$. L'àrea de l'el·lipse és:

$S(a)=\pi\frac{a^2}{\sqrt{a^2-1}}, a\in\left]1,+\infty\right[$. Derivant la funció:

$S'(a)=\pi\frac{a^3-2a}{(a^2-1)\sqrt{a^2-1}}$.

$S'(a)=0$. Resolent l'equació: $a=\sqrt{2}$.

Estudiant el signe de la primera derivada en un entorn de $a=\sqrt{2}$, la funció té un mínim relatiu en $a=\sqrt{2}$.

En aquest cas, $b=\sqrt{2}$.

L'àrea mínima és $S(\sqrt{2})=2\pi$. L'el·lipse d'àrea mínima és la circumferència de centre l'origen de coordenades i radi $\sqrt{2}$.

b)

El volum de l'el·lipsoide de revolució és:

$V=2\pi\int_0^a\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2dx=\frac{4}{3}\pi\cdot ab^2$. El volum de l'el·lipsoide és:

$V(a)=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{a^3}{a^2-1}$, $a\in\left]1,+\infty\right[$. Derivant la funció:

$V'(a)=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{a^2(a^2-3)}{(a^2-1)^2}$.

$V'(a)=0$. Resolent l'equació: $a=\sqrt{3}$.

Estudiant el signe de la primera derivada en un entorn de $a=\sqrt{3}$, la funció té un mínim relatiu en $b=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

En aquest cas, $b=\sqrt{2}$.

El volum mínim és $V(a)=2\pi\sqrt{3}$.