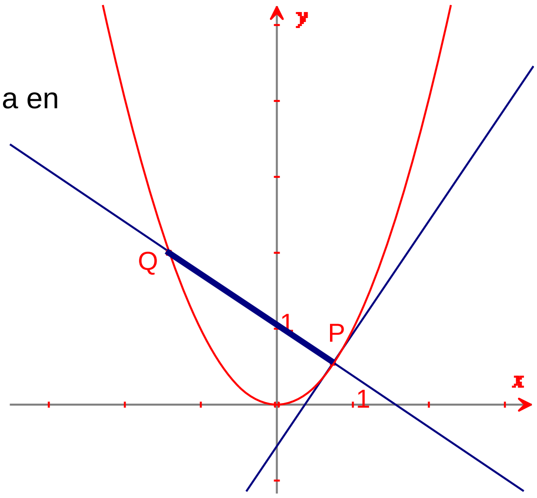
Problema 1

Siga P un punt de la paràbola $y = x^2$.

La recta normal a la paràbola en el punt P talla la paràbola en el punt Q.

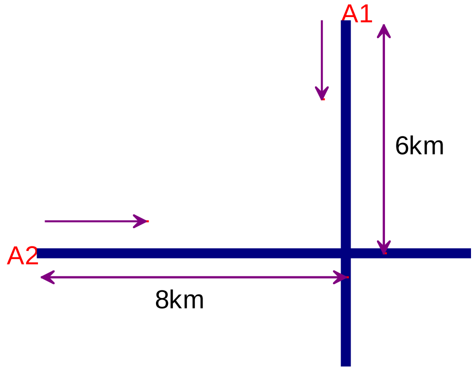
Determineu les coordenades del punt P que fan mínima la longitud del segment $\overline{PQ}$.

Calculeu la mesura mínima del segment $\overline{PQ}$.



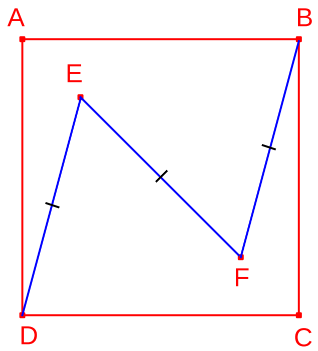
Problema 2

Dos automòbils van a la mateixa velocitat sobre dues carreteres que són perpendiculars i sentit d'encontre de les dues carreteres.
Un d'ells està a 6 km de la intersecció de les dues carretes i l'altre a 8 km.
Quin serà la mínima distància entre els dos automòbils?.



Problema 3

Siguen E i F dos punt interiors al quadrat ABCD tal que $\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FB}$ i que $\overline{DE} // \overline{FB}$.
Siga $\alpha = \angle ADE$
Determineu el valor mínim de l'angle $\alpha = \angle ADE$.

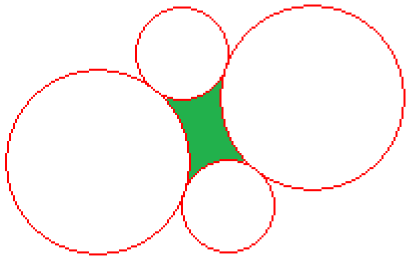


Problema 4

Determineu en la gràfica de la funció $y = \sqrt{x}$, $x \in [1, 9]$ un punt M a fi que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABM}$ siga màxima. A i B són punts de la gràfica amb abscisses 1 i 9, respectivament.

Problema 5

En la figura hi ha quatre circumferències les menudes són de radi 1 i les grans de radi 2.
Les menudes són tangents a les grans.
Calculeu l'àrea màxima afitada per les quatre circumferències



Problema 6

En el tetraedre SABC, l'aresta $\overline{SA}$ és perpendicular a la base $\overset{\Delta}{ABC}$.

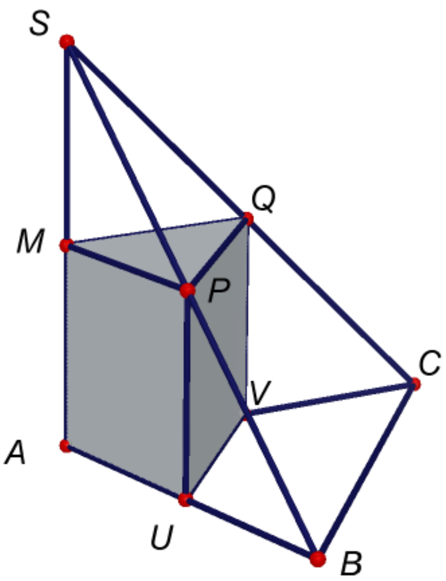
La base $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle isòsceles, $A = 90^{o}$.

Siga M un punt variable de l'aresta $\overline{SA}$. Pel punt M tracem un plànol paral·lel a la base $\overset{\Delta}{ABC}$ que talla les arestes $\overline{SB}$, $\overline{SC}$ en els punts P, Q, respectivament.

Les projeccions ortogonals dels punts P, Q sobre $\overset{\Delta}{ABC}$ són U, V, respectivament.

Siguen $\overline{AB} = a$, $\overline{SA} = b$

Determineu el volum màxim del prisma MPQAUV.



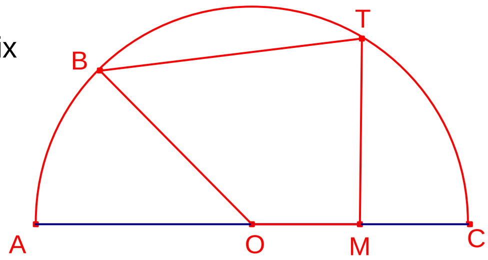
Problema 7

La semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AC}$ es divideix en dos arcs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ amb la relació 1:3.

Siga M el punt mig del radi $\overline{OC}$.

Siga T un punt de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ tal que l'àrea del quadrilàter OBTM és màxima.

Calculeu aquesta àrea màxima en funció del radi.



Problema 8

El volum d'un prisma regular triangular és $2\ \mathrm{dm}^3$. Determineu l'àrea mínima possible del prima.

KöMaL, 1531

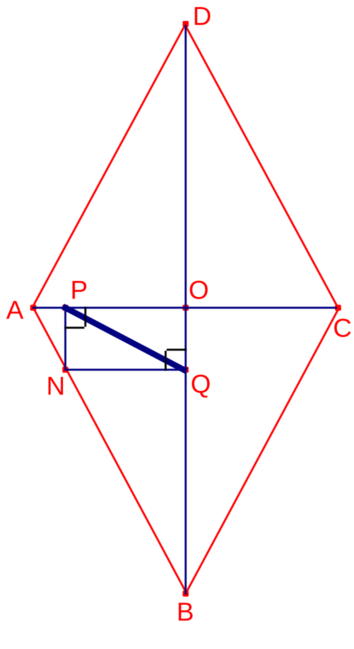
Problema 9

Siga el rombe ABCD tal que $\overline{AC} = 16$, $\overline{BD} = 30$.

Siga N un punt del costat $\overline{AB}$.

Siguen P i Q les projeccions de N sobre les diagonals $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$, respectivament.

Calculeu la mesura mínima del segment $\overline{PQ}$.



Problema 10

Siga la funció $f(x) = \frac{k}{x}$, $k > 0$.

Siga la recta tangent a la funció en el punt A de la corba d'abscissa $x = p > 0$

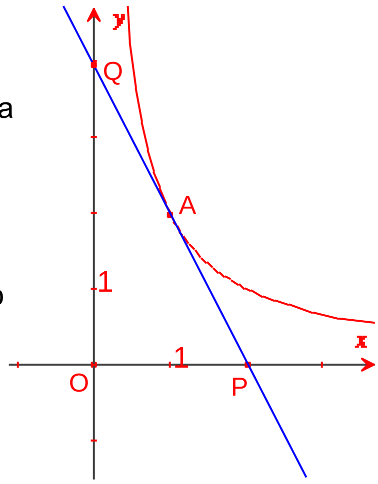
La recta tangent talla l'eix d'abscisses i l'eix d'ordenades en els punts P i Q, respectivament.

a) Determineu l'equació de la recta tangent.

b) Proveu que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OPQ}$ és constant, és a dir, no depèn del punt A.

c) Calculeu la mesura del segment $\overline{PQ}$

d) Determineu el valor p a fi que la longitud del segment $\overline{PQ}$ siga mínima.



Problema 11

Entre tots coladors xinesos que tenen volum $1\ dm^3$ calculeu les dimensions d'aquell que té mínima àrea (sense comptar les anses).

Quina és la proporció entre el radi i l'altura del colador.

Problema 12

Determineu un punt P de la recta $2x - y - 5 = 0$ tal que la suma de les distàncies als punts $A(-7,1), B(-5,5)$ siga mínima.

Kletenik, 251

Problema 13

Determineu un punt P de la recta $3x - y - 1 = 0$ tal que la diferència de les distàncies als punts $A(4,1), B(0,4)$ siga màxima.

Kletenik, 252

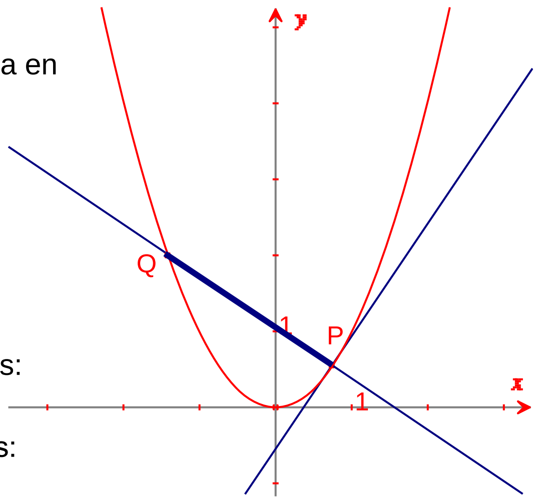
Problema 1

Siga P un punt de la paràbola $y = x^2$.

La recta normal a la paràbola en el punt P talla la paràbola en el punt Q.

Determineu les coordenades del punt P que fan mínima la longitud del segment $\overline{PQ}$.

Calculeu la mesura mínima del segment $\overline{PQ}$.



Solució:

Siga $P\left(a, a^2\right)$.

L'equació de la recta tangent a la paràbola en el punt P és:

$y = 2a(x-a) + a^2$.

L'equació de la recta normal a la paràbola en el punt Q és:

$y = \frac{-1}{2a}(x-a) + a^2$.

El punt Q intersecció de la recta normal i la paràbola és la solució del sistema

$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{-1}{2a}(x-a) + a^2 \end{cases}$. Les seues coordenades són:

$Q\left(\frac{-2a^2-1}{2a}, \frac{4a^4+4a^2+1}{4a^2}\right)$.

La mesura del segment $\overline{PQ}$ és:

. Simplificant:

$$\overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{-2a^2-1}{2a} - a\right)^2 + \left(\frac{4a^4+4a^2+1}{4a^2} - a^2\right)^2}.$$

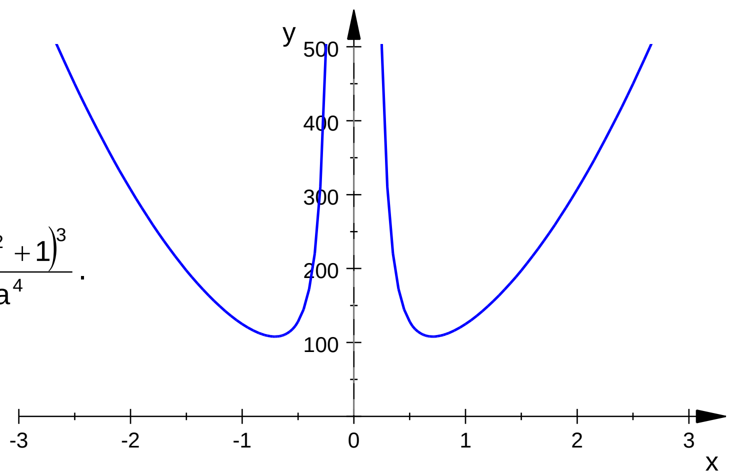
$$\overline{PQ} = \sqrt{\frac{\left(4a^2+1\right)^3}{16a^4}}.$$

Considerem la funció:

$f(a) = \frac{\left(4a^2+1\right)^3}{a^4}$, $a \in R$.

El mínim de la mesura del segment $\overline{PQ}$

s'assoleix en el mínim de la funció $f(a) = \frac{\left(4a^2+1\right)^3}{a^4}$.



$f'(a) = \frac{4\left(4a^2+1\right)^2\left(2a^2-1\right)}{a^5}$.

$f'(a) = 0$. Resolent l'equació:

$a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$f''(a) = \frac{4\left(4a^2+1\right)\left(8a^4-2a^2+5\right)}{a^6}$.

$f''\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0$. Aleshores, $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ és un mínim relatiu estricte.

$f''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0$. Aleshores, $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ és un mínim relatiu estricte.

Si $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ les coordenades de P són $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

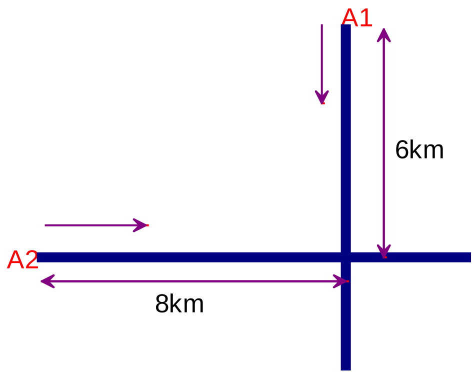
La mesura del segment és $\overline{PQ} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Si $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ les coordenades de P són $P\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

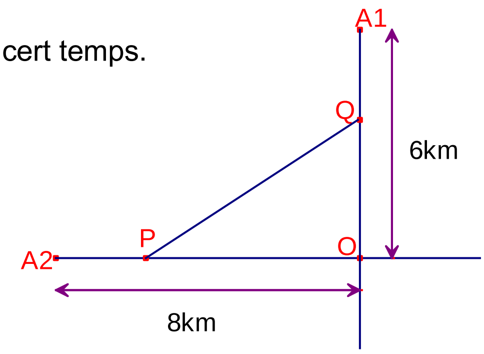
La mesura del segment és $\overline{PQ} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

El problema té dues solucions.

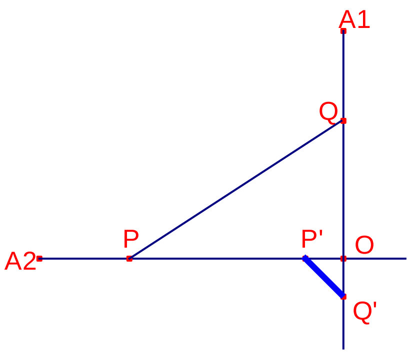
Problema 2
Dos automòbils van a la mateixa velocitat sobre dues carreteres que són perpendiculars i sentit d'encontre de les dues carreteres.
Un d'ells està a 6 km de la intersecció de les dues carretes i l'altre a 8 km.
Quin serà la mínima distància entre els dos automòbils?.

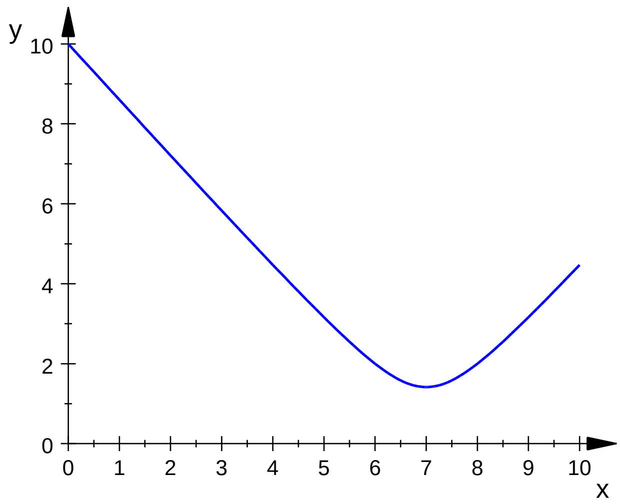


Solució 1:
Dos automòbils que van a la mateixa velocitat recorren el mateix espai en el mateix temps.
Siga $x = \overline{A_1Q} = \overline{A_2P}$ l'espai que recorren el dos automòbils en cert temps.
$\overline{OQ} = 6 - x$, $\overline{OP} = 8 - x$.
La distància entre els dos automòbils és:
$\overline{PQ} = \sqrt{(6-x)^2 + (8-x)^2}$. Simplificant:
$\overline{PQ} = \sqrt{2x^2 - 28x + 100}$.



Considerem la funció $f(x) = 2x^2 - 28x + 100$.
La distància mínima dels dos automòbils s'assoleix en el valor mínim de la funció $f(x) = 2x^2 - 28x + 100$.
La funció és una paràbola còncava. El mínim s'assoleix en el vèrtex.
$$x = \frac{28}{2 \cdot 2} = 7.$$
La distància mínima és $\overline{PQ}_{\text{mín}} = \sqrt{(6-7)^2 + (8-7)^2} = \sqrt{2} \approx 1.41\,\text{km}$.





$$\boxed{y = \sqrt{(6-x)^2 + (8-x)^2}}$$

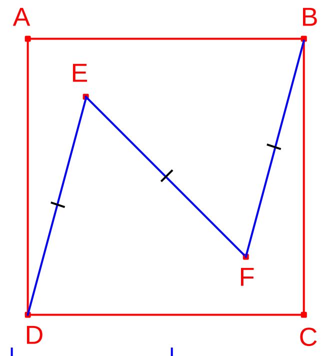
Solució 2:
La distància entre els dos automòbils és:
$\overline{PQ} = \sqrt{(6-x)^2 + (8-x)^2}$.
$(6-x)^2, (8-x)^2 \geq 0$.
Aplicant la desigualtat entre la mitjana aritmètica i geomètrica:
$(6-x)^2 + (8-x)^2 \geq 2\sqrt{(6-x)^2 \cdot (8-x)^2}$.
$(6-x)^2 + (8-x)^2 \geq 2|6-x| \cdot |8-x|$.
La igualtat s'assoleix quan $|6-x| = |8-x|$, és a dir quan $x = 7$.
La distància mínima és $\overline{PQ}_{\text{mín}} = \sqrt{(6-7)^2 + (8-7)^2} = \sqrt{2} \approx 1.41\,\text{km}$.

Problema 3

Siguen E i F dos punt interiors al quadrat ABCD tal que $\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FB}$ i que $\overline{DE} // \overline{FB}$.

Siga $\alpha = \angle ADE$

Determineu el valor mínim de l'angle $\alpha = \angle ADE$.



Solució:

Siga $\overline{AB} = 1$ costat del quadrat ABCD.

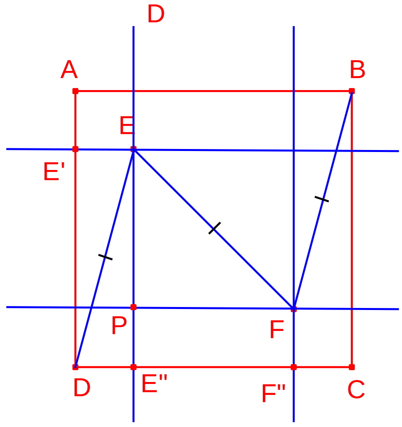
Siga $\overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FB} = x$.

Siga E' la projecció de E sobre el costat $\overline{AD}$.

Siga E" la projecció de E sobre el costat $\overline{CD}$.

Siga F" la projecció de F sobre el costat $\overline{CD}$.

Siga P la projecció de F sobre la recta EE".



$\overline{EE'} = \overline{DE''} = x \cdot \sin\alpha$.

$\overline{DE'} = \overline{EE''} = x \cdot \cos\alpha$.

$\overline{E''F''} = 1 - 2 \cdot \overline{DE''} = 1 - 2x \cdot \sin\alpha$.

$\overline{EP} = 1 - 2\left(1 - \overline{EE''}\right) = 2x \cdot \cos\alpha - 1$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{EPF}$:

$x^2 = (1 - 2x \cdot \sin\alpha)^2 + (2x \cdot \cos\alpha - 1)^2$. Simplificant:

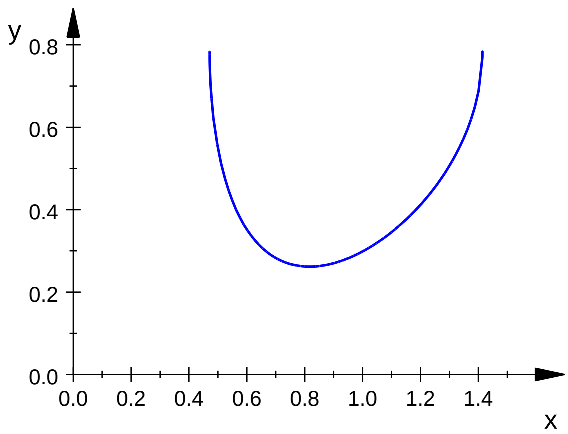
$$\cos\alpha + \sin\alpha = \frac{2 + 3x^2}{4x}.$$

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{2 + 3x^2}{4x}.$$

$$\alpha = f(x) = \frac{\pi}{4} - \arccos\left(\frac{2 + 3x^2}{4\sqrt{2}x}\right).$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{2 + 3x^2}{4\sqrt{2}x}\right)^2}} \frac{1}{4\sqrt{2}} \frac{3x^2 - 2}{x^2}.$$

$$f'(x) = 0, \quad x = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$



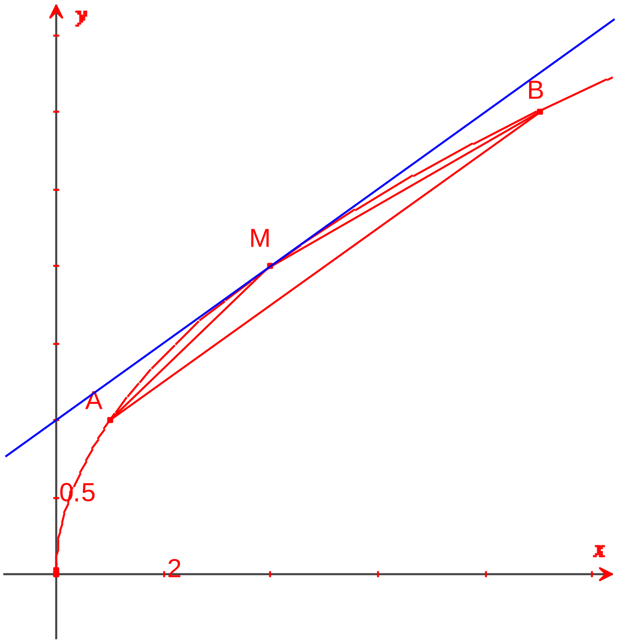
Estudiant el signe de la primera derivada $x = \frac{\sqrt{6}}{3}$ és un mínim relatiu estricte.

El valor mínim de l'angle $\alpha = \angle ADE$ és:

$$\alpha_{mín} = f\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{\pi}{4} - \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}.$$

Problema 4

Determineu en la gràfica de la funció $y=\sqrt{x}$, $x \in [1, 9]$ un punt M a fi que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABM}$ siga màxima. A i B són punts de la gràfica amb abscisses 1 i 9, respectivament.



Solució:

Les coordenades dels punts són:

$A(1,1)$, $B(9,3)$.

Les coordenades de M són:

$M(x, \sqrt{x})$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABM}$ és:

$$S(x)=\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 9 & 3 & 1\\ x & \sqrt{x} & 1\end{pmatrix}\right|:$$

$S(x)=-x+4\sqrt{x}-3$, $x \in [1, 9]$.

Calculem la derivada de la superfície:

$$S'(x)=-1+\frac{2}{\sqrt{x}}.$$

$S'(x)=0$, resolem l'equació: $-1+\dfrac{2}{\sqrt{x}}=0$, $x=4$.

Calculem la segona derivada:

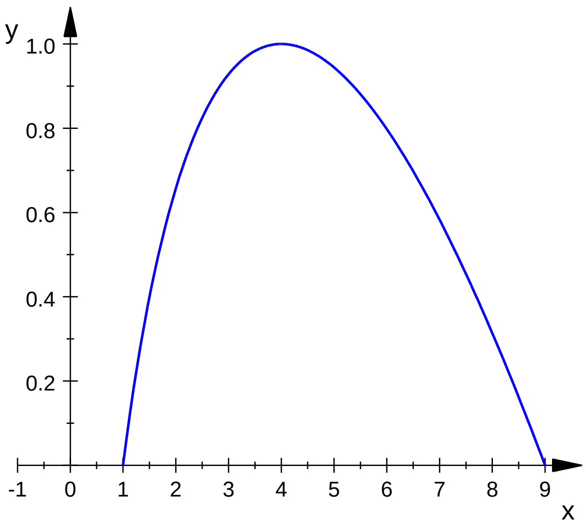
$S''x)=-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$, $S'(4)=\dfrac{-1}{8}<0$. Aleshores, $x=4$ és un màxim relatiu estricte.

El màxim de l'àrea s'assoleix quan $x=4$, $M(4, 2)$.

Notem que M és el punt de tangència de la recta tangent a la paràbola i paral·lela a la recta AB.

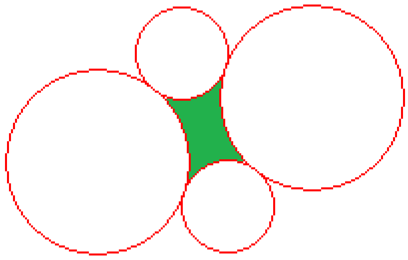
L'àrea màxima és:

$S(4)=1$.

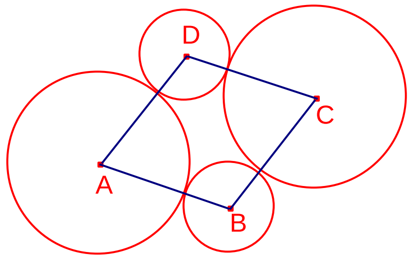


Problema 5

En la figura hi ha quatre circumferències les menudes són de radi 1 i les grans de radi 2.
Les menudes són tangents a les grans.
Calculeu l'àrea màxima afitada per les quatre circumferències



Solució:
Els centres de les circumferències formen el rombe ABCD, de costat 3.
Siga $\alpha = \angle BAD$ (en radians).
L'àrea afitada és igual a l'àrea del rombe ABCD menys la suma de les àrees dels quatre sectors:



L'àrea del rombe és:
$S_{ABCD} = 9 \cdot \sin\alpha$.
L'àrea de la suma dels quatre sectors és:
$S_{4\,sectors} = 4\alpha + \pi - \alpha = 3\alpha + \pi$.
L'àrea afitada és:

$$S(\alpha) = 9 \cdot \sin\alpha - 3\alpha - \pi, \quad \alpha \in \left[2 \cdot \arcsin\frac{1}{3}, 2 \cdot \arccos\frac{2}{3}\right]$$

Derivant la funció:
$S'(\alpha) = 9 \cdot \cos\alpha - 3$.
$S'(\alpha) = 0$.
Resolent l'equació:

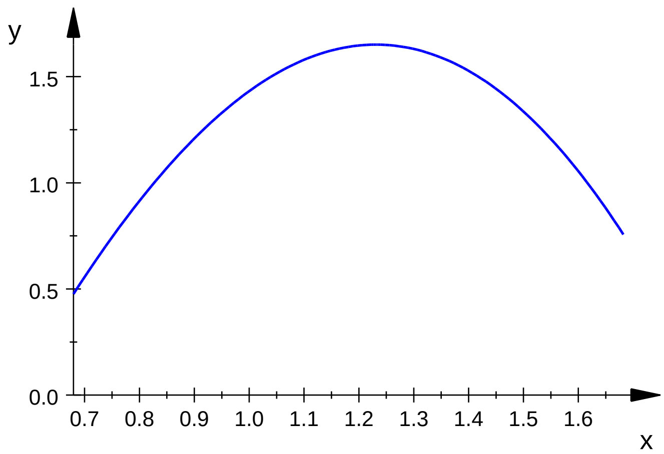
$$\alpha = \arccos\frac{1}{3}.$$

$S''(\alpha) = -9 \cdot \sin\alpha$.

$$S''\left(\arccos\frac{1}{3}\right) < 0.$$

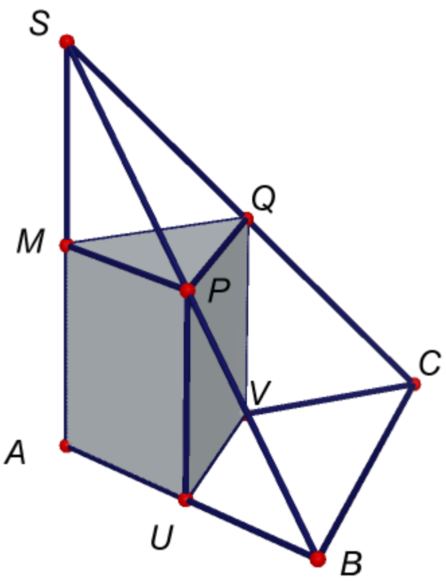
Aleshores, $\alpha = \arccos\frac{1}{3}$ és un màxim relatiu.
L'àrea màxima és:

$$S\left(\arccos\frac{1}{3}\right) = 6\sqrt{2} - 3 \cdot \arccos\frac{1}{3} - \pi \approx 1.6508$$



Problema 6

En el tetraedre SABC, l'aresta $\overline{SA}$ és perpendicular a la base $\overset{\Delta}{ABC}$.



La base $\overset{\Delta}{ABC}$ és un triangle isòsceles, $A = 90^{o}$.
Siga M un punt variable de l'aresta $\overline{SA}$. Pel punt M tracem un plànol paral·lel a la base $\overset{\Delta}{ABC}$ que talla les arestes $\overline{SB}$, $\overline{SC}$ en els punts P, Q, respectivament.
Les projeccions ortogonals dels punts P, Q sobre $\overset{\Delta}{ABC}$ són U, V, respectivament.
Siguen $\overline{AB} = a$, $\overline{SA} = b$
Determineu el volum màxim del prisma MPQAUV.

Solució 1:
Siga $\overline{AM} = x$.
El segment $\overline{MP}$ és paral·lel al segment $\overline{AB}$.
Els triangles $\overset{\Delta}{SAB}$, $\overset{\Delta}{SMQ}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{MP}}{a} = \frac{b-x}{b}.$$

$$\overline{MP} = \frac{a}{b}(b-x).$$

El volum del prisma MPQAUV és:

$$V(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}(b-x)\right)^2 x, \quad x \in [0, b].$$

$$V(x) = \frac{a^2}{2b^2}\left(x^3 - 2bx^2 + b^2 x\right).$$ Derivem la funció:

$$V'(x) = \frac{a^2}{2b^2}\left(3x^2 - 4bx + b^2\right).$$

$$V'(x) = 0.$$

$$x = \frac{1}{3}b.$$

Calculem la segona derivada:

$$V''(x) = \frac{a^2}{b^2}(3x - 2b).$$

$$V''\left(\frac{1}{3}b\right) = -\frac{a^2}{b} < 0.$$

Aleshores, en $x = \frac{1}{3}b$ s'assoleix el màxim de la funció.
El volum màxim és:

$$V\left(\frac{1}{3}b\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\left(\frac{2}{3}b\right)\right)^2 \frac{1}{3}b = \frac{2}{27}a^2 b.$$

Solució 2:

Siga $\overline{AM} = x$.

El segment $\overline{MP}$ és paral·lel al segment $\overline{AB}$.

Els triangles $\overset{\Delta}{SAB}$, $\overset{\Delta}{SMQ}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{MP}}{a} = \frac{b-x}{b}.$$

$$\overline{MP} = \frac{a}{b}(b-x).$$

El volum del prisma MPQAUV és:

$$V(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}(b-x)\right)^2 x, \quad x \in [0, b].$$

$$V(x) = \frac{1}{4}\frac{a^2}{b^2}(b-x)^2 2x.$$

Aplicant la desigualtat entre la mitjana aritmètica i geomètrica:

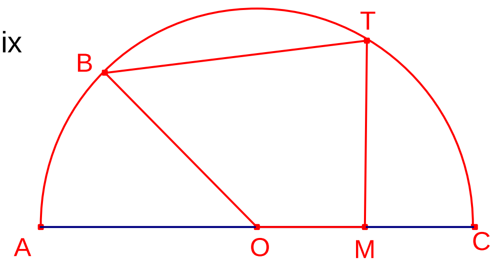
$$(b-x)^2 2x \geq \left(\frac{(b-x)+(b-x)+2x}{3}\right)^3.$$

$(b-x)^2 2x \geq \left(\frac{2b}{3}\right)^3 = \frac{8b^3}{27}$. La igualtat s'assoleix quan $b - x = 2x$, és a dir, quan $x = \frac{1}{3}b$.

El volum màxim és:

$V_{max} = \frac{1}{4}\frac{a^2}{b^2}\frac{8b^3}{27} = \frac{2}{27}a^2 b$, el volum màxim s'assoleix quan $x = \frac{1}{3}b$.

Problema 7



La semicircumferència de centre O i diàmetre $\overline{AC}$ es divideix en dos arcs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ amb la relació 1:3.

Siga M el punt mig del radi $\overline{OC}$.

Siga T un punt de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ tal que l'àrea del quadrilàter OBTM és màxima.

Calculeu aquesta àrea màxima en funció del radi.

Solució:

Siga $\overline{OC} = R$ radi de la semicircumferència.

Siga $\alpha = \angle TOM$. $\angle BOT = 135^{o} - \alpha$

Els $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$ amb la relació 1:3, aleshores, $\angle BOT = 135^{o}$.

L'àrea del quadrilàter OBTM és:

$$S(\alpha) = \frac{1}{2}\frac{R}{2}R \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2}R \cdot R \cdot \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right).$$

$$S(\alpha) = \frac{R^2}{4}\left(\sin\alpha + 2\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)\right),\ \alpha \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right].$$

$$S'(\alpha) = \frac{R^2}{4}\left(\cos\alpha - 2\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)\right).$$

$$S'(\alpha) = 0.$$

$$\cos\alpha - 2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha\right) = 0.$$

$$\left(1 + \sqrt{2}\right)\cos\alpha - \sqrt{2}\sin\alpha = 0.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}.\quad \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right).\ \sin\alpha = \frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{10 + 4\sqrt{2}}},\ \operatorname{co}\alpha = \frac{2}{\sqrt{10 + 4\sqrt{2}}}$$

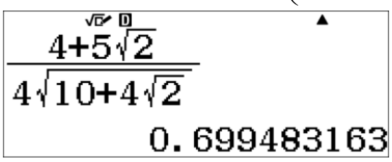
$$S''(\alpha) = \frac{R^2}{4}\left(-\sin\alpha - 2\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right)\right)$$

$S''\left(\operatorname{arctg}\frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right) < 0$, aleshores, el màxim s'assoleix quan $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right)$.

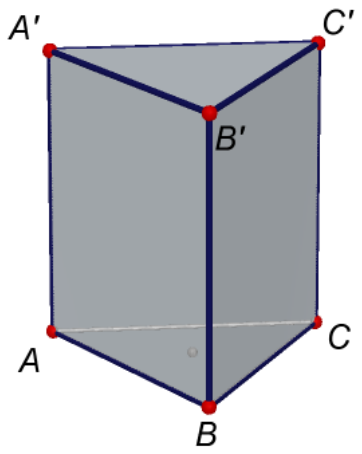
Calculem l'àrea màxima:

$$S(\alpha) = \frac{R^2}{4}\left(\left(1 + \sqrt{2}\right)\sin\alpha + \sqrt{2}\cos\alpha\right).$$

$$S\left(\operatorname{arctg}\frac{2 + \sqrt{2}}{2}\right) = \frac{R^2}{4}\left(\left(1 + \sqrt{2}\right)\frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{10 + 4\sqrt{2}}} + \sqrt{2}\frac{2}{\sqrt{10 + 4\sqrt{2}}}\right) = \frac{4 + 5\sqrt{2}}{4\sqrt{10 + 4\sqrt{2}}}R^2.$$



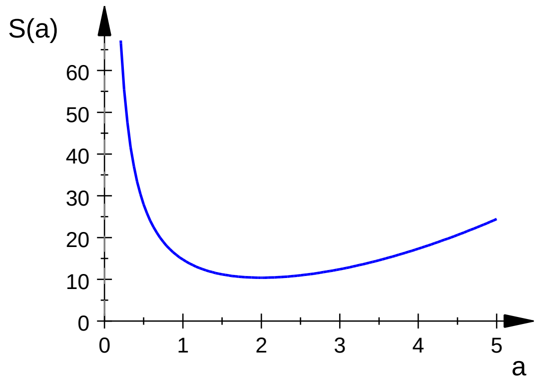
Problema 8
El volum d'un prisma regular triangular és $2\ \mathrm{dm}^3$. Determineu l'àrea mínima possible del prima.
KöMaL, 1531



Solució:
Siga $\overline{AB} = a$ l'aresta de la base del prisma
Siga $\overline{AA'} = h$ altura del prims.
L'àrea del prisma és:
$$S = 2\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + 3ah$$

El volum del prisma és:
$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2h = 2$$
$$h = \frac{8\sqrt{3}}{3a^2}.$$

Aleshores l'àrea del prisma és:
$$S(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2 + \frac{8\sqrt{3}}{a}$$
$$S(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(a^2 + \frac{16}{a}\right), \quad a > 0$$
Derivant la funció:
$$S'(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2a - \frac{16}{a^2}\right)$$
$$S'(a) = 0$$
Resolent l'equació:
$$a = 2$$
$$S''(a) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2 + \frac{32}{a^3}\right)$$
$$S''(2) = 3\sqrt{3} > 0.$$
Aleshores, en $a = 2$ s'assoleix el mínim de la funció àrea.
L'àrea mínima és
$$S(2) = 6\sqrt{3}$$



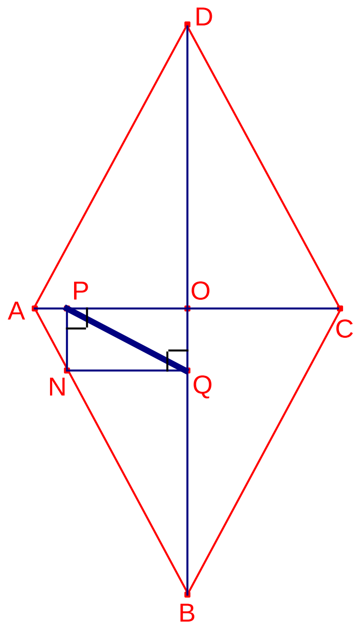
Problema 9

Siga el rombe ABCD tal que $\overline{AC} = 16$, $\overline{BD} = 30$.

Siga N un punt del costat $\overline{AB}$.

Siguen P i Q les projeccions de N sobre les diagonals $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$, respectivament.

Calculeu la mesura mínima del segment $\overline{PQ}$.



Solució:

Siga O la intersecció de les diagonals $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$.

$\overline{OA} = 8$, $\overline{OB} = 15$.

Siga $\overline{AP} = x$.

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{AOB}$, $\overset{\Delta}{APN}$ són semblants.

Aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{8} = \frac{\overline{PN}}{15}.$$

$$\overline{PN} = \frac{15}{8}x.$$

$$\overline{OP} = 8 - x.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$:

$$\overline{OP} = \sqrt{\left(\frac{15}{8}x\right)^2 + (8-x)^2}.$$

$$\overline{OP} = \frac{1}{8}\sqrt{289x^2 - 1024x + 4096}$$

Considerem a funció $f(x) = 289x^2 - 1024x + 4096$.

El valor mínim del segment $\overline{PQ}$ s'assoleix en el mínim de la paràbola còncava

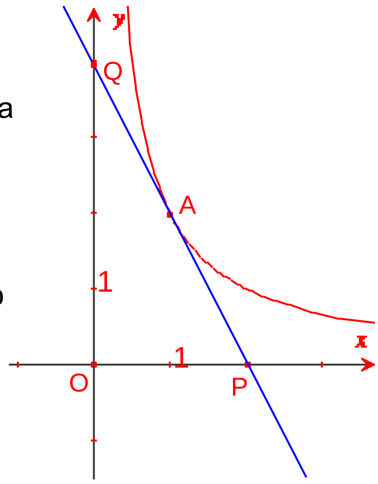
$f(x) = 289x^2 - 1024x + 4096$

És a dir, quan $x = \frac{1024}{2 \cdot 289} = \frac{512}{289}$.

La mesura del segment mínim és:

$$\overline{OP} = \sqrt{\left(\frac{15}{8}\frac{512}{289}\right)^2 + \left(8 - \frac{512}{289}\right)^2} = \frac{120}{17}.$$

Problema 10



Siga la funció $f(x) = \frac{k}{x}$, $k > 0$.

Siga la recta tangent a la funció en el punt A de la corba d'abscissa $x = p > 0$

La recta tangent talla l'eix d'abscisses i l'eix d'ordenades en els punts P i Q, respectivament.

e) Determineu l'equació de la recta tangent.

f) Proveu que l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{OPQ}$ és constant, és a dir, no depèn del punt A.

g) Calculeu la mesura del segment $\overline{PQ}$

h) Determineu el valor p a fi que la longitud del segment $\overline{PQ}$ siga mínima.

Solució:

Les coordenades del punt A són $A\left(p, \frac{1}{p}\right)$

La derivada de la corba és:

$$f'(x) = -\frac{k}{x^2}$$

L'equació de la recta tangent a la corba en el punt A és:

$$r_T \equiv y = -\frac{k}{p^2}(x - p) + \frac{k}{p}$$

$$r_T \equiv y = -\frac{k}{p^2}x + \frac{2k}{p}$$

Calculem les coordenades dels punts de tall de la recta tangent amb els eixos coordenats:

Si $y = 0$, $x = 2p$, aleshores, $P(2p, 0)$

Si $x = 0$, $y = \frac{2k}{p}$, aleshores, $Q\left(0, \frac{2k}{p}\right)$

L'àrea del triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$ és:

$$S_{OPQ} = \frac{1}{2}\overline{OP} \cdot \overline{OQ} = \frac{1}{2} \cdot 2p \cdot \frac{2k}{p} = 2k$$

Notem que l'àrea del triangle no depèn del punt A.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPQ}$

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2} = \sqrt{4p^2 + \frac{4k^2}{p^2}} = \frac{2}{p}\sqrt{p^4 + k^2}$$

Siga la funció

$g(p) = \frac{2}{p}\sqrt{p^4 + k^2}$, $P > 0$.

Calculem la derivada de la funció:

$g'(p) = \frac{2}{p^2}\frac{p^4 - k^2}{\sqrt{p^4 + k^2}}$.

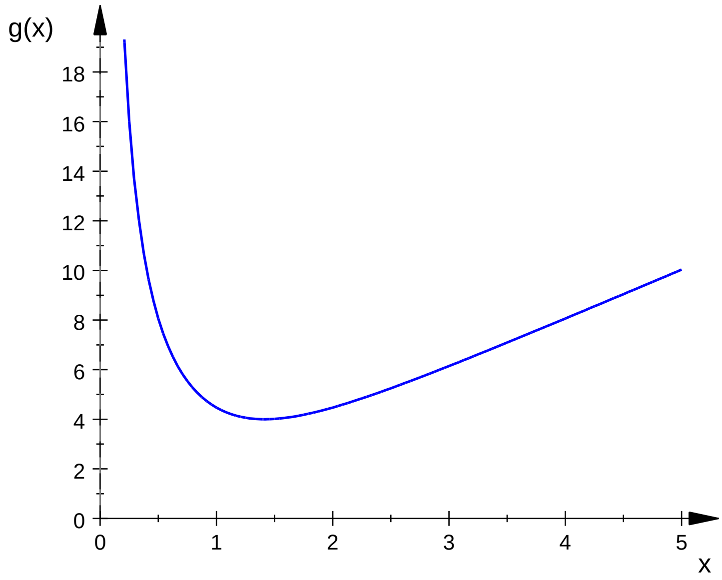
$g'(p) = 0$. Resolent l'equació $p = \sqrt{k}$

Estudiant el signe de la primera derivada $p = \sqrt{k}$ és un mínim de la funció.

La mesura mínima del segment $\overline{PQ}$ és:

$$g(\sqrt{k}) = \frac{2}{\sqrt{k}}\sqrt{2k^2} = 2\sqrt{2k}$$

La gràfica de la funció $g(x) = \frac{2}{x}\sqrt{x^4 + 4}$, és a dir, quan $k = 2$



El mínim s'assoleix quan $x = \sqrt{2}$ i la longitud mínima és $g(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2 \cdot 2} = 4$.

Problema 11

Entre tots coladors xiness que tenen volum $1\ dm^3$ calculeu les dimensions d'aquell que té mínima àrea (sense comptar les anses).
Quina és la proporció entre el radi i l'altura del colador.

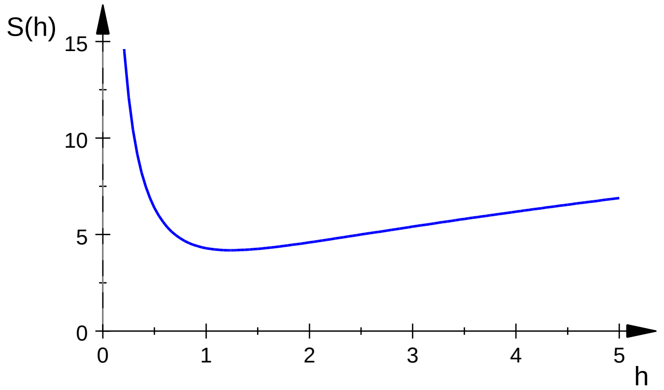
Solució:
Un colador xinés té forma de con.
Siga r el radi i h l'altura i g la generatriu.
El radi, l'altura i la generatriu formen un triangle rectangle d'hipotenusa la generatriu.
Aplicant el teorema de Pitàgores:
$g^2 = r^2 + h^2$

El volum del con és:
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 1$
L'àrea lateral del con és:
$S_L = \pi r g$
$S_L = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

$r^2 = \frac{3}{\pi}\frac{1}{h}$, aleshores, l'àrea lateral és:
$S(h) = \pi\sqrt{\frac{3}{\pi}h + \frac{9}{\pi^2}\cdot\frac{1}{h^2}}$

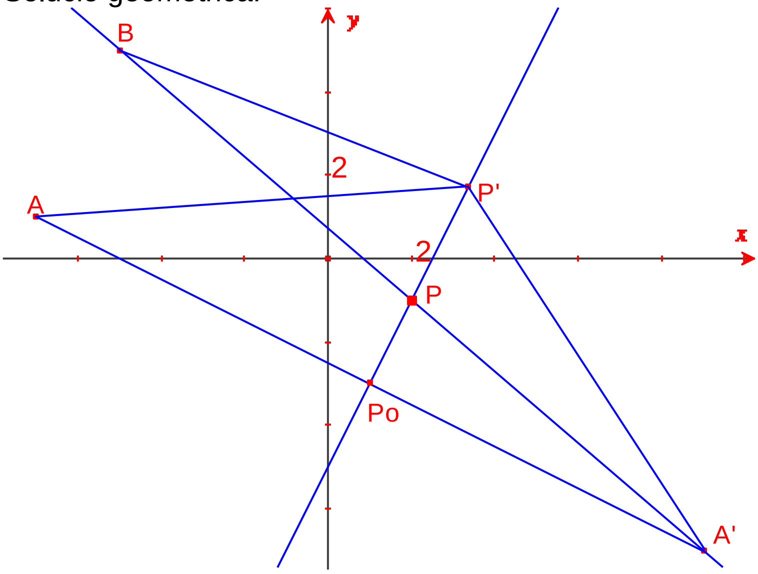
Considerem la funció $f(h) = \pi h + \frac{3}{h^2}$

El mínim de la funció àrea s'assoleix en el mínim de la funció $f(h) = \pi h + \frac{3}{h^2}$
Calculem la derivada de la funció:
$f'(h) = \pi - \frac{6}{h^3}$
$f'(h) = 0,\ \ h = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$
$f"(h) = \frac{18}{h^4}\quad f"\left(\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}\right) > 0$
Aleshores, $h = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi}} \approx 1.24dm = 12.4\ cm$ és un mínim de la funció.
$r^2 = \frac{3}{\pi}\sqrt[3]{\frac{\pi}{6}}$
$r = \sqrt[3]{\frac{3}{\pi\sqrt{2}}} \approx 8.8\ cm$
La proporció entre el radi i l'altura és:
$\frac{r}{h} = \frac{\sqrt[3]{\frac{3}{\pi\sqrt{2}}}}{\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



Problema 12
Determineu un punt P de la recta $2x - y - 5 = 0$ tal que la suma de les distàncies als punts $A(-7,1), B(-5,5)$ siga mínima.

Solució geomètrica:



Notem que els punts $A(-7,1), B(-5,5)$ pertanyen al mateix semiplànol que determina la recta $2x - y - 5 = 0$ ja que als substituir les coordenades dels dos punts en l'equació general de la recta tenen el mateix signe:
$2 \cdot (-7) - 1 - 5 < 0, 2 \cdot (-5) - 5 - 5 < 0$

El punt P és la intersecció de la recta $2x - y - 5 = 0$ i la recta que passa per B i el punt A' simètric de A respecte de la recta $2x - y - 5 = 0$, ja que si P' pertany a la recta $2x - y - 5 = 0$
La recta és mediatriu del segment $\overline{AA'}$ aleshores, $\overline{AP'} = \overline{A'P'}$
$\overline{AP'} + \overline{BP'} = \overline{A'P'} + \overline{BP'} \geq \overline{AA'} = \overline{AP} + \overline{BP}$

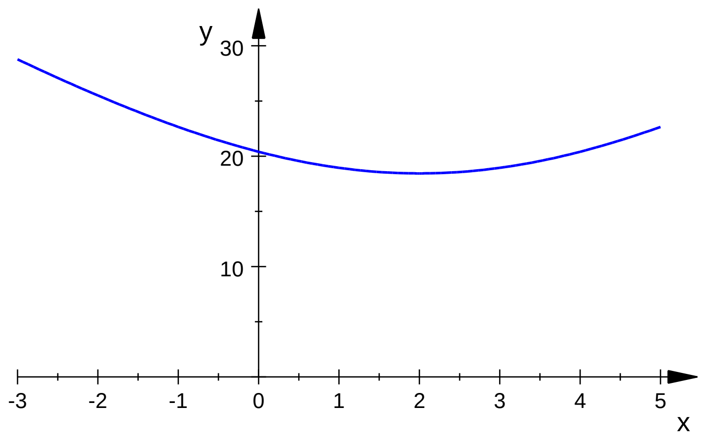
Calculem el punt P_0 projecció de A sobre la recta $2x - y - 5 = 0$.
El vector director de la recta $2x - y - 5 = 0$ és $v = (1,2)$
$P_0(x, 2x - 5)$
$\overrightarrow{AP_0} = (x - 7, 2x - 6)$
Els vectors $\overrightarrow{AP_0} = (x + 7, 2x - 6), v(1,2)$ són ortogonals:
$\overrightarrow{AP_0} \cdot v = 0$
$(x + 7, 2x - 6) \cdot (1,2) = 0$
$x + 7 + 4x - 12 = 0$
Resolent l'equació, $x = 1$
El punt projecció és, $P_0(1, -3)$
El punt simètric $A'(x,y)$ compleix $\overrightarrow{AA'} = 2 \cdot \overrightarrow{AP_0}$
$(x + 7, y - 1) = 2 \cdot (8, -4)$
Resolent l'equació:
$\begin{cases} x = 9 \\ y = -7 \end{cases}$, aleshores, $A'(9, -7)$
$\overrightarrow{A'B} = (-14, 12)$
L'equació de la recta que passa per A' i B té equació:
$r_{A'B} \equiv \dfrac{x + 5}{-7} = \dfrac{y - 5}{6}$

El punt que cerquem és la intersecció de les rectes
$r_{A'B} \equiv \frac{x+5}{-7} = \frac{y-5}{6}, 2x - y - 5 = 0$
Resolent el sistema format per ambdues rectes:
$\begin{cases} \frac{x+5}{-7} = \frac{y-5}{6} \\ 2x - y - 5 = 0 \end{cases}$
$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$
Les coordenades del punt són $P(2, -1)$
La distància mínima és, $\overline{A'B} = \sqrt{(-14)^2 + 12^2} = 2\sqrt{85}$

Solució anàlisi matemàtica:
Siga $P(x, 2x-5)$ un punt de la recta $2x - y - 5 = 0$
$\overline{AP} = \sqrt{(x+7)^2 + (2x-6)^2}, \overline{BP} = \sqrt{(x+5)^2 + (2x-10)^2}$

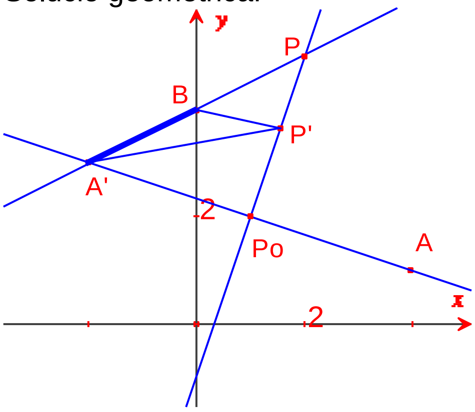
La funció a optimitzar és:
$d(x) = \sqrt{(x+7)^2 + (2x-6)^2} + \sqrt{(x+5)^2 + (2x-10)^2}$, $x \geq 0$
Calculem la seua derivada:
$$d'(x) = \frac{5x-5}{\sqrt{5x^2 - 10x + 85}} + \frac{5x-15}{\sqrt{5x^2 - 30x + 125}}$$

$d'(x) = 0$
$$\frac{x-1}{\sqrt{5x^2 - 10x + 85}} + \frac{x-3}{\sqrt{5x^2 - 30x + 125}} = 0$$
$(x-1)\sqrt{5x^2 - 30x + 125} = (x-3)\sqrt{5x^2 - 10x + 85}$
Elevant al quadrat i simplificant:
$64x = 128$
$x = 2$
$d''(2) > 0$
Aleshores, $x = 2$ és un mínim.
El punt que cerquem és $P(2, -1)$
La distància mínima és:
$d(2) = \sqrt{85} + \sqrt{85} = 2\sqrt{85}$



Problema 13
Determineu un punt P de la recta $3x - y - 1 = 0$ tal que la diferència de les distàncies als punts $A(4,1), B(0,4)$ siga màxima.

Solució geomètrica:



Notem que els punts $A(4,1), B(0,4)$ pertanyen a distint semiplànol que determina la recta $3x - y - 1 = 0$ ja que als substituir les coordenades dels dos punts en l'equació general de la recta tenen distint signe:
$3 \cdot 4 - 1 - 1 > 0, 3 \cdot 0 - 4 - 1 < 0$

El punt P és la intersecció de la recta $3x - y - 1 = 0$ i la recta que passa per B i el punt A' simètric de A respecte de la recta $3x - y - 1 = 0$, ja que si P' pertany a la recta $3x - y - 1 = 0$
La recta és mediatriu del segment $\overline{AA'}$ aleshores, $\overline{AP'} = \overline{A'P'}$

$$\overline{A'B} = \left|\overline{A'P} - \overline{BP}\right| = |\overline{AP} - \overline{BP}| = \overline{A'B} \geq |\overline{A'P'} - \overline{BP'}| = \left|\overline{AP'} - \overline{BP'}\right|$$

Calculem el punt P_0 projecció de A sobre la recta $3x - y - 1 = 0$.
El vector director de la recta $3x - y - 1 = 0$ és $v = (1,3)$
$P_0(x, 3x - 1)$
$\overrightarrow{AP_0} = (x - 4, 3x - 2)$
Els vectors $\overrightarrow{AP_0} = (x - 4, 3x - 2), v(1,3)$ són ortogonals:
$\overrightarrow{AP_0} \cdot v = 0$
$(x - 4, 3x - 2) \cdot (1,3) = 0$
$x - 4 + 9x - 6 = 0$
Resolent l'equació, $x = 1$
El punt projecció és, $P_0(1,2)$

El punt simètric $A'(x,y)$ compleix $\overrightarrow{AA'} = 2 \cdot \overrightarrow{AP_0}$
$(x - 4, y - 1) = 2 \cdot (-3,1)$
Resolent l'equació:
$\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$, aleshores, $A'(-2,3)$
$\overrightarrow{A'B} = (2,1)$
L'equació de la recta que passa per A' i B té equació:
$$r_{A'B} \equiv \frac{x - 0}{2} = \frac{y - 4}{1}$$

El punt que cerquem és la intersecció de les rectes
$$r_{A'B} \equiv \frac{x}{2} = y - 4, 3x - y - 1 = 0$$

Resolent el sistema format per ambdues rectes:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2} = y - 4 \\ 3x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$

Les coordenades del punt són $P(2,5)$

La distància mínima és, $\overline{A'B} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

Solució anàlisi matemàtica:

Siga $P(x, 3x - 1)$ un punt de la recta $3x - y - 1 = 0$

$\overline{AP} = \sqrt{(x-4)^2 + (3x-2)^2}, \overline{BP} = \sqrt{x^2 + (3x-5)^2}$

La funció a optimitzar és:

$$d(x) = \begin{cases} \sqrt{(x-4)^2 + (3x-2)^2} - \sqrt{x^2 + (3x-5)^2} & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \\ \sqrt{x^2 + (3x-5)^2} - \sqrt{(x-4)^2 + (3x-2)^2} & \text{si } x < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$d(x) = \begin{cases} \sqrt{10x^2 - 20x + 20} - \sqrt{10x^2 - 30x + 25} & \text{si } x \geq \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{10x^2 - 30x + 25} - \sqrt{10x^2 - 20x + 20} & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Calculem la seua derivada:

$$d'(x) = \begin{cases} \dfrac{10x - 10}{\sqrt{10x^2 - 20x + 20}} - \dfrac{10x - 15}{\sqrt{10x^2 - 30x + 25}} & \text{si } x \geq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{10x - 15}{\sqrt{10x^2 - 30x + 25}} - \dfrac{10x - 10}{\sqrt{10x^2 - 20x + 20}} & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$d'(x) = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{2x - 2}{\sqrt{10x^2 - 20x + 20}} = \dfrac{2x - 3}{\sqrt{10x^2 - 30x + 25}} \\ x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

La funció $d(x)$ és decreixent en $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$, $\lim_{x \to -\infty} d(x) = \frac{\sqrt{10}}{2}$

Resolent l'equació:

$x = 2$

$d"(2) < 0$

Aleshores, $x = 2$ és un màxim.

El punt que cerquem és $P(2,5)$

La diferència de distàncies màximaa és:

$d(1) = \sqrt{20} - \sqrt{5} = \sqrt{5}$