Problemes d'optimització de les Pau's de València 2003-2012

Problema 1
Siga T un triangle de perímetre 60cm.
Un dels costats del triangle T té x cm i els altres dos costats tenen la mateixa longitud.
a) Obteniu raonadament les expressions de les funcions A(x) i (f(x), essent:
A(x)=Àrea del triangle T.
$f(x) = [A(x)]^2$
Obteniu també entre quins valors pot variar x.
b) Obteniu raonadament el valor de x pel qual f(x) aconsegueix el valor màxim.
PAU, juny 2003.

Problema 2
Hem de tancar una zona de $400 m^2$ d'un prat i amb una tanca en forma de rectangle. Cada metre de tanca val 100€. Si x és la mesura en metres d'un dels costats, es demana:
a) Obteniu de forma raonada la funció f(x) siga la despesa de la tanca, i indiqueu entre quins valors pot variar x.
b) Calculeu raonadament el valor de x per al qual la funció f(x) aconsegueix el valor mínim.
PAU, setembre 2003

Problema 3
Des d'un punt N de vora mar, un nadador ha d'arribar a una boia que flota a 3 km de la costa i dista $3\sqrt{5}$ km des del punt N.
Si recorrent la vora (que se suposa recta i plana) la velocitat mitjana és de 5km/h, i nadant, de 3km/h, quan de temps haurà de caminar fins llançar-se a la mar per a arribar a la boia en el mínim temps possible?.
PAU, juny 2004.

Problema 4
Calculeu raonadament el punt de la corba $y = \frac{1}{1+x^2}$ en el qual la tangent a la corba té pendent màxim i calculeu el valor d'aquest pendent.
PAU, juny 2004.

Problema 5
Determineu raonadament la longitud dels costat del quadrat d'àrea mínima si té els vèrtexs situats sobre els costats d'un altre quadrat de costat 16cm.
PAU, Setembre 2004.

Problema 6
La concentració en sang d'un fàrmac després de la seua presa és
$C(t) = 0{,}29483t + 0.04253t^2 - 0{,}00035t^3$ mg/ml on t és el temps transcorregut en minuts.
Es demana:
a) Calculeu el període de temps durant el qual el fàrmac actua.
b) Determineu en quin instant la concentració del fàrmac és màxima.
PAU, juny 2005.

Problema 7
Proveu que el volum de qualsevol con recte inscrit en una esfera és menor que el 30% del volum de l’esfera.
PAU, Juny 2005.

Problema 8
a) El perímetre d’un sector circular de radi R és 4m.
Quants radians α ha de mesurar el seu angle central perquè la seua àrea siga màxima?.
b) L’àrea d’un altre sector circular és $1m^2$.
Per a quin radi és mínim els seu perímetre?
Nota: $\text{Perímetre} = 2R + R\alpha$, $\text{Àrea} = \frac{1}{2}\alpha R^2$.
PAU, setembre 2005.

Problema 9
El cost del marc d’una finestra rectangular és de 12,5€ per metre lineal dels costats verticals i 8€ per metre lineal dels costats horitzontals.
a) Calculeu raonadament les dimensions que ha tenir el marc d’una finestra d’ $1m^2$ de superfície perquè resulte com més econòmic millor.
b) Calculeu a més, el cost d’aquest marc com més econòmic millor considerat en a).
PAU, Juny 2006.

Problema 10
Dos pals de 3m i 4m es troben clavats verticalment a terra.
Les bases disten 5m i, en el segment que les uneix, hi ha un punt P que dista x de la base del pal més baix.
L’extrem superior de cada pal s’uneix amb P mitjançant un segment rectilini de cable.
Es demana:
a) Obteniu l’expressió f(x) de la longitud total del cable utilitzat en els dos segments.
b) Demostreu que aquesta longitud total de cable és mínima quan són iguals els valors absoluts dels pendents dels dos segments considerats. Calculeu aquesta longitud mínima.
PAU, setembre 2006.

Problema 11
Determineu les dimensions del cartell d’àrea màxima amb forma de rectangle que té dos vèrtexs subjectes a una estructura rígida parabòlica $y = 12 - x^2$, i els altres dos vèrtexs estan situats sobre l’eix OX.
PAU, juny 2007.

Problema 12
La vora d’un estany està formada per l’arc de corba $y = 4 - x^2$ d’extrems $(-2, 0)$ i $(2, 0)$ i el segment rectilini que uneix aquests dos punts.
Un sortidor està situat en el punt de coordenades $(0, 2)$.
Es demana el següent:
a) Determineu, raonadament, el punt del segment rectilini de la vora de l’estany que està més pròxim al sortidor.
b) Determineu, raonadament, els punts de l’arc de corba de la vora de l’estany que estan més pròxims al sortidor.
c) Quins són els punts de la vora de l’estany més pròxims al sortidor.
PAU, Setembre 2007.

Problema 13
Una finestra té forma de trapezi rectangular.
La base menor fa 20cm i el costat oblic fa 40cm.
Determineu l'angle α que ha de formar el costat oblic amb la base major perquè l'àrea de la finestra siga màxima.
Nota: un trapezi rectangular és un quadrilàter amb dos costats paral·lels en què un dels altres costats és perpendicular a aquests dos costats paral·lels.
PAU, Juny 2008.

Problema 14
Una empresa decideix llançar una campanya de propaganda d'un dels seus productes editant un text que ocupa 18cm^2 en fulls rectangulars impresos a una cara, amb marges superior i inferior de 2cm i laterals d'1cm.
Determineu les dimensions del full per a les quals el consum de paper siga mínim.
PAU, juny 2008.

Problema 15
Un terreny amb forma de semicercle de $\sqrt{50}\text{m}$ de radi, es dibuixa un rectangle que té dos vèrtexs sobre la semicircumferència del perímetre del terreny. Els altres dos vèrtexs del rectangle estan sobre el segment rectilini del perímetre disten x metres.
Obteniu raonadament.
a) L'àrea del rectangle en funció de x.
b) El valor de x pel al qual és màxima l'àrea del rectangle.
PAU, setembre 2008.

Problema 16
Es desitja construir una bodega amb forma de paral·lelepípede rectangular de 100m^3 de volum de manera que el llarg de la seua base siga $\frac{4}{3}$ de l'amplada.
Se sap que els preus d'un metre quadrat del sòl, del sostre i de la paret lateral, són, respectivament, $225€/\text{m}^2$, $300€/\text{m}^2$ i $256€/\text{m}^2$.
Determineu raonadament:
a) el valor x de l'amplada de la base que minimitza el cost.
b) Aquest cost.
PAU, Juny 2009

Problema 17
Un proveïdor ven un producte a un comerciant al preu de 300€ la unitat.
El comerciant incrementa la quantitat de 300€ en un 40% per a obtindre el preu de venda al públic.
El comerciant sap que a aquest preu vendrà 50 unitats cada mes i que durant el més de rebaixes per cada 3€ de reducció en el preu de venda de la unitat aconsegueix un increment de vendes de 5 unitats.
Determineu, raonadament, el nombre d'unitats que ha de demanar al proveïdor per a vendre-les en el mes de rebaixes i el preu de venda de cada unitat per maximitzar els seus beneficis durant aquest període.
PAU, juny 2009.

Problema 18
A les 7 del matí, una llanxa A està situada a 150km a l'est d'una altra llanxa B.
La llanxa A navega cap a l'oest a una velocitat de 40km/h i la llanxa B es dirigeix cap al nord a 30km/h.
Si es mantenen aquests rumbs, determineu raonadament, a quina hora estaran ambdues llanxes a distància mínima.
PAU, setembre 2009.

Problema 19
Es vol construir un estadi tancat de $10000\,m^2$ de superfície.
L'estadi està format per un rectangle de base x i dos semicercles exteriors de diàmetre x, de manera que cada costat horitzontal del rectangle és diàmetre d'un dels semicercles.
El preu d'un metre de tanca per als costats verticals del rectangle és d'1€ i el preu d'un metre de tanca per a les semicircumferències és de 2€.
Determineu raonadament:
a) La longitud del perímetre del camp en funció de x.
b) El cost f(x) de la tanca en funció de x.
c) El valor de x per tal que el cost de la tanca siga mínim.
PAU, juny 2010.

Problema 20
Dos elements d'un escut són una circumferència i un triangle.
La circumferència té centre $(0, 0)$ i radi 5. Un dels vèrtex del triangle és el punt $A(-5, 0)$. Els altres dos vèrtexs del triangle són els punts de la circumferència $B(x, y)$, $C(x, -y)$. Determineu:
a) L'àrea del triangle en funció de x.
b) Els vèrtexs B i C per als quals és màxima l'àrea del triangle.
c) el valor màxim de l'àrea del triangle.
PAU, Setembre 2010.

Problema 21
Es desitja construir un camp rectangular amb vèrtexs A, B, C, D de manera que:
Els vèrtexs A i B siguen punts de l'arc de la paràbola $y = 4 - x^2$, $-2 \le x \le 2$ i el segment $\overline{AB}$ és horitzontal.
Els vèrtexs C i D siguen punts de l'arc de la paràbola $y = x^2 - 16$, $-4 \le x \le 4$ i el segment $\overline{CD}$ és també horitzontal.
Els punts A i C han de tindre la mateixa abscissa, el valor del qual és un nombre real positiu x.
Els punts B, D han de tindre la mateixa abscissa, el valor del qual és un nombre real positiu -x.
Determineu raonadament:
a) L'expressió S(x) de l'àrea del camp rectangular en funció del nombre real positiu x.
b) El nombre real positiu x per al qual l'àrea S(x) és màxima.
c) El valor de l'àrea màxima.
PAU, juny 2011.

Problema 22

Un cotxe recorre l'arc de paràbola Γ d'equació $2y = 36 - x^2$, $-6 \le x \le 6$.
Es representa per f(x) la distància del punt $(0, 9)$ al punt (x, y) de l'arc Γ on està situat el cotxe. Determineu raonadament:
a) L'expressió de f(x)
b) Els punts de l'arc Γ on la distància f(x) té mínims relatius.
c) El valor màxim i mínim de la distància f(x).
d) L'àrea de la superfície limitada per l'arc de paràbola Γ i el segment rectilini que uneix els punts, $(-6, 0)$ i $(6, 0)$.

PAU, setembre 2011

Problema 23

Per dissenyar un escut es dibuixa un triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de vèrtexs $A(0, 12)$, $B(-x, x^2)$, $C(x, x^2)$ essent $x^2 < 12$. Determineu raonadament:

a) L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ en funció de l'abscissa x del vèrtex C.

b) Les coordenades dels vèrtexs B i C perquè l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ siga màxima.

Per a completar l'escut s'afegeix al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ d'àrea màxima la superfície S limitada entre la recta $y = 4$ i l'arc de paràbola $y = x^2$, quan $-2 \le x \le 2$
Determineu raonadament:
c) L'àrea de la superfície S.
d) L'àrea total de l'escut.

PAU, juny 2012.

Problema 24

Es vol construir un dipòsit cilíndric de $100 m^3$ de volum, obert per la part superior.
La base és un cercle en posició horitzontal de radi x i la paret vertical del dipòsit és una superfície cilíndrica perpendicular a la base.
El preu del material de la base del dipòsit és de $4€ / m^2$ i el preu del material de la part vertical és de $2€ / m^2$. Determineu raonadament:
a) L'àrea de la base en funció del seu radi x.
b) L'àrea de la paret vertical del cilindre en funció de x.
c) La funció f(x) que dóna el cost del dipòsit.
d) El valor x del radi de la base per al qual el cost del dipòsit és mínim i el valor del cost mínim

PAU, setembre 2012