Representeu la funció $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$

Continuïtat i derivabilitat:
La funció és contínua i derivable en R, ja que és una funció polinòmica.
$f'(x) = 4x^3 - 12x$. $f''(x) = 12x^2 - 12$.

Punts de tall:
Si $x = 0$, $f(0) = 5$. Punt de tall amb l'eix d'ordenades és: $(0,5)$
Si $f(x) = 0$, $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$, $x = -\sqrt{5}, -1, 1, \sqrt{5}$. Els punts de tall amb l'eix d'abscisses són: $\left(-\sqrt{5},0\right)$, $(-1,0)$, $(1,0)$, $\left(\sqrt{5},0\right)$.

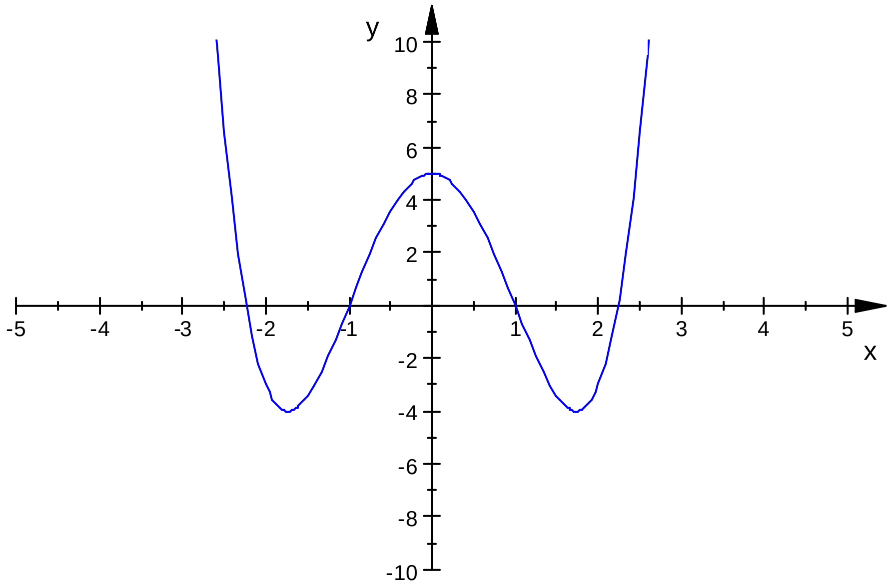
Simetria:
$f(-x) = (-x)^4 - 6(-x)^2 + 5 = x^4 - 6x^2 + 5 = f(x)$.
La funció és simètrica respecte de l'eix d'ordenades.

Monotonia i extrems locals:
La funció és estrictament creixent si $f'(x) > 0$,
$4x^3 - 12x > 0$, la funció és estrictament creixent quan $x \in \left]-\sqrt{3},0\right[\cup \left]\sqrt{3},+\infty\right[$
La funció és estrictament decreixent si $f'(x) < 0$,
$4x^3 - 12x < 0$, la funció és estrictament decreixent quan $x \in \left]-\infty,-\sqrt{3}\right[\cup \left]0,\sqrt{3}\right[$.

Si $x = -\sqrt{3}$ la funció és contínua i passa de decreixent a creixent, aleshores, és un mínim relatiu estricte. El mínim relatiu estricte és: $\left(-\sqrt{3},-4\right)$.
Si $x = 0$, la funció és contínua i passa de creixent a decreixent, aleshores, és un màxim relatiu estricte. El màxim relatiu estricte és $(0,5)$.
Si $x = \sqrt{3}$ la funció és contínua i passa de decreixent a creixent, aleshores, és un mínim relatiu estricte. El mínim relatiu estricte és: $\left(\sqrt{3},-4\right)$.

Curvatura i punts d'inflexió:
La funció és còncava si $f''(x) > 0$.
$12x^2 - 12 > 0$. La funció és còncava en l'interval $\left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$.
La funció és convexa si $f''(x) < 0$.
$12x^2 - 12 < 0$. La funció és convexa en l'interval $\left]-1,1\right[$.
Si $x = -1$ la funció és contínua i passa de còncava a convexa, aleshores és un punt d'inflexió. El punt d'inflexió és: $(-1,0)$.
Si $x = 1$ la funció és contínua i passa de convexa a còncava, aleshores és un punt d'inflexió. El punt d'inflexió és: $(1,0)$.

Asímptotes:
La funció és contínua en R per tant no té asímptotes verticals.
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Per tant, la funció no té asímptotes horitzontals.
$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Per tant, la funció no té asímptotes obliqües.



$f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$

Representeu la funció $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

Continuïtat i derivabilitat:
La funció és contínua i derivable en R, ja que és una funció polinòmica.
$f'(x) = 3x^2 - 6x$. $f''(x) = 6x - 6$.

Punts de tall:
Si $x = 0$, $f(0) = 4$. Punt de tall amb l'eix d'ordenades és: $(0,4)$
Si $f(x) = 0$, $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$, $x = -1, 2$. Els punts de tall amb l'eix d'abscisses són: $(-1,0), (2,0)$.

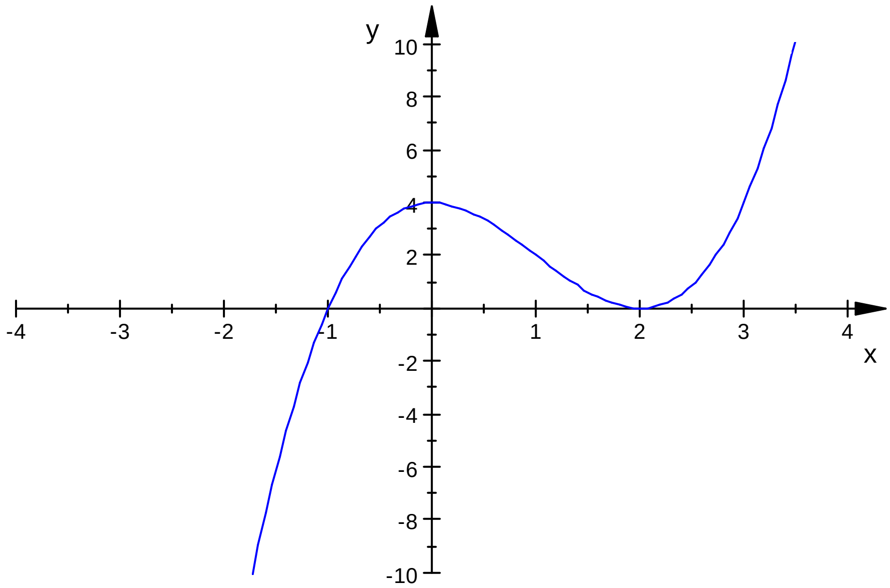
Simetria:
$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 4 = -x^3 - 3x^2 + 4$. $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$
La funció no és simètrica.

Monotonia i extrems locals:
La funció és estrictament creixent si $f'(x) > 0$,
$3x^2 - 6x > 0$, la funció és estrictament creixent quan $x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]2, +\infty\right[$
La funció és estrictament decreixent si $f'(x) < 0$,
$3x^2 - 6x < 0$, la funció és estrictament decreixent quan $x \in \left]0, 2\right[$.

Si $x = 0$ la funció és contínua i passa de creixent a decreixent, aleshores, és un màxim relatiu estricte. El màxim relatiu estricte és: $(0,4)$.
Si $x = 2$, la funció és contínua i passa de creixent a decreixent, aleshores, és un mínim relatiu estricte. El mínim relatiu estricte és $(2,0)$.

Curvatura i punts d'inflexió:
La funció és còncava si $f''(x) > 0$.
$6x - 6 > 0$. La funció és còncava en l'interval $\left]1, +\infty\right]$.
La funció és convexa si $f''(x) < 0$.
$6x - 6 < 0$. La funció és convexa en l'interval $\left]-\infty, 1\right[$.
Si $x = 1$ la funció és contínua i passa de convexa a còncava, aleshores és un punt d'inflexió. El punt d'inflexió és: $(1,2)$.

Asímptotes:
La funció és contínua en R per tant no té asímptotes verticals.
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Per tant, la funció no té asímptotes horitzontals.
$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$. Per tant, la funció no té asímptotes obliqües.



$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

Representa gràficament la funció $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

Solució:

Domini.

D(f)=$\{x\in R / x^2-1=0\}$ = $R\sim\{-1,1\}$

$x^2-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=1,-1$

Continuïtat i derivabilitat.

Anàlogament la funció és contínua i derivable en $R\sim\{-1,1\}$

$$f'(x)=\frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2},\qquad f''(x)=\frac{2x(x^4+2x^2-3)}{(x^2-1)^4}=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

$$f^{(3}(x)=\frac{-6(x^4+6x^2+6)}{(x^2-1)^4}$$

Punts de tall amb els eixos.

Eix OX.

$y=0,\quad \dfrac{x^3}{x^2-1}=0\;\; x=0$ El punt és (0,0)

Eix OY.

$x=0$, $y(0)=0$. El punt és (0,0).

Simetries.

$f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{(-x)^2-1}=\dfrac{-x^3}{x^2-1}=-\dfrac{x^3}{x^2-1}=-f(x)$ La funció és simètrica respecte de l'origen de coordenades.

Monotonia i extrems relatius.

$f'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x^4-3x^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0,\sqrt{3},-\sqrt{3}$

La funció és estrictament creixent si $f'(x)>0$,

$\dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}>0$, la funció és estrictament creixent quan $x\in\left]-\infty,-\sqrt{3}\right[\cup\left]\sqrt{3},+\infty\right[$

La funció és estrictament decreixent si $f'(x)<0$,

$\dfrac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2}<0$, la funció és decreixent en $\left]-\sqrt{3},\sqrt{3}\right[-\{-1,1\}$

Si $x=-\sqrt{3}$, $f''(-\sqrt{3})=-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}<0$ El punt $\left(-\sqrt{3},\dfrac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$ és un màxim de la funció.

Si $x=\sqrt{3}$, $f''(\sqrt{3})=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}<0$ El punt $\left(\sqrt{3},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ és un mínim de la funció.

Concavitat i punts d'inflexió.

$$f''(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x(x^2+3)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=0$$

La funció és còncava si $f''(x) > 0$.

$\dfrac{2x(x^4+2x^2-3)}{(x^2-1)^4} > 0$, la funció és còncava en $x \in \left]-1,0\right[\cup \left]1,+\infty\right[$

La funció és convexa si $f''(x) < 0$.

$\dfrac{2x(x^4+2x^2-3)}{(x^2-1)^4} < 0$, funció és convexa en $x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]0,1\right[$

Com que el punt $x = 0$ la funció és contínua i passa de ser còncava a ser convexa, el punt (0,0) és un punt d'inflexió.

Si calculem $f^{(3}(0)$ veurem també que és distint de zero.

Asímptotes

Asímptotes verticals.

$x = 1,\ x = -1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^3}{x^2-1} = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^3}{x^2-1} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x^3}{x^2-1} = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x^3}{x^2-1} = -\infty$

Asímptotes obliqües.

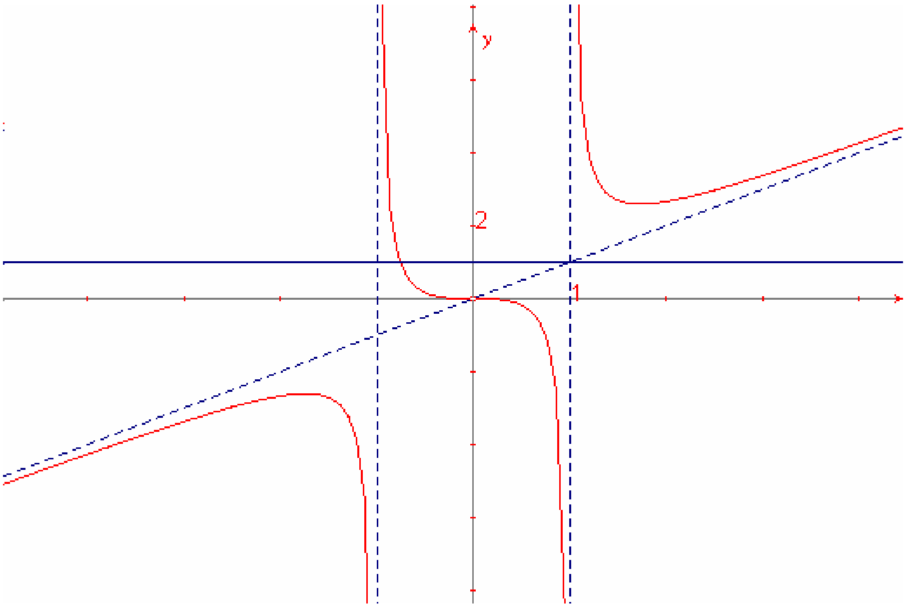
$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x(x^2-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$$

$$n = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x(x^2-1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1$$

$$n = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x \right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$$

La recta $y = x$ és asímptota obliqua (quan $x \to +\infty$ i quan $x \to -\infty$)



$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$$

Representeu la funció $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

Solució:

Continuïtat i derivabilitat:
La funció és contínua i derivable en R (notem que el denominador no s'anul·la en R).
$f'(x)=\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $f''(x)=\dfrac{-4\left(3x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$.

Punts de tall:
Si $x=0$, $f(0)=-1$. Punt de tall amb l'eix d'ordenades és: $(0,-1)$

Si $f(x)=0$, $\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=0$, $x=-1,1$. Els punts de tall amb l'eix d'abscisses són: $(-1,0)$, $(1,0)$

Simetria:
$f(-x)=\dfrac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1}=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=f(x)$. La funció és simètrica respecte de l'eix d'ordenades.

Monotonia i extrems locals:
La funció és estrictament creixent si $f'(x)>0$,
$\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}>0$, la funció és estrictament creixent quan $x\in\left]0,+\infty\right[$.
La funció és estrictament decreixent si $f'(x)<0$,
$\dfrac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}<0$, la funció és estrictament decreixent quan $x\in\left]-\infty,0\right[$.

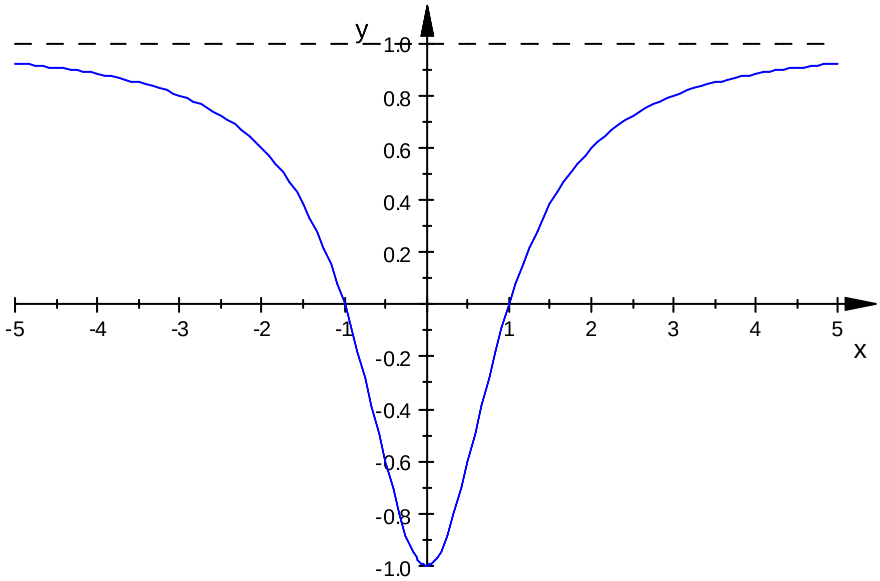
Si $x=0$, la funció és contínua i passa de decreixent a creixent, aleshores, és un mínim relatiu estricte. El mínim relatiu estricte és $(0,-1)$.

Curvatura i punts d'inflexió:
La funció és còncava si $f''(x)>0$.
$\dfrac{-4\left(3x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^3}>0$. La funció és còncava en l'interval $\left]-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right[$.
La funció és convexa si $f''(x)<0$.
$\dfrac{-4\left(3x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^3}<0$. La funció és convexa en l'interval $\left]-\infty,-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right[\cup\left]\dfrac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right]$

Si $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ la funció és contínua i passa de convexa a còncava, aleshores és un punt d'inflexió. El punt d'inflexió és: $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},-\dfrac{1}{2}\right)$.

Si $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ la funció és contínua i passa de còncava a convexa, aleshores és un punt d'inflexió. El punt d'inflexió és: $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{1}{2}\right)$.

Asímptotes:
La funció és contínua en R per tant no té asímptotes verticals.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. Per tant, recta $y=1$ és una asímptota horitzontal quan $x\to-\infty$ i quan $x\to+\infty$.



$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

Representeu la funció $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$.

Solució:

Continuïtat i derivabilitat:
La funció és contínua i derivable en $R \sim \{-1,1\}$ (notem que el denominador s'anul·la en $x=-1,1$).

$f'(x)=\frac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}$, $f''(x)=\frac{4\left(3x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$.

Punts de tall:
Si $x=0$, $f(0)=-1$. Punt de tall amb l'eix d'ordenades és: $(0,-1)$

Si $f(x)=0$, $\frac{x^2+1}{x^2-1}=0$, No té solució. No té punts de tall amb l'eix d'abscisses.

Simetria:
$f(-x)=\frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1}=\frac{x^2+1}{x^2-1}=f(x)$. La funció és simètrica respecte de l'eix d'ordenades.

Monotonia i extrems locals:
La funció és estrictament creixent si $f'(x)>0$,

$\frac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}>0$, la funció és estrictament creixent quan $x\in \left]-\infty,0\right[\sim \{-1\}$.

La funció és estrictament decreixent si $f'(x)<0$,

$\frac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}<0$, la funció és estrictament decreixent quan $x\in \left]0,+\infty\right[\sim \{1\}$.

Si $x=0$, la funció és contínua i passa de creixent a decreixent, aleshores, és un màxim relatiu estricte. El màxim relatiu estricte és $(0,-1)$.

Curvatura i punts d'inflexió:
La funció és còncava si $f''(x)>0$.

$\frac{4\left(3x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^3}>0$. La funció és còncava en l'interval $\left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,+\infty\right]$.

La funció és convexa si $f''(x)<0$.

$\frac{4\left(3x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^3}<0$. La funció és convexa en l'interval $\left]-1,1\right[$

En $x=-1,1$ no hi ha funció aleshores no són punts d'inflexió.

Asímptotes:

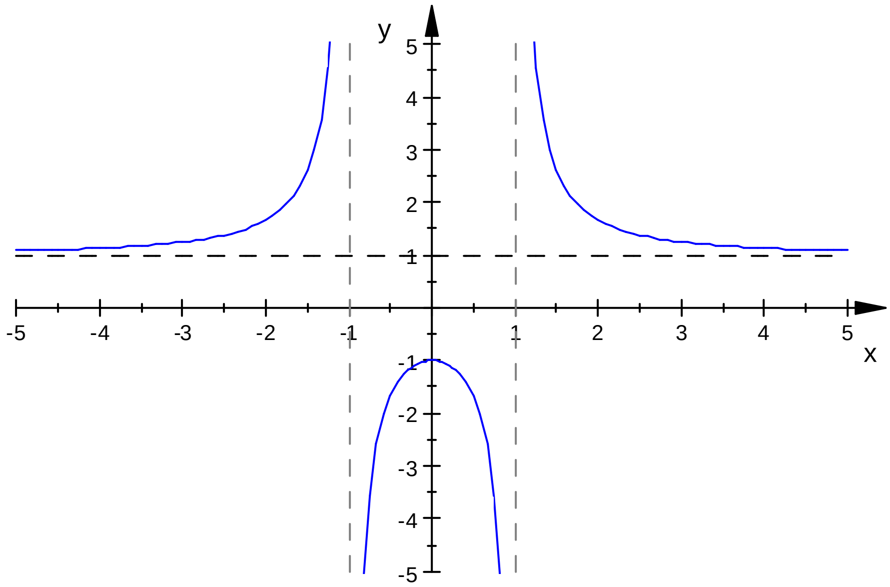
Asímptotes verticals

La recta $x=-1$ és una asímptota vertical, $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$.

La recta $x=1$ és una asímptota vertical, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$.

Asímptotes horitzontals

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$. Per tant, recta $y=1$ és una asímptota horitzontal quan $x \to -\infty$ i quan $x \to +\infty$.



$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

Representeu la funció $f(x)=x^2e^x$.

Continuïtat i derivabilitat:
La funció és contínua i derivable en R.
$f'(x)=\left(x^2+2x\right)e^x$, $f''(x)=\left(x^2+4x+2\right)e^x$

Punts de tall:
Si $x=0$, $f(0)=0$. Punt de tall amb l'eix d'ordenades és: $(0,0)$
Si $f(x)=0$, $x^2e^x=0$,. El punt de tall amb l'eix d'abscisses és: $(0,0)$.

Simetria:
$f(-x)=(-x)^2e^{-x}=x^2e^{-x}$. $f(-x)\neq f(x)$, $f(-x)\neq -f(x)$
La funció no és simètrica.

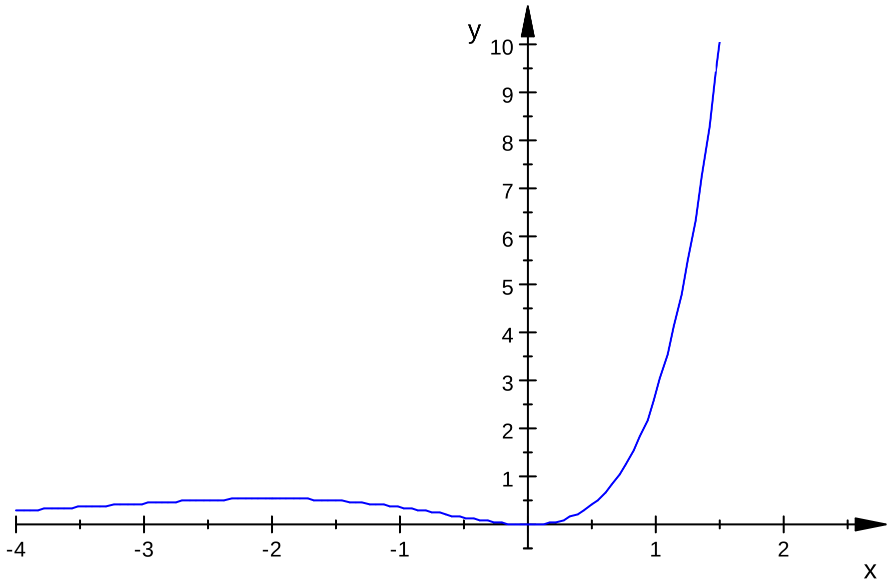
Monotonia i extrems locals:
La funció és estrictament creixent si $f'(x)>0$,
$\left(x^2+2x\right)e^x>0$, la funció és estrictament creixent quan $x\in\left]-\infty,-2\right[\cup\left]0,+\infty\right[$
La funció és estrictament decreixent si $f'(x)<0$,
$\left(x^2+2x\right)e^x<0$, la funció és estrictament decreixent quan. $x\in\left]-2,0\right[$

Si $x=-2$ la funció és contínua i passa de creixent a decreixent, aleshores, és un màxim relatiu estricte. El màxim relatiu estricte és: $\left(-2,\dfrac{4}{e^2}\right)$.
Si $x=0$, la funció és contínua i passa de decreixent a creixent, aleshores, és un mínim relatiu estricte. El mínim relatiu estricte és $(0,0)$.

Curvatura i punts d'inflexió:
La funció és còncava si $f''(x)>0$.
$\left(x^2+4x+2\right)e^x>0$. La funció és còncava en l'interval $\left]-\infty,-2-\sqrt{2}\right[\cup\left]-2+\sqrt{2},+\infty\right[$.
La funció és convexa si $f''(x)<0$.
$\left(x^2+4x+2\right)e^x<0$. La funció és convexa en l'interval $\left]-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2}\right[$.

Si $x=-2-\sqrt{2}$ la funció és contínua i passa de còncava a convexa, aleshores és un punt d'inflexió. El punt d'inflexió és: $\left(-2-\sqrt{2},\left(6+4\sqrt{2}\right)e^{-2-\sqrt{2}}\right)$
Si $x=-2+\sqrt{2}$ la funció és contínua i passa de convexa a còncava, aleshores és un punt d'inflexió. El punt d'inflexió és: $\left(-2+\sqrt{2},\left(6-4\sqrt{2}\right)e^{-2+\sqrt{2}}\right)$

Asímptotes:
La funció és contínua en R per tant no té asímptotes verticals.
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=x^2e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}=\dfrac{2x}{-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}=\dfrac{2}{e^{-x}}=0$.
Per tant $y=0$ és una asímptota horitzontal quan $x\to-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. La funció no té asímptota horitzontal quan $x\to+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$. Per tant, la funció no té asímptota obliqua quan $x\to+\infty$.



$f(x) = x^2 e^x$

Representeu la funció $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$

Domini.

D(f)={$x \in R / x^2 - 5x + 6 > 0$} = $R \sim [2,3]$

Continuïtat i derivabilitat.

Anàlogament la funció és contínua i derivable en $R \sim [2,3]$

$$f'(x) = \frac{2x-5}{x^2-5x+6}, \quad f''(x) = \frac{-2x^2+10x-13}{(x^2-5x+6)^2}$$

Punts de tall amb els eixos.

Eix OX.

$f(x) = 0 \quad \ln(x^2 - 5x + 6) = 0 \quad x^2 - 5x + 6 = 1$ Els punts són $\left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$, $\left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}, 0\right)$

Eix OY.

$x = 0$, $f(0) = \ln(6)$. El punt és $(0, \ln(6))$.

Simetries.

$f(-x) = \ln\left((-x)^2 - 5(-x) + 6\right) = \ln(x^2 + 5x + 6)$. $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$

La funció no és simètrica.

Monotonia i extrems relatius.

La funció és estrictament creixent si $f'(x) > 0$,

$\dfrac{2x-5}{x^2-5x+6} > 0$, la funció és estrictament creixent quan $x \in \left]-\infty, -2\right[$

La funció és estrictament decreixent si $f'(x) < 0$,

$\dfrac{2x-5}{x^2-5x+6} < 0$, la funció és decreixent en $\left]3, +\infty\right[$.

La funció no té extrems locals.

Concavitat i punts d'inflexió.

La funció és còncava si $f''(x) > 0$.

$\dfrac{-2x^2+10x-13}{(x^2-5x+6)^2} > 0$ no té solució

La funció és convexa si $f''(x) < 0$.

$\dfrac{-2x^2+10x-13}{(x^2-5x+6)^2} < 0$, funció és convexa en $R \sim [2,3]$

La funció no té punts d'inflexió.

Asímptotes

Asímptotes verticals.

$x = 2$, $x = 3$

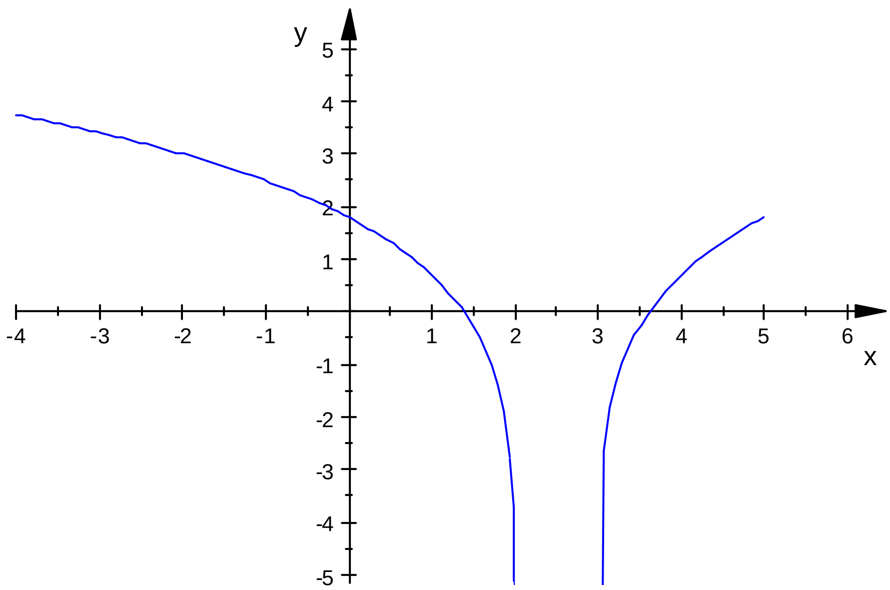
$\lim\limits_{x\to 2^+} \ln(x^2 - 5x + 6)$ no existeix $\quad \lim\limits_{x\to 2^-} \ln(x^2 - 5x + 6) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 3^-} \ln(x^2 - 5x + 6)$ no existeix $\quad \lim\limits_{x\to 3^+} \ln(x^2 - 5x + 6) = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Per tant, la funció no té asímptotes horitzontals.

$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, $n = \lim_{x\to-\infty} f(x) - 0x = +\infty$. Per tant, la funció no té asímptota obliqua quan $x \to -\infty$.

$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, $n = \lim_{x\to+\infty} f(x) - 0x = +\infty$. Per tant, la funció no té asímptota obliqua quan $x \to +\infty$.



$f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$