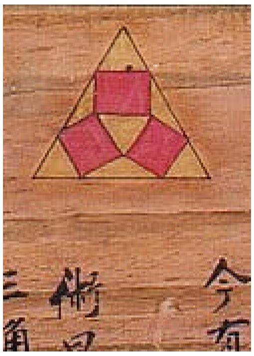
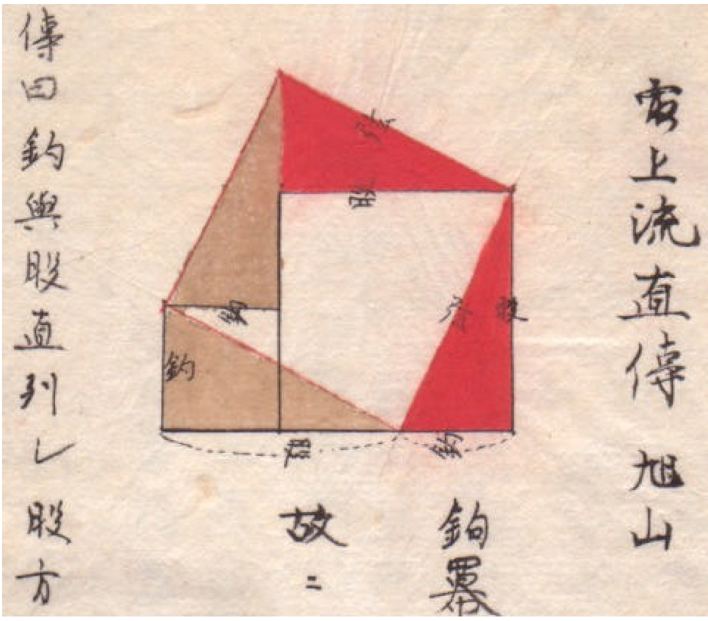
10 problemes Sangaku amb triangles





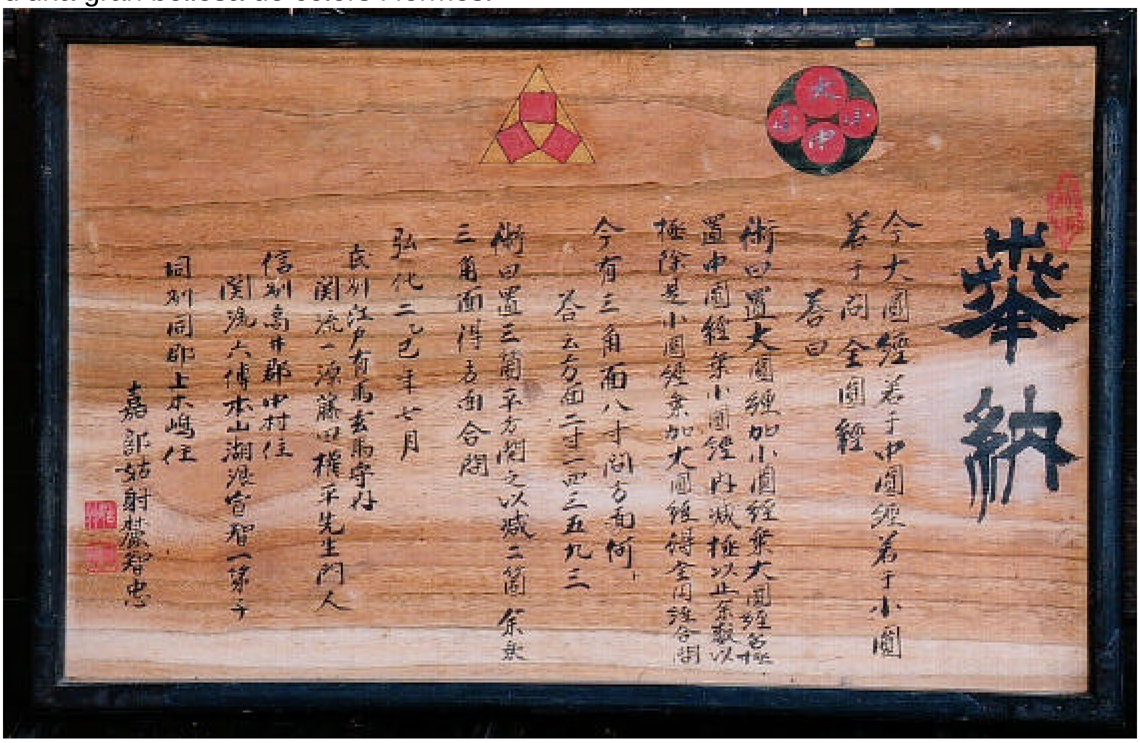
Ricard Peiró i Estruch

Gener 2009

Introducció

Els Sangaku són unes taules de fusta amb enunciats de problemes de geometria euclídea creats al Japó en el període Edo 1603-1867. En aquest període el Japó estava aïllat d'occident. Aquestes taules estaven exposades als temples budistes.

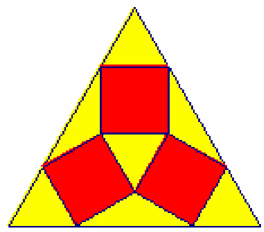
Els 10 problemes escollits pertanyen a taules de la prefectura de Nagano i la seua temàtica principal són triangles. Els problemes són de distint grau de complexitat i d'una gran bellesa de colors i formes.



Enunciats

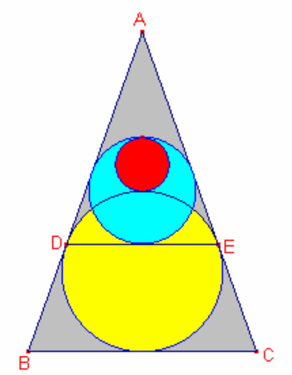
Problema 1

La següent figura està formada per 1 triangle equilàter i 3 quadrats iguals. El costat del triangle equilàter és a. Calculeu el costat del quadrat.



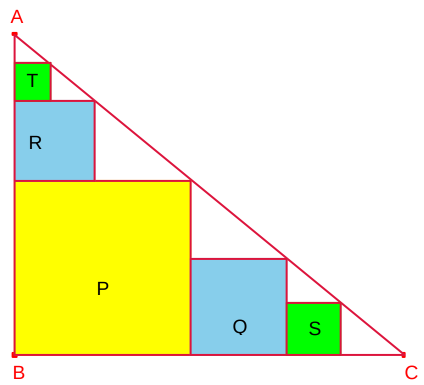
Problema 2

Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB} = \overline{AC}$. Siga la seua circumferència inscrita de centre O_1 i radi r_1. Siguen D, E els punts de tangència de la circumferència inscrita i els costats $\overline{AB}, \overline{AC}$ del triangle. Siga la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ADE}$ de centre O_2 i radi r_2. Considerem la circumferència de centre O_3 i radi r_3. Determineu el valor de r_2 en termes de r_3.



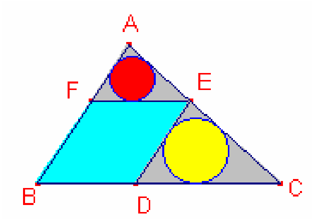
Problema 3

En el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $B = 90^o$, s'han inscrit els quadrats P, Q, R, S, T (veure figura). Si els costats dels quadrats S, T són a, b, respectivament, calculeu el costat del quadrat P.



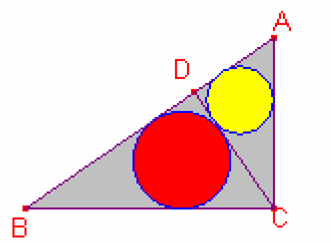
Problema 4

El rombe BDEF està inscrit en el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$. Siga r el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{AFE}$ i s el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{DCE}$. Determineu r en funció de s i dels costats a, c.



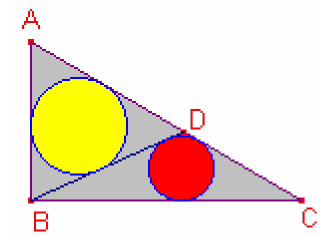
Problema 5

En el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $C = 90^o$, siga $\overline{CD}$ l'altura sobre la hipotenusa.
Siguen coneguts els catets del triangle. Determineu els radis de les circumferències inscrites als triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADC}$, $\overset{\Delta}{BCD}$.



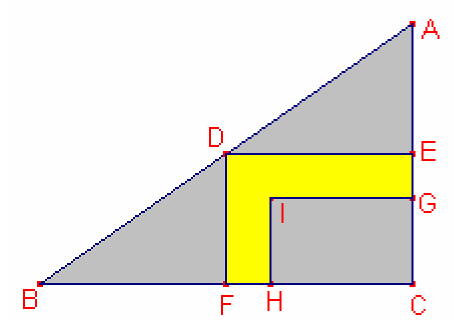
Problema 6

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $B = 90º$. Siga D un punt de la hipotenusa $\overline{AC}$. Siga r_1 el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ i r_2 el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{BCD}$. Determineu el radi r_1 en funció de r_2 i dels catets $a = \overline{BC}$ i $c = \overline{AB}$.



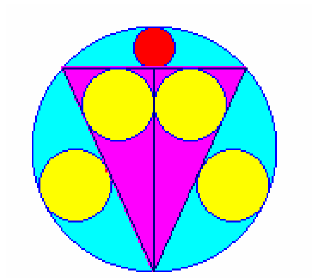
Problema 7

Donat el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90º$, tal que els triangles $\overset{\Delta}{ADE}$, $\overset{\Delta}{DAF}$, i el rectangle HCGI tenen la mateixa àrea. Si $x = \overline{FH} = \overline{GE}$, determineu x en funció dels catets del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$.



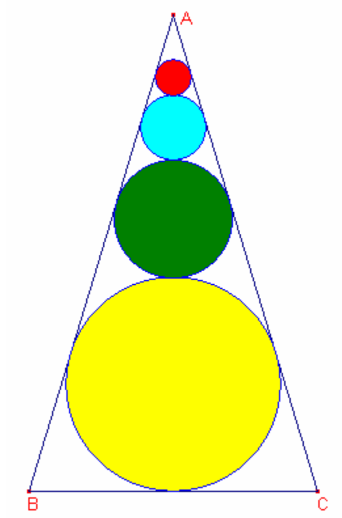
Problema 8

En la següent figura el triangle és isòsceles i està inscrit en una circumferència de radi R. Hi ha 4 circumferències iguals de radi r i una circumferència més menuda de radi s.
Calculeu els radis de les circumferències r i s en funció de R radi de la circumferència major.



Problema 9

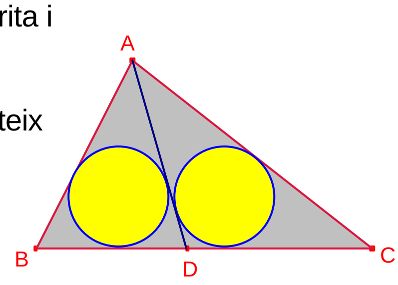
Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB} = \overline{AC} = a$ constant. Siga la seua circumferència inscrita de centre O_1 i radi r_1. Una circumferència de centre O_2 i radi r_2 és tangent als costats del triangle $\overline{AB}, \overline{AC}$ i tangent exterior al la circumferència anterior. Així es construeixen n circumferència.
Si n és constant i $x = \overline{BC}$ variable.
Per a quin valor de x el radi r_n és màxim.



Problema 10

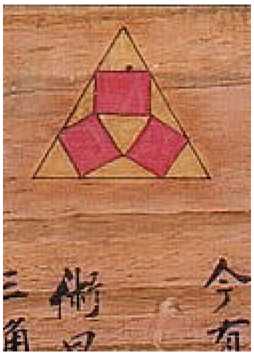
Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ qualsevol i r el radi de la circumferència inscrita i h_a .l'altura sobre el costat $\overline{BC}$.

Les circumferències inscrites als triangles $\overset{\Delta}{ABD}$, $\overset{\Delta}{ADC}$ tenen el mateix radi r_1.
Determineu r_1 en termes de r i h_a.

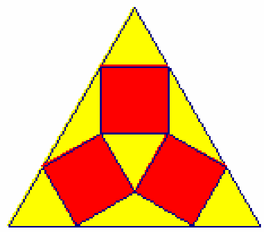


Solucions

Problema 1



La següent figura està formada per 1 triangle equilàter i 3 quadrats iguals. El costat del triangle equilàter és a. Calculeu el costat del quadrat.



Solució:

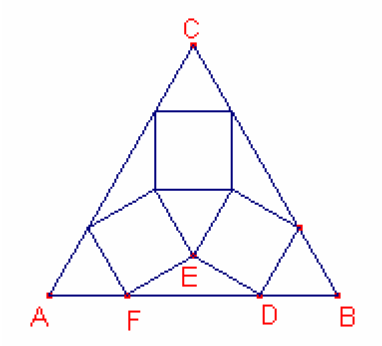
Siga el triangle equilàter $\overset{\Delta}{ABC}$ de costat a.

Siga $x = \overline{DE} = \overline{BD}$ costat del quadrat.

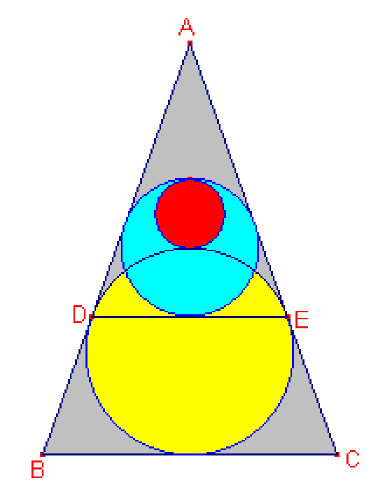
$\angle EDF = 30^{o}$. Aleshores, $\overline{DF} = \sqrt{3}x$.

$a = 2x + \sqrt{3}x = \left(2 + \sqrt{3}\right)x$.

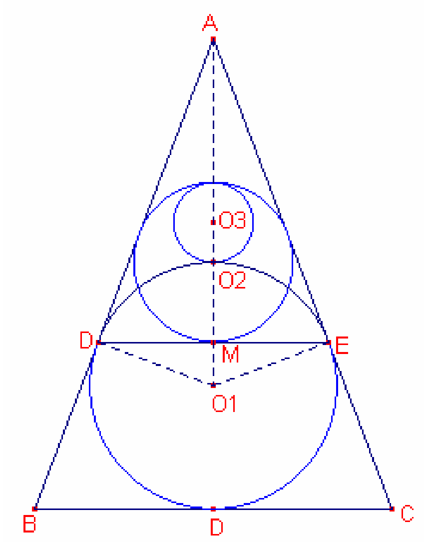
Aleshores, $x = \left(2 - \sqrt{3}\right)a$.



Problema 2



Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB} = \overline{AC}$. Siga la seua circumferència inscrita de centre O_1 i radi r_1. Siguen D, E els punts de tangència de la circumferència inscrita i els costats $\overline{AB}, \overline{AC}$ del triangle. Siga la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ADE}$ de centre O_2 i radi r_2. Considerem la circumferència de centre O_3 i radi r_3. Determineu el valor de r_2 en termes de r_3.



Solució:
Siga H el punt mig del costat $\overline{BC}$.
Siga M el punt mig del segment $\overline{DE}$.
Siga $\alpha = \angle DAM = \angle MDO_1$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{MDO_1}$:

$\overline{DM} = r_1 \cos\alpha$. Per tant, $\overline{DE} = 2r_1 \cos\alpha$. $\overline{MO_1} = r_1 \sin\alpha$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ADO_1}$:

$$\overline{AO_1} = \frac{r_1}{\sin\alpha},\quad \overline{AD} = \frac{r_1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Aleshores,

$$\overline{AM} = \overline{AO_1} - \overline{MO_1} = \frac{r_1}{\sin\alpha} - r_1 \sin\alpha .$$

Calculant l'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADE}$:

$$S_{ADE} = \frac{1}{2}\overline{DE}\cdot\overline{AM} = \frac{1}{2}2r_1\cos\alpha\cdot\left(\frac{r_1}{\sin\alpha} - r_1\sin\alpha\right) = r_1^2\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \sin\alpha\cos\alpha\right).$$

$$S_{ADE} = \frac{1}{2}\left(2\overline{AD} + \overline{DE}\right)r_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2r_1}{\operatorname{tg}\alpha} + 2r_1\cos\alpha\right)r_2 = r_1 r_2\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \cos\alpha\right).$$

Igualant les àrees:

$$r_1^2\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \sin\alpha\cos\alpha\right) = r_1 r_2\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \cos\alpha\right).$$ Simplificant:

$$r_1\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \sin\alpha\cos\alpha\right) = r_2\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \cos\alpha\right).$$

Aïllant r_2:

$$r_2 = \frac{\cos\alpha - \sin^2\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}r_1 = \frac{1-\sin^2\alpha}{1+\sin\alpha}r_1 = (1-\sin\alpha)r_1 .$$

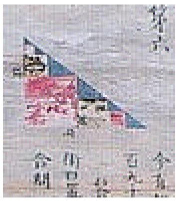
Aleshores,

$r_2 = (1 - \sin\alpha) r_1 = r_1 - \overline{MO_1}$.

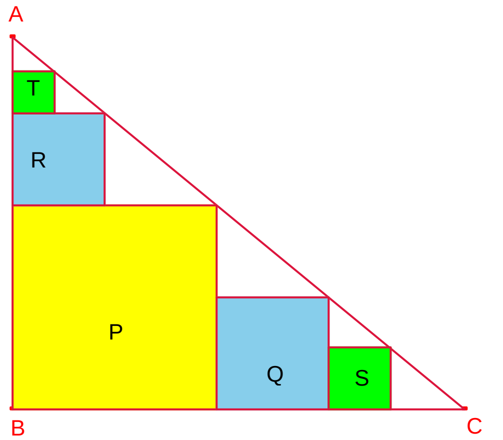
Aleshores, el centre de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ADE}$ pertany a la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Aleshores, $r_2 = 2r_3$.

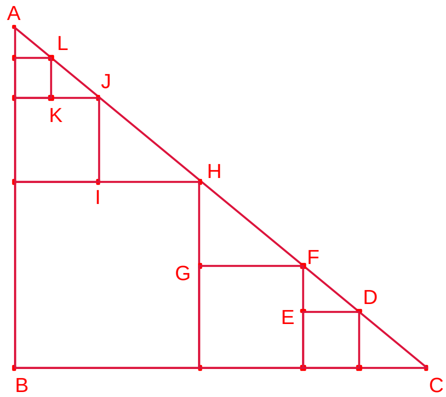
Problema 3



En el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $B = 90^o$, s'han inscrit els quadrats P, Q, R, S, T (veure figura). Si els costats dels quadrats S, T són a, b, respectivament, calculeu el costat del quadrat P.



Solució:
Siga x el costat del quadrat P.
Siga y el costat del quadrat Q.
Siga z el costat del quadrat R.



Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{DEF}$, $\overset{\Delta}{FGH}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\dfrac{a}{y-a} = \dfrac{y}{x-y}$. Aleshores, $y^2 = ax$ (1)

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{FGH}$, $\overset{\Delta}{HIJ}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\dfrac{y}{x-y} = \dfrac{x-z}{z}$. Aleshores, $z = x - y$ (2)

Els triangles rectangles $\overset{\Delta}{JKL}$, $\overset{\Delta}{HIJ}$ són semblants. Aplicant el teorema de Tales:

$\dfrac{x-z}{z} = \dfrac{z-b}{b}$. Aleshores, $b(x-z) = z(z-b)$ (3)

Substituint l'expressió (2) en l'expressió (3):

$b(x - x - y) = (x - y)(x - y - b)$.

$y^2 - 2xy + x^2 - bx = 0$. Resolent l'equació en la incògnita y:

$y = x - \sqrt{bx}$ (4)

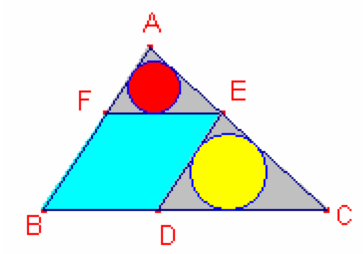
Igualant les expressions (1) i (4):

$ax = \left(x - \sqrt{bx}\right)^2$. Resolent l'equació en la incògnita x:

$x = a + b + 2\sqrt{ab}$.

Problema 4

El rombe BDEF està inscrit en el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ siga r el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{AFE}$ i s el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{DCE}$. Determineu r en funció de s i dels costats a, c.



Solució:

Siga $x = \overline{BD} = \overline{BF}$ el costat del rombe.

Els triangles $\overset{\Delta}{AFE}$, $\overset{\Delta}{DCE}$ són semblants aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{r}{s} = \frac{x}{a-x}, \text{ aleshores, } r = \frac{x}{a-x}s \qquad (1)$$

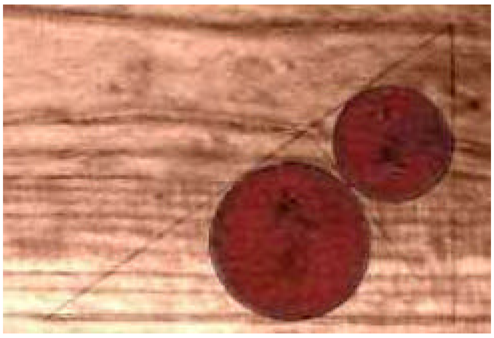
Els triangles $\overset{\Delta}{AFE}$, $\overset{\Delta}{ABC}$ són semblants aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{x}{a} = \frac{c}{c-x}, \text{ aleshores, } x = \frac{ac}{a+c} \qquad (2)$$

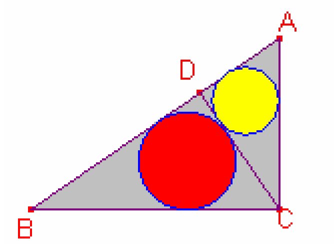
Substituint l'expressió (2) en l'expressió (1) i simplificant:

$$r = \frac{cs}{a}.$$

Problema 5



En el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $C = 90^o$, siga $\overline{CD}$ l'altura sobre la hipotenusa. Siguen coneguts els catets del triangle. Determineu els radis de les circumferències inscrites als triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADC}$, $\overset{\Delta}{BCD}$.



Solució:

Siguen els catets $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$

Siguen r, s els radis de les circumferències inscrites als triangles rectangles $\overset{\Delta}{ADC}$, $\overset{\Delta}{BCD}$, respectivament.

Aplicant el teorema del catet al triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$:

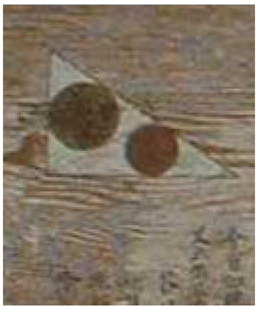
$b^2 = \overline{AH} \cdot c$, aleshores, $\overline{AH} = \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$. $a^2 = \overline{BH} \cdot c$, aleshores, $\overline{BH} = \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

El radi de la circumferència inscrita a un triangle rectangle és igual al semiperímetre menys la hipotenusa, aleshores:

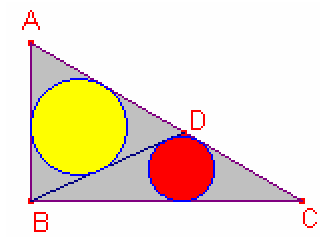
$$r = \frac{\overline{AC}+\overline{AD}+\overline{CD}}{2} - \overline{AC}, \quad r = \frac{b + \dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} + \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}{2} - b = \frac{-b\sqrt{a^2+b^2}+b^2+ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Anàlogament, $s = \dfrac{-a\sqrt{a^2+b^2}+a^2+ab}{2\sqrt{a^2+b^2}}$.

Problema 6

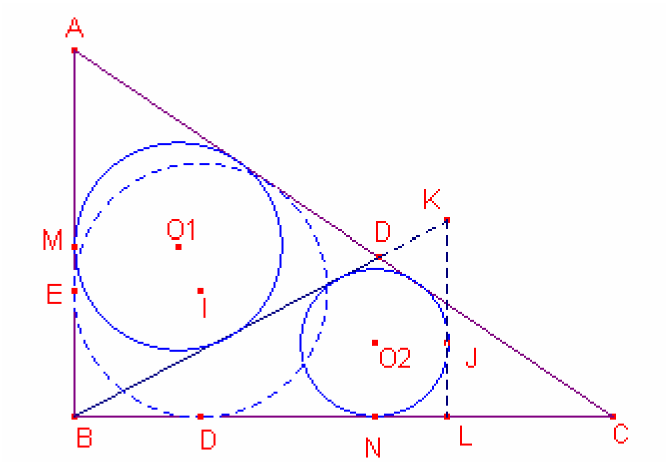


Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $B = 90^{\circ}$. Siga D un punt de la hipotenusa $\overline{AC}$. Siga r_1 el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ i r_2 el radi de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{BCD}$. Determineu el radi r_1 en funció de r_2 i dels catets $a = \overline{BC}$ i $c = \overline{AB}$.



Solució:

Siga O_1 el centre de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ de radi r_1.
Siga O_2 el centre de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ de radi r_2.
Considerem la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ de centre I i radi r.
Siga D, E els punts de tangència de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i els costats a, c respectivament.
Siga M el punt de tangència de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$ i el costat c.



Siga N el punt de tangència de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{BCD}$ i el costat a.

Els triangles $\overset{\Delta}{AMO_1}$, $\overset{\Delta}{AEI}$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{AM}}{c-r} = \frac{r_1}{r}. \text{ Aleshores, } \overline{AM} = \frac{r_1(c-r)}{r}. \quad \overline{BM} = c - \frac{r_1(c-r)}{r} \qquad (1)$$

Els triangles $\overset{\Delta}{CNO_2}$, $\overset{\Delta}{CDI}$ són semblants, aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{CN}}{a-r} = \frac{r_2}{r}. \text{ Aleshores, } \overline{CN} = \frac{r_2(a-r)}{r}. \quad \overline{BN} = a - \frac{r_2(a-r)}{r} \qquad (2)$$

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{BLK}$, $L = 90^{\circ}$ tal que la circumferència de centre O_2 i radi r_2 és inscrita al triangle. Siga J el punt de tangència del costat $\overline{KL}$ i la circumferència.

$\overline{BK} = \overline{BN} + \overline{KJ}$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{BLK}$:

$\left(\overline{BN} + \overline{KJ}\right)^2 = \left(\overline{BN} + r_2\right)^2 + \left(\overline{KJ} + r_2\right)^2$. Aïllant $\overline{KJ}$.

$$\overline{KJ}=\frac{\left(\overline{BN}+r_2\right)r_2}{\overline{BN}-r_2} \qquad (3)$$

Substituint l'expressió (1) en l'expressió (3):

$$\overline{KJ}=\frac{r_2\left(ar-ar_2+2r_2r\right)}{a(r-r_2)} \qquad (4)$$

Els triangles $\overset{\Delta}{BMO_1}$, $\overset{\Delta}{KJO_2}$ són semblants aplicant el teorema de Tales:

$$\frac{\overline{BM}}{r_1}=\frac{\overline{KJ}}{r_2} \qquad (5)$$

Substituint les expressions (1) (4) en l'expressió (5):

$$\frac{\dfrac{cr-r_1(c-r)}{r}}{r_1}=\frac{\dfrac{r_2(ar-ar_2+2r_2r)}{a(r-r_2)}}{r_2}.$$

Simplificant:

$$ac\left(r^2-rr_1-rr_2+r_2r_1\right)=2r^2r_2r_1 \qquad (6)$$

Aïllant r_1

$$r_1=\frac{ac\left(r^2-rr_2\right)}{2r^2r_2+ac(r-r_2)} \qquad (7)$$

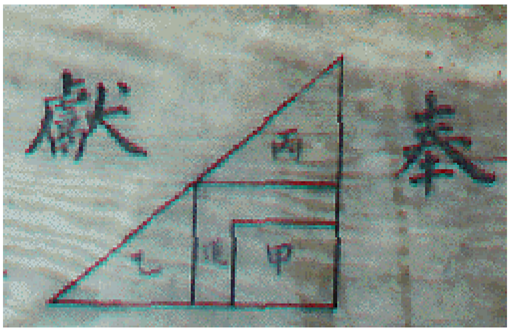
El radi de la circumferència inscrita del triangle rectangle és igual al semiperímetre menys la hipotenusa:

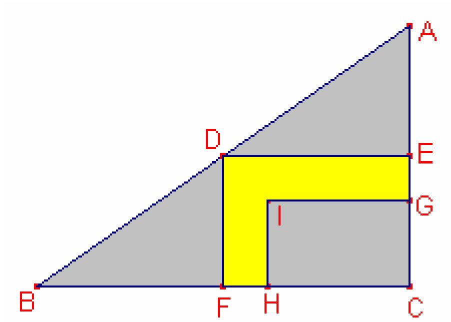
$$r=\frac{a+c+\sqrt{a^2+c^2}}{2}-\sqrt{a^2+c^2}=\frac{a+c-\sqrt{a^2+c^2}}{2} \qquad (8)$$

Substituint l'expressió (8) en l'expressió (7) i simplificant:

$$r_1=\frac{ac\left(a+c-2r_2-\sqrt{a^2+c^2}\right)}{2\left(ac-2r_2\sqrt{a^2+c^2}\right)}.$$

Problema 7





Donat el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90º$, tal que els triangles $\overset{\Delta}{ADE}$, $\overset{\Delta}{DAF}$, i el rectangle HCGI tenen la mateixa àrea. Si $x = \overline{FH} = \overline{GE}$, determineu x en funció dels catets del triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$.

Solució:
Siga $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$.
Si els triangles $\overset{\Delta}{ADE}$, $\overset{\Delta}{DAF}$ tenen la mateixa àrea, aleshores, $\overline{BF} = \frac{1}{2}a$, $\overline{AE} = \frac{1}{2}b$.

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ADE}$ és $S_{ADE} = \frac{ab}{8}$.

$\overline{HC} = \frac{a}{2} - x$, $\overline{CG} = \frac{b}{2} - x$.

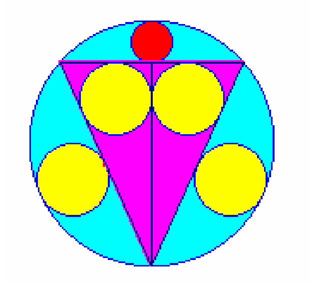
L'àrea del rectangle HCGI és:

$S_{HXGI} = \left(\frac{a}{2} - x\right)\left(\frac{b}{2} - x\right)$, $S_{HXGI} = S_{ADE}$. Aleshores:

$\left(\frac{a}{2} - x\right)\left(\frac{b}{2} - x\right) = \frac{ab}{8}$. Resolent l'equació en la incògnita x:

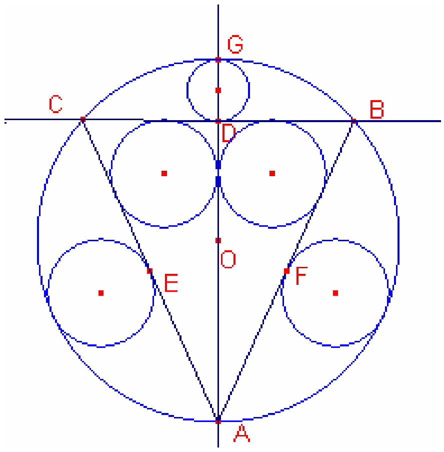
$$x = \frac{a + b - \sqrt{a^2 + b^2}}{4}.$$

Problema 8



En la següent figura el triangle és isòsceles i està inscrit en una circumferència de radi R. Hi ha 4 circumferències iguals de radi r i una circumferència més menuda de radi s.
Calculeu els radis de les circumferències r i s en funció de R radi de la circumferència major.

Solució:



Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$ $a = \overline{BC}$, $b = \overline{AB} = \overline{AC}$.
Siga $h = \overline{AD}$ altura del triangle. Siga $\overline{OE} = R - 2r$.

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AEO}$:

$$R - 2r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} \qquad (1)$$

Els triangles $\overset{\Delta}{AGC}$ i $\overset{\Delta}{ABD}$ són semblants, aplicant el teorema de Tales: $\frac{b}{2R} = \frac{h}{b}$, aleshores, $h = \frac{b^2}{2R}$ (2)

$$\frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{\sqrt{(2R)^2 - b^2}}{2R}, \text{ aleshores, } a = \frac{b}{R}\sqrt{(2R)^2 - b^2} \qquad (3)$$

Considerem el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ACD}$ i la seua circumferència inscrita de radi r.

Aleshores, $r = \frac{h + \frac{a}{2} - b}{2}$ (4)

Substituint les expressions (2), (3) en l'expressió (4):

$$2r = \frac{b^2}{2R} + \frac{b}{2R}\sqrt{(2R)^2 - b^2} - b \qquad (5)$$

Substituint l'expressió (5) en l'expressió (1):

$$R - \left(\frac{b^2}{2R} + \frac{b}{2R}\sqrt{(2R)^2 - b^2} - b\right) = \sqrt{R^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} \qquad (6)$$

Elevant al quadrat i simplificant:

$2b^2 - 2Rb - 3R^2 = 0$. Resolent l'equació en la incògnita b:

$$b = \frac{1+\sqrt{7}}{2}R \qquad (7)$$

Substituint l'expressió (7) en l'expressió (1)

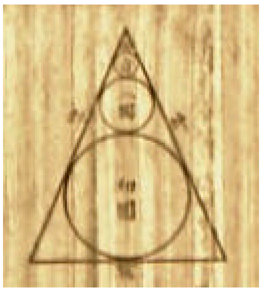
$$R - 2r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{1+\sqrt{7}}{4}R\right)^2}$$

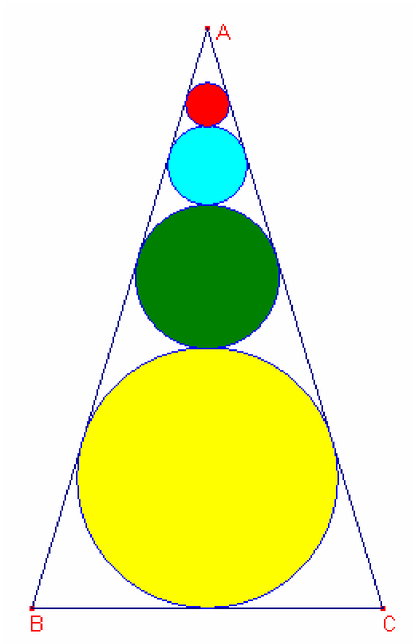
Aleshores, $2r = R - R\sqrt{\dfrac{8-2\sqrt{7}}{16}}$, $r = \dfrac{5-\sqrt{7}}{8}R$.

$h + 2s = 2R$. Aleshores, $2s = 2R - h = 2R - \dfrac{b^2}{2R} = 2R - \dfrac{\left(\frac{1+\sqrt{7}}{2}R\right)^2}{2R} = \dfrac{4-\sqrt{7}}{4}R$,

aleshores, $s = \dfrac{4-\sqrt{7}}{8}R$.

Problema 9

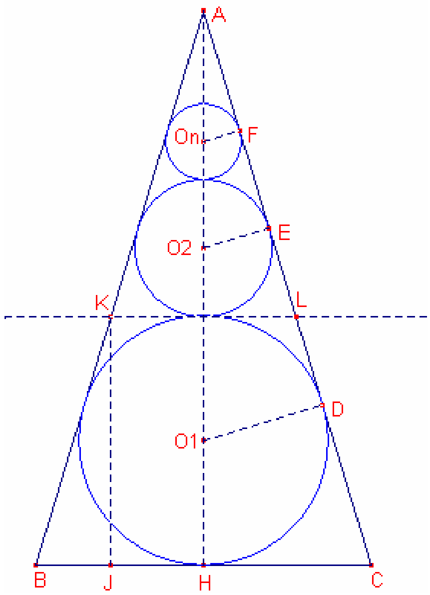




Siga el triangle isòsceles $\overset{\Delta}{ABC}$, $\overline{AB} = \overline{AC} = a$ constant.
Siga la seua circumferència inscrita de centre O_1 i radi r_1. Una circumferència de centre O_2 i radi r_2 és tangent als costats del triangle $\overline{AB}, \overline{AC}$ i tangent exterior al la circumferència anterior. Així es construeixen n circumferències.
Si n és constant i $x = \overline{BC}$ variable.
Per a quin valor de x el radi r_n és màxim.

Solució:
Siga H el punt mig del costat $\overline{BC}$.

Siga D el punt de tangència de la circumferència inscrita al triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ i el costat $\overline{AC}$.
Siguen E, F les tangents de les altres circumferències.
Considerem la recta tangent a les dues primeres circumferències que talla el costat $\overline{AB}$ en el punt K. Siga J la projecció de K sobre el costat $\overline{BC}$.



$$\overline{AD} = \frac{2a+x}{2}, \quad \overline{CH} = \overline{CD} = \frac{x}{2}$$

$$\overline{AH} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{AO_1D}$:

$$\left(\sqrt{a^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} - r_1\right)^2 = r_1^{\,2} + \left(\frac{2a+x}{2}\right)^2.$$

Aleshores, $r_1 = \dfrac{x\sqrt{2a-x}}{2\sqrt{2a+x}}$ (1)

$$\overline{KL} = \overline{DE}$$

$$\overline{BJ} = \frac{\overline{BC} - \overline{KL}}{2} = \frac{x - \overline{DE}}{2}, \quad \overline{LC} = \overline{KB} = \overline{CD} + \frac{\overline{DE}}{2} = \frac{x + \overline{DE}}{2}.$$

Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle $\overset{\Delta}{KJB}$:

$$\left(\frac{x - \overline{DE}}{2}\right)^2 + (2r_1)^2 = \left(\frac{x + \overline{DE}}{2}\right)^2.$$

Aleshores, $\overline{DE} = \dfrac{4r_1^{\,2}}{x}$ (2)

Siga h l'altura sobre el costat $\overline{BC}$ del triangle

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AD} - \overline{DE}}{\overline{AD}}.$$

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{h-2r_1}{h} = \frac{h-2r_1-2r_2}{h-2r_1} = \frac{r_3}{r_2}$$

Aleshores:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_3}{r_2} = \frac{r_4}{r_3} = ... = \frac{r_n}{r_{n-1}} = \frac{\overline{AD} - \overline{DE}}{\overline{AD}} \qquad (3)$$

$$\frac{\overline{AD} - \overline{DE}}{\overline{AD}} = \frac{\dfrac{2a-x}{2}}{\dfrac{2a-x}{2} - \dfrac{4r_1^{\,2}}{x}} = \frac{x(2a-x)}{x(2a-x) - 8r_1^{\,2}} = \frac{x(2a-x)}{x(2a-x) - 8\left(\dfrac{x(2a-x)}{2(2a+x)}\right)^2} = \frac{2a-x}{2a+x}$$

Multiplicant les n-1 primeres igualtats de (3):

$$\frac{r_n}{r_1} = \left(\frac{2a-x}{2a+x}\right)^{n-1}$$

$$r_n = r_1\left(\frac{2a-x}{2a+x}\right)^{n-1} = \frac{x\sqrt{2a-x}}{2\sqrt{2a+x}}\left(\frac{2a-x}{2a+x}\right)^{n-1} = \frac{x}{2}\left(\frac{2a-x}{2a+x}\right)^{n-\frac{1}{2}}.$$

Calculem la derivada de r_n respecte de la variable x:

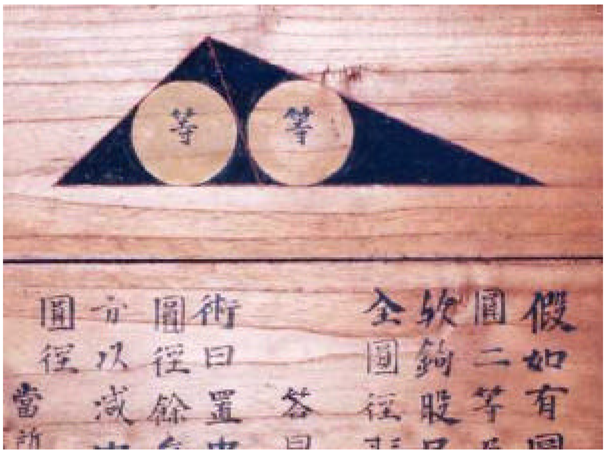
$$\frac{d(r_n)}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{2a-x}{2a+x}\right)^{n-\frac{1}{2}} + \frac{x}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2a-x}{2a+x}\right)^{n-\frac{3}{2}} \frac{-4a}{(2a+x)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2a-x}{2a+x}\right)^{n-1}\left(\frac{-x^2 - 4a\left(n-\frac{1}{2}\right)x + 4a^2}{(2a-x)(2a+x)}\right)$$

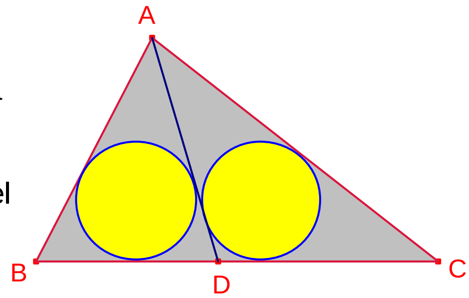
$$\frac{d(r_n)}{dx} = 0 \text{, si } -x^2 - 4a\left(n-\frac{1}{2}\right)x + 4a^2 = 0$$

Resolent l'equació:

$$x = \left(\sqrt{(2n-1)^2+4} - (2n-1)\right)a.$$

Problema 10





Siga el triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ qualsevol i r el radi de la circumferència inscrita i h_a .l'altura sobre el costat $\overline{BC}$.

Les circumferències inscrites als triangles $\overset{\Delta}{ABD}$, $\overset{\Delta}{ADC}$ tenen el mateix radi r_1.

Determineu r_1 en termes de r i h_a.

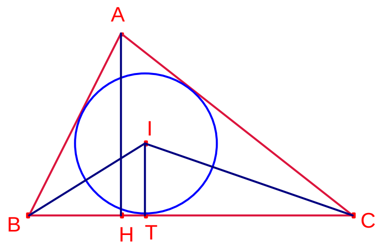
Solució:

Vegem primer la relació entre el radi d'una circumferència inscrita a un triangle i l'altura.

Siga p el semiperímetre. Igualant les fórmules de les àrees:

$$pr = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,,\quad \frac{ah}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\,.$$

Aleshores, $r = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$, $h_a = \dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$.



Siga T el punt de tangència de la circumferència inscrita i el costat $\overline{BC}$.

$$\overline{BT} = p-b\,,\ \overline{CT} = p-c\,,.\ \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{r}{p-b}\,,\ \operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r}{p-c}\,.$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{r^2}{(p-a)(p-b)} = \frac{p-a}{p} = 1-\frac{a}{p}.\quad 1-\frac{2r}{h_a} = 1+\frac{2\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}}{\dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}} = 1-\frac{a}{p}.$$

Aleshores, $1-\dfrac{2r}{h_a} = \operatorname{tg}\dfrac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}$ (1)

Aplicant la propietat anterior al triangle $\overset{\Delta}{ABD}$

$1-\dfrac{2r_1}{h_a} = \operatorname{tg}\dfrac{B}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\angle BDA}{2}$ (2)

Aplicant la propietat anterior al triangle $\overset{\Delta}{ADC}$

$$1-\frac{2r_1}{h_a}=\operatorname{tg}\frac{C}{2}\operatorname{tg}\frac{\angle ADC}{2} \qquad (3)$$

Substituint les expressions (2) (3) en l'expressió (1):

$$1-\frac{2r}{h_a}=\frac{1-\frac{2r_1}{h_a}}{\operatorname{tg}\frac{\angle BDA}{2}}\cdot\frac{1-\frac{2r_1}{h_a}}{\operatorname{tg}\frac{\angle ADC}{2}}$$

Com que $\operatorname{tg}\angle\frac{BDA}{2}\cdot\operatorname{tg}\angle\frac{ADC}{2}=1$,

$1-\frac{2r}{h_a}=\left(1-\frac{2r_1}{h_a}\right)^2$. Aïllant la incògnita r_1:

$$r_1=\frac{h_a-\sqrt{{h_a}^2-2rh_a}}{2}.$$

Bibliografia.

García Capitán, F. (2003) Problemas San Gaku. 2003.
Es pot descarregar en: http://garciacapitan.auna.com/problemas/sangaku1/libro.pdf

Eiichi Ito i altres. Japanese Temple Mathematical problems, in Nagano Pref. Japan. 2003.

Adreces:

http://www.wasan.jp/english/
Pàgina japonesa sobre Sangaku.

http://mathworld.wolfram.com/SangakuProblem.html
Enciclopèdia Mathworld. Entrada SangakuProblem

http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Sangaku.shtml
Applets amb problemes Sangaku.

http://www.mfdabbs.pwp.blueyonder.co.uk/Maths_Pages/SketchPad_Files/Japanese_Temple_Geometry_Problems/Japanese_Temple_Geometry.html
Applets amb problemes Sangaku.

http://www.arrakis.es/~mcj/sangaku.htm
Pàgines de la Gacetilla matemática. On podeu trobar les demostracions d'alguns teoremes Sangaku.

http://agutie.homestead.com/files/sangaku2.html
Pàgina d'Antonio Gutiérrez. Problemes de Geometria.