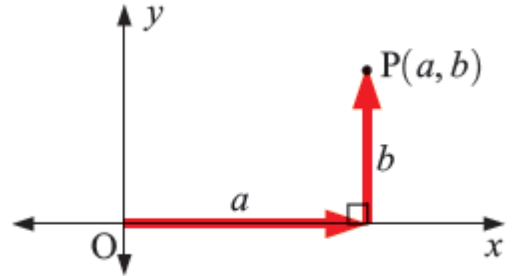


El plànol Cartesià i la recta

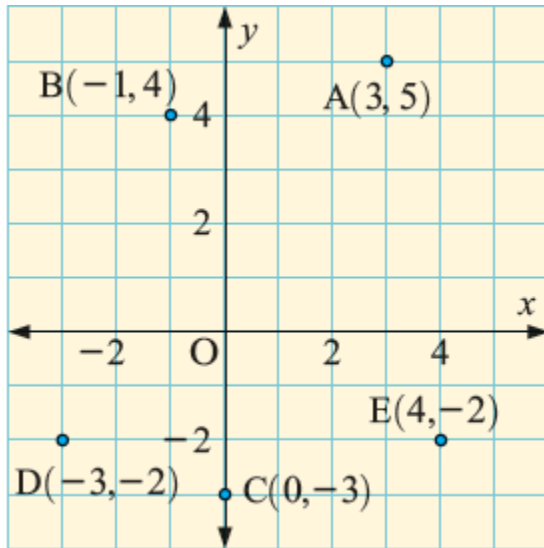
El plànol cartesià està format per un origen de coordenades $O(0, 0)$ i dues rectes perpendiculars que s'anomenen eixos.
L'horitzontal s'anomena eix d'abscisses.
El vertical s'anomena eix d'ordenades.

Un punt $P(a, b)$ es dibuixa a partir de l'origen O recorrent a unitats horitzontals i després b unitats verticals.



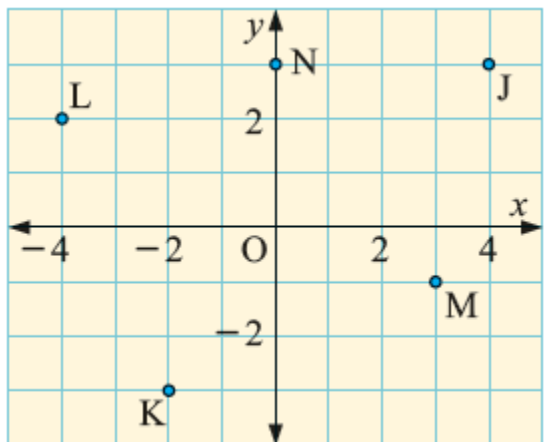
Exemple 1:

Representeu els punts $A(3, 5)$, $B(-1, 4)$, $C(0, -3)$, $D(-3, -2)$, $E(4, -2)$



Exemple 2:

Determineu les coordenades dels punts J, K, L, M, N.



Solució:

$J(4, 3)$, $K(-2, -3)$, $L(-4, 2)$, $M(3, -1)$, $N(0, 3)$.

Exercici 1:

Dibuixeu en el plànol cartesià els punts següents.

a $P(2, 1)$

b $Q(2, -3)$

c $R(-3, -1)$

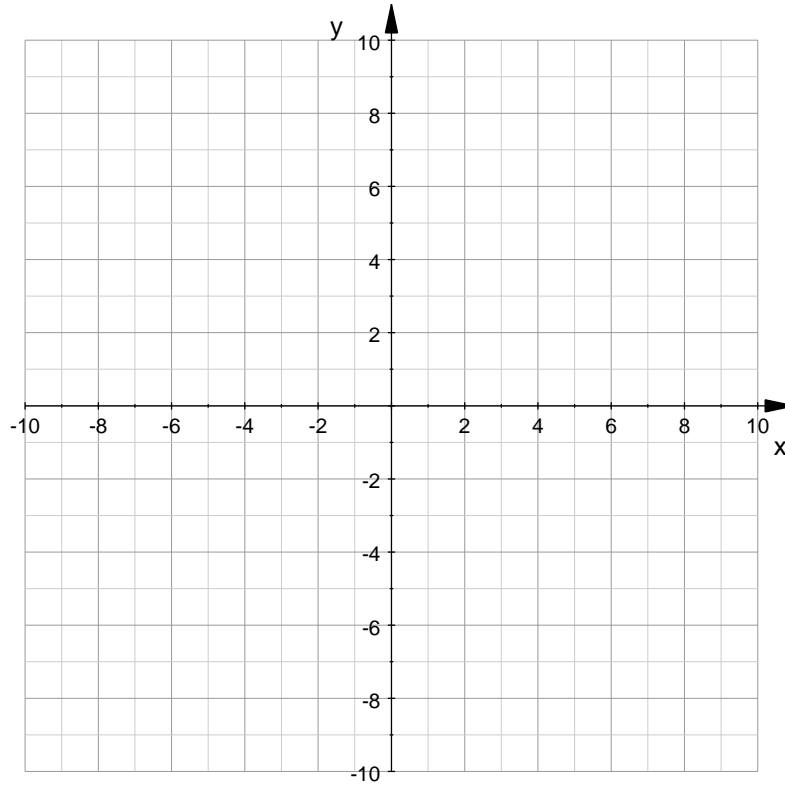
d $S(-2, 3)$

e $T(-4, 0)$

f $U(0, -1)$

g $V(-5, -3)$

h $W(4, -2)$



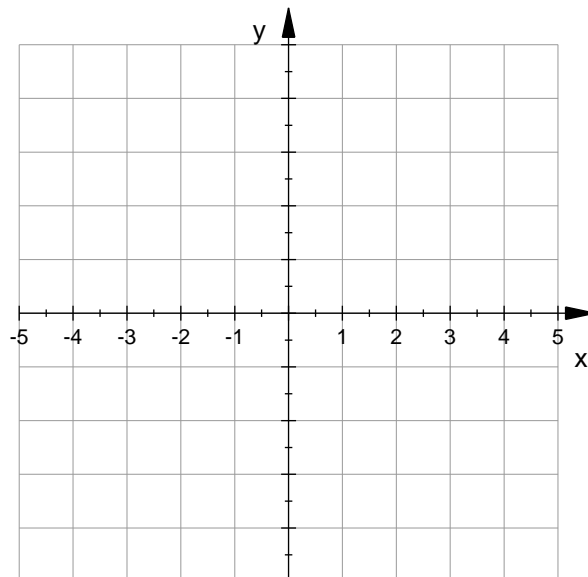
Exercici 2:

Dibuixeu els punts següents en el plànol cartesià

$\{(0, 0), (1, -1), (2, -2), (3, -3), (4, -4)\}$

Què compleixen?

Sabries escriure'ls de forma general?



Distància entre dos punts.

Calculeu la distància entre els punts A(1, 3) i B(4, 1).

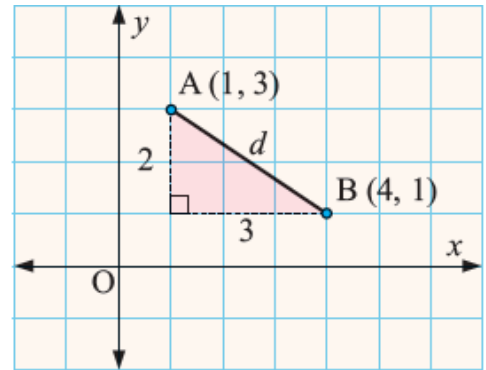
Dibuixem un triangle rectangle amb els catets paral·lels als eixos coordenats.

Els catets mesuren 3 i 2.

Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$d^2 = 3^2 + 2^2 .$$

$$d = \sqrt{13} .$$



Exercici 3:

Calculeu les distàncies entre:

a) A i B

b) A i D

c) C i A

d) F i C

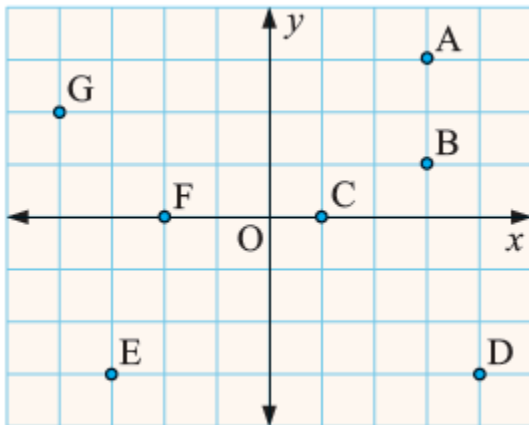
e) G i F

f) C i G

g) E i C

h) E i D

i) B i G



Exercici 4:

Calculeu les distàncies entre:

a) A(3, 5) i B(2, 6)

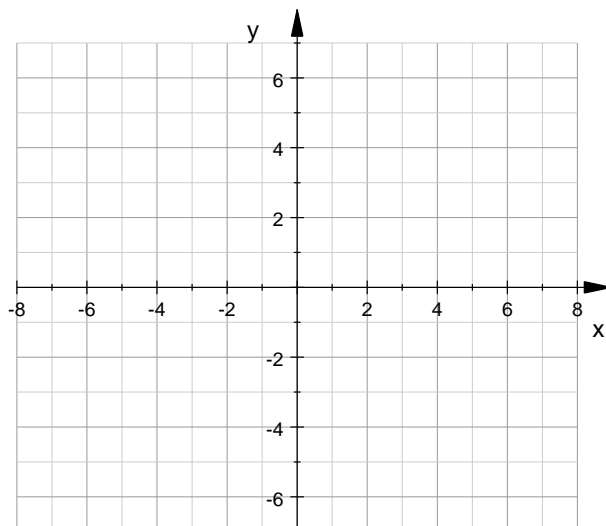
b) P(2, 4) i Q(-3, 2)

c) R(0, 6) i S(3, 0)

d) L(2, -7) i M(1, -2)

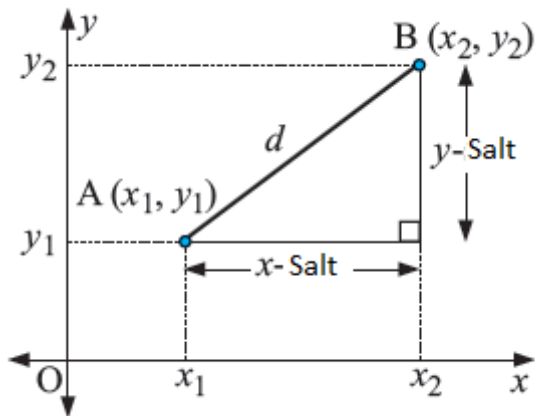
e) C(0, 5) i D(-4, 0)

f) G(5, 1) i H(-1, -1)



Fórmula de la distància entre dos punts:

Siguen els punts $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.



$$x - \text{Salt} = x_2 - x_1.$$

$$y - \text{Salt} = y_2 - y_1.$$

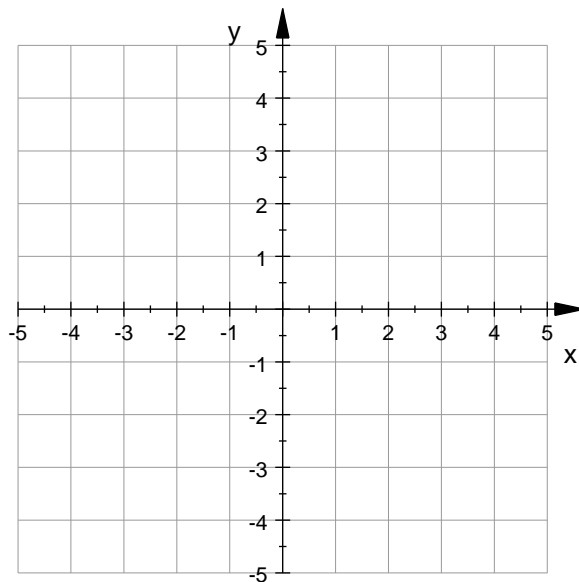
Aplicant el teorema de Pitàgores:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

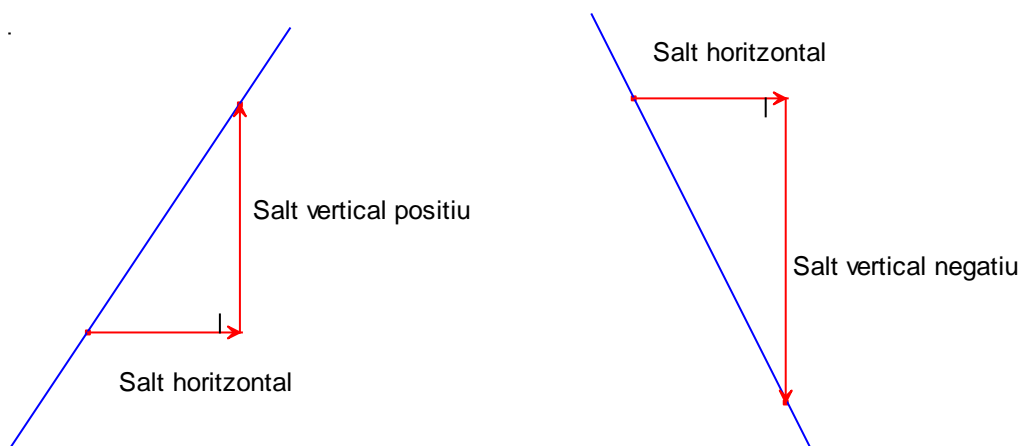
Exercici 5:

Considerem els punts $A(-2, 0)$, $B(2, 1)$ i $C(1, -3)$.

- Calculeu la mesura dels costats del triangle $\triangle ABC$.
- Classifiqueu-lo.



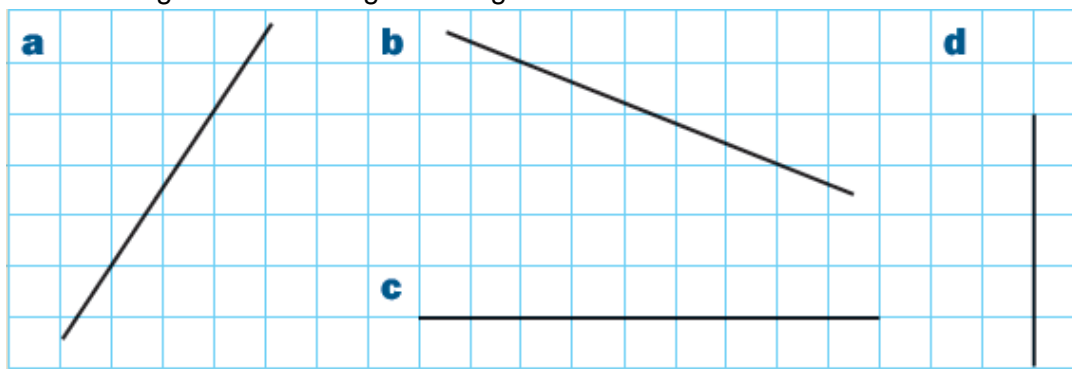
Gradient o pendent d'un segment.



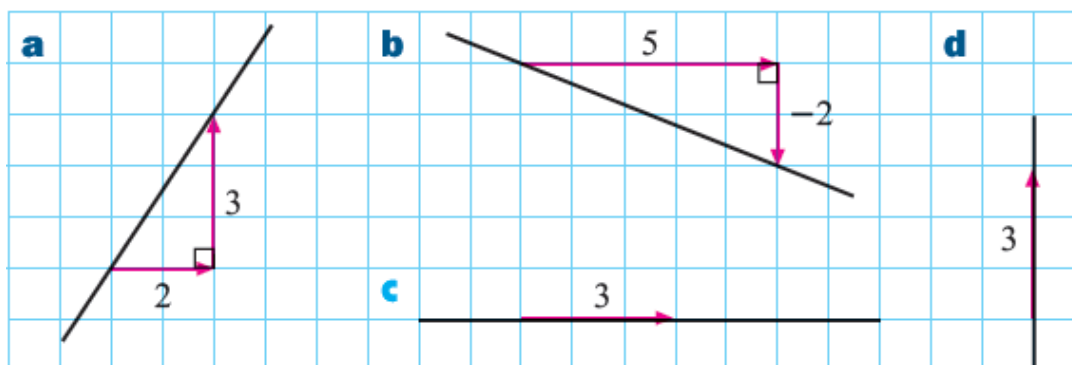
Definim gradient o pendent d'un segment el quocient entre el salt vertical i el salt horitzontal.

Exemple 3:

Calculeu el gradient dels següents segments de línia:



Solució:



Solució:

a) gradient = $\frac{3}{2}$

b) gradient = $\frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}$.

c) gradient = $\frac{0}{3}$

d) gradient = $\frac{3}{0}$ no està definit.

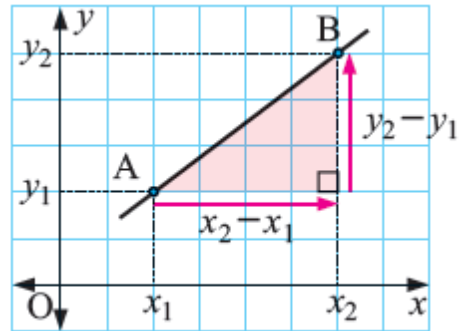
Nota si un segment és horitzontal el seu gradient és 0

Si un segment és vertical el seu gradient no està definit.

Fórmula del gradient:

Siguen els punts $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

El gradient o pendent del $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

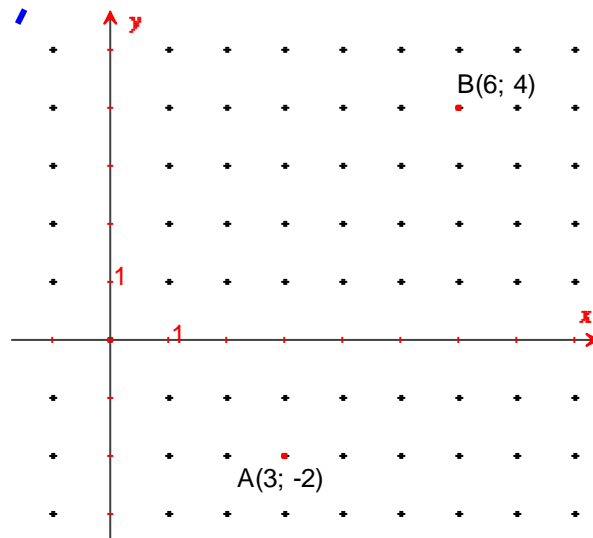


Exemple 4:

Calculeu el gradient que tenen els punts $A(3, -2)$, $B(6, 4)$.

Solució:

$$m = \frac{4 - (-2)}{6 - 3} = \frac{6}{3} = 2.$$



Exemple 5:

Siga el punt $P(2, 4)$ i el pendent $m = -\frac{2}{3}$.

Determineu una recta que continga P i tinga gradient m.

Solució:

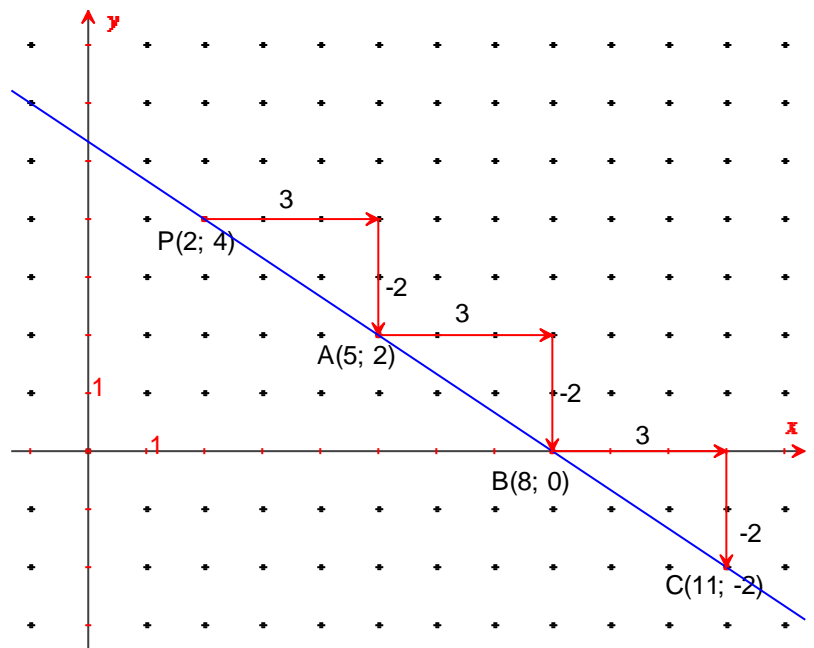
$$\text{gradient} = \frac{\text{salt vertical}}{\text{salt horitzontal}} = \frac{-2}{3}.$$

Els punts que formen la recta són:

$A(5, 2)$.

$B(8, 0)$.

$C(11, -2)$.



Exercici 6:

Calculeu els gradients dels segments formats pels punts següents:

a) A(2, 3) i B(7, 4)

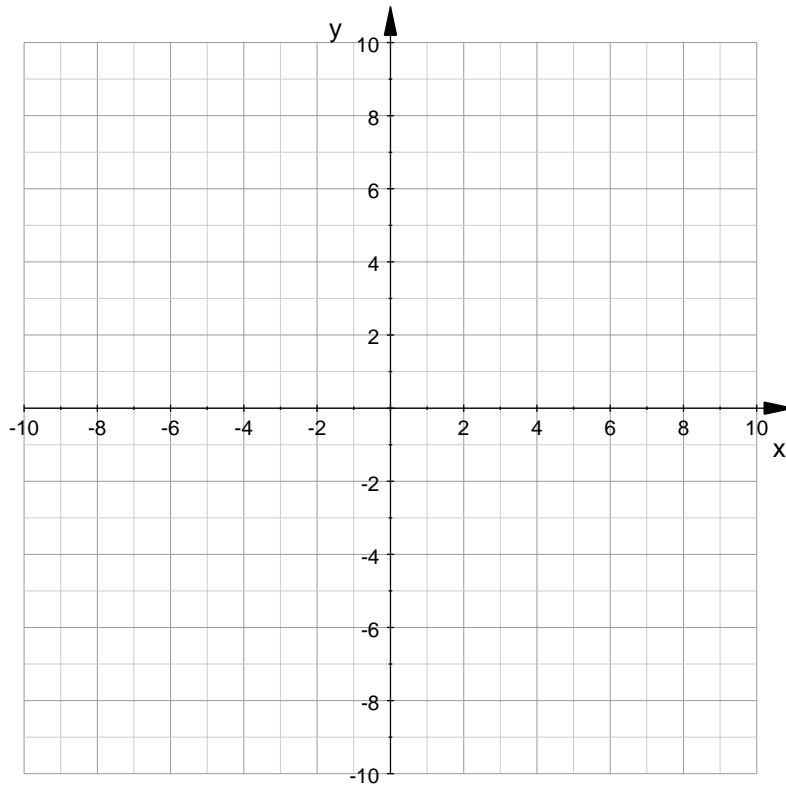
b) C(5, 7) i D(1, 6)

c) E(1, -2) i F(3, 6)

d) G(5, 5) i H(-1, 5)

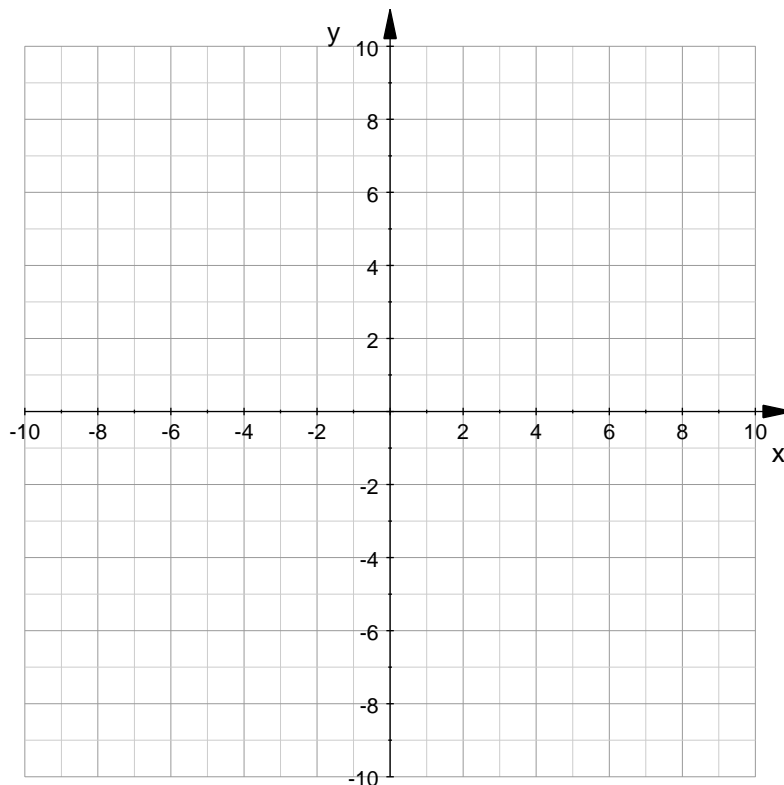
e) I(3, -1) i J(3, -4)

f) K(5, -1) i L(-2, -3)



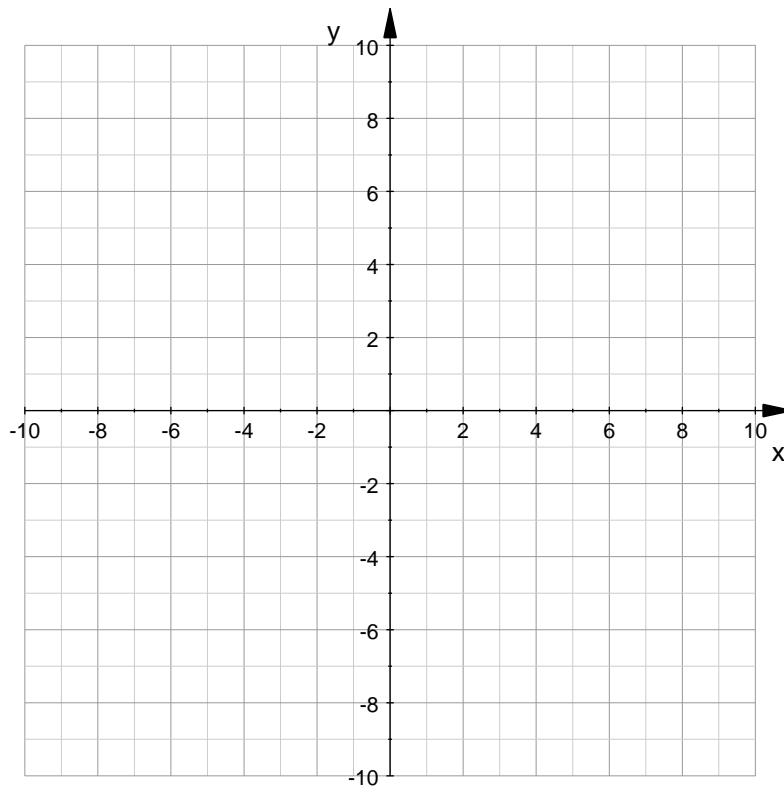
Exercici 7:

Donat el punt P(-1, 2) determineu les rectes de gradients 1, 2, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$



Exercici 8:

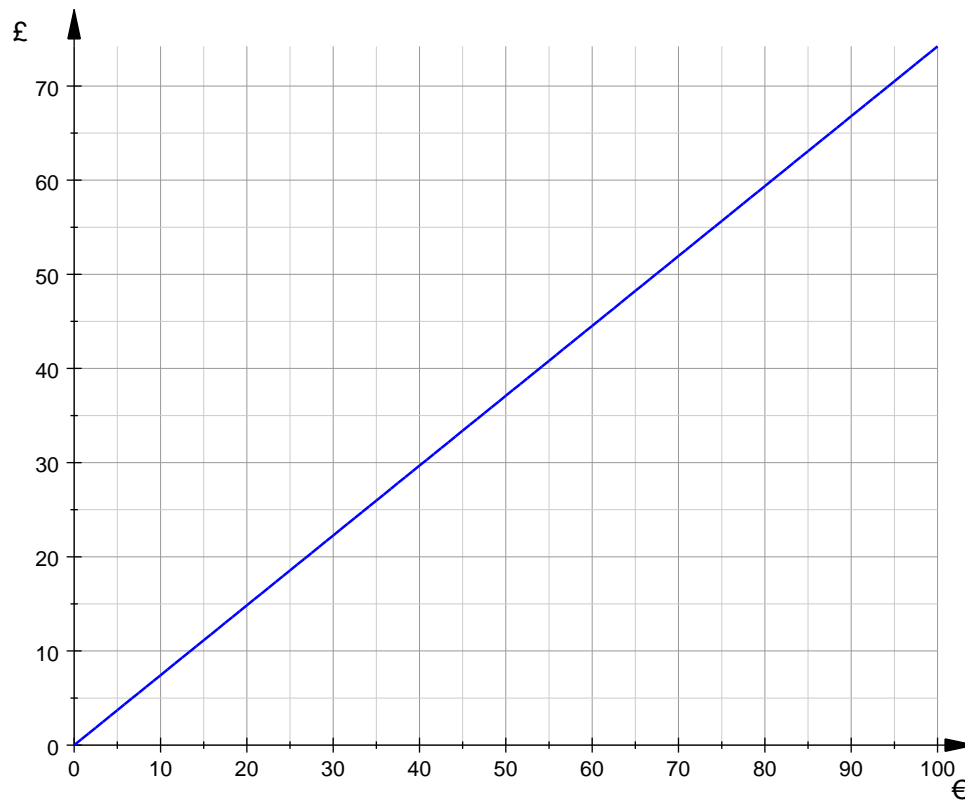
Donat el punt $P(1, 2)$ determineu les rectes de gradients -2 , -3 , $-\frac{4}{3}$, $\frac{1}{2}$



Interpretació de gràfiques:

Exercici 9:

La següent gràfica representa el canvi de monedes entre Euros i Lliures.



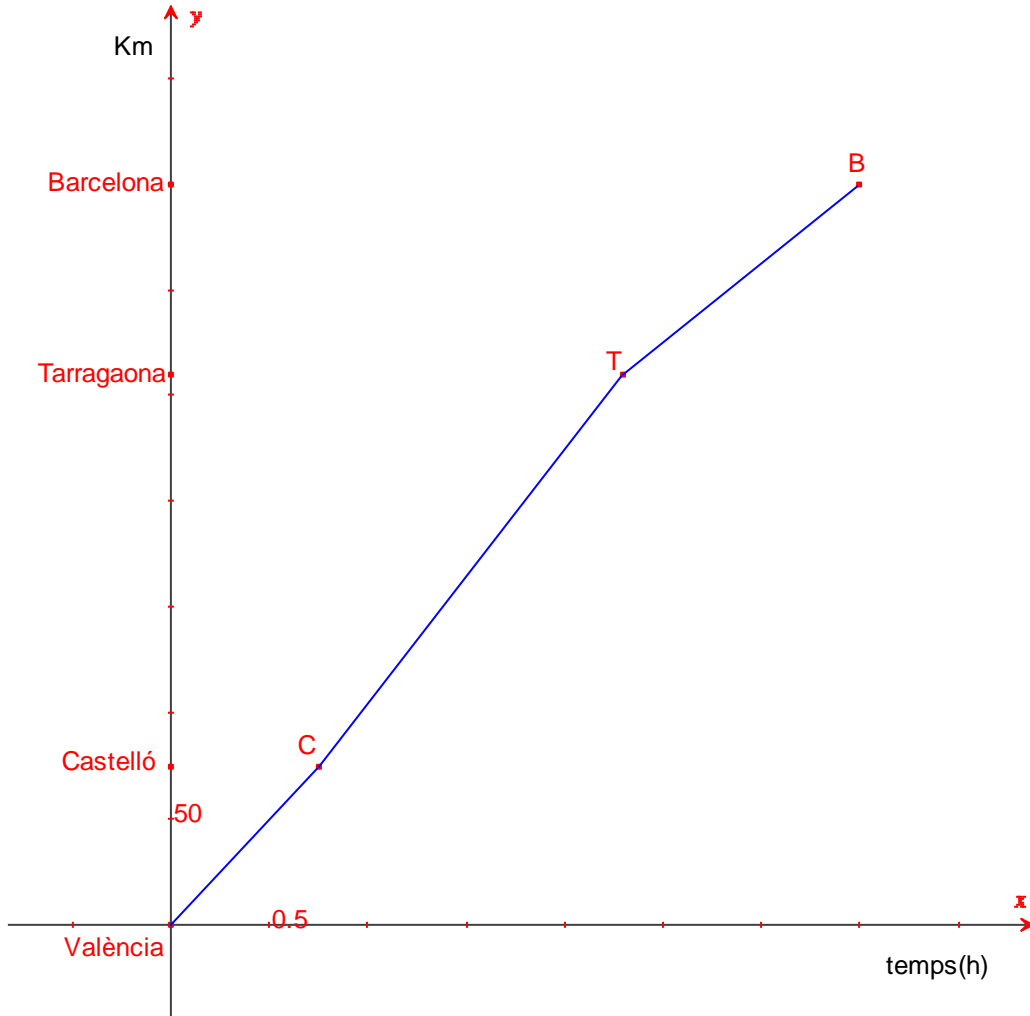
Ompliu la següent taula:

€	10	25	50	60	70				
£						10	35	50	65

- Quantes lliures són 150€?
- Quants euros són 100£?
- Quina expressió relaciona els euros i les lliures?
- Calculeu el gradient de la recta.
- Què significa el gradient?

Exercici 10:

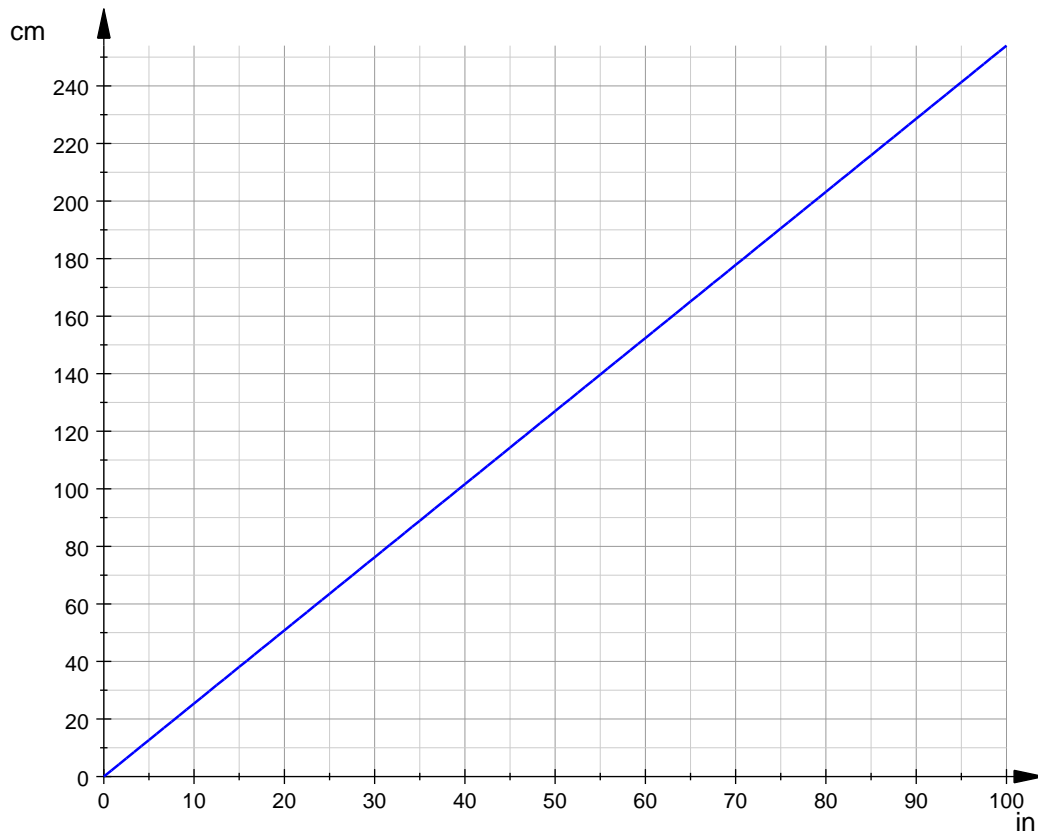
El següent gràfic, representa un recorregut en cotxe de València a Barcelona i el temps emprat.



- Quina és la distància entre València i Castelló?
- Quin temps tarda d'anar de València a Castelló?
- Quin és el gradient entre València i Castelló?
- Quin és el significat del gradient?
- Quina és la distància entre Castelló i Tarragona?
- Quin temps tarda d'anar de Castelló a Tarragona?
- Quina és la velocitat mitjana d'anar de Castelló a Tarragona.
- Quina és la distància entre Tarragona i Barcelona?
- Quina temps tarda d'anar de Tarragona a Barcelona?
- Quina és la velocitat mitjana de Tarragona a Barcelona?
- Quina és la distància entre València i Barcelona?
- Quina temps tarda d'anar de València a Barcelona?
- Quina és la velocitat mitjana de València a Barcelona?

Exercici 11:

La següent gràfica representa el canvi d'unitats entre polzades (in) i centímetres (cm)



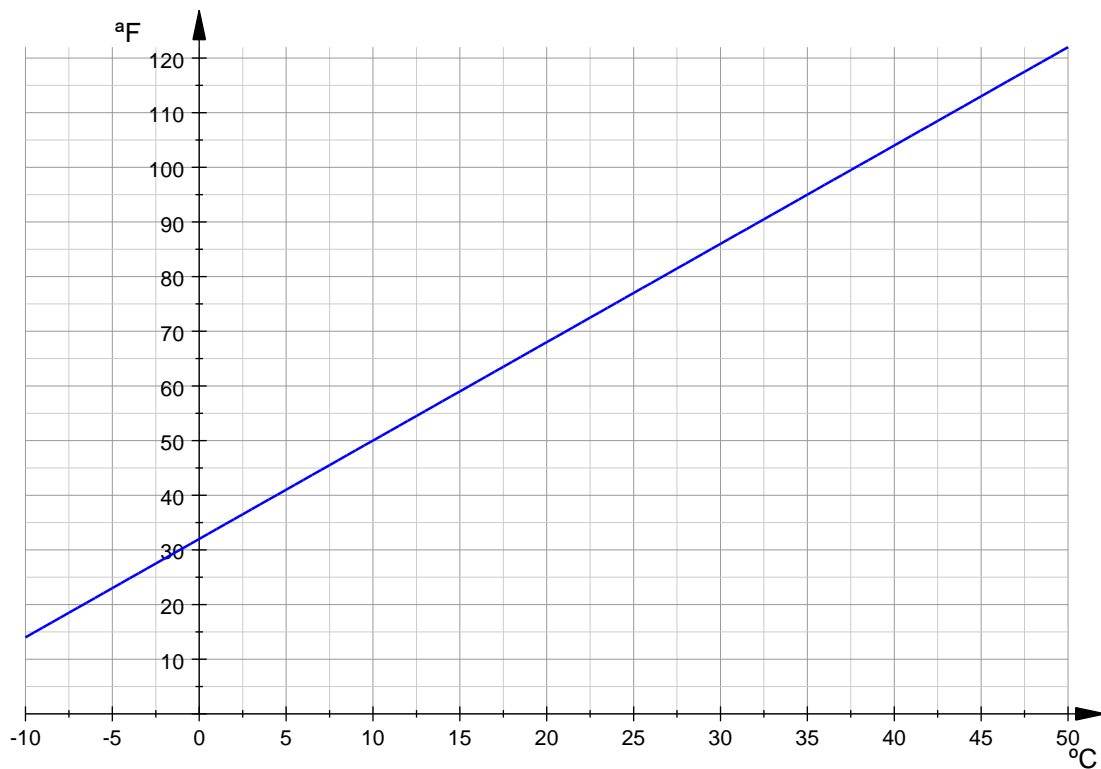
Ompliu la següent taula:

in	30	40	45	50	55				
cm						80	90	100	120

- Quantes cm són 150in?.
- Quantes in són 300cn.
- Quina expressió relaciona polzades i centímetres?.
- Calculeu el gradient de la recta?.
- Què significa el gradient?.

Exercici 12:

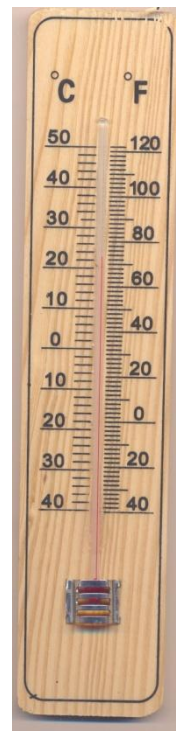
La següent gràfica representa la conversió de mesures de temperatura °C (centígrades) °F (fahrenheit)



Ompliu la següent taula:

°C	10	25	37	40	45				
°F						40	60	90	110

- Quantes °F són 75°C?
- Quants °C són 150°F?
- Quina expressió relaciona els graus centígrads i els fahrenheit?
- Calculeu el gradient de la recta.
- Què significa el gradient?



Funcions de la forma $y = mx + n$.

Exemple 6:

Representeu la funció $y = 2x + 1$.

Solució:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-5	-3	-1	1	3	5	7

$$\begin{aligned}y &= 2 \times -3 + 1 \\ &= -6 + 1 \\ &= -5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= 2 \times 2 + 1 \\ &= 4 + 1 \\ &= 5\end{aligned}$$

Els punts $(-3, -5)$, $(-2, -3)$, $(-1, -1)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$, $(2, 5)$, $(3, 7)$ pertanyen a la recta.

El gradient de la recta el podem calcular utilitzant els punts $(0, 1)$, $(1, 3)$ o bé qualssevol altres.

$$m = \frac{\text{Salt vertical}}{\text{Salt horitzontal}} = \frac{2}{1} = 2.$$

El punt de tall amb l'eix d'ordenades el podem calcular substituint en l'equació $x = 0$.

$$y = 2 \times 0 + 1 = 1.$$

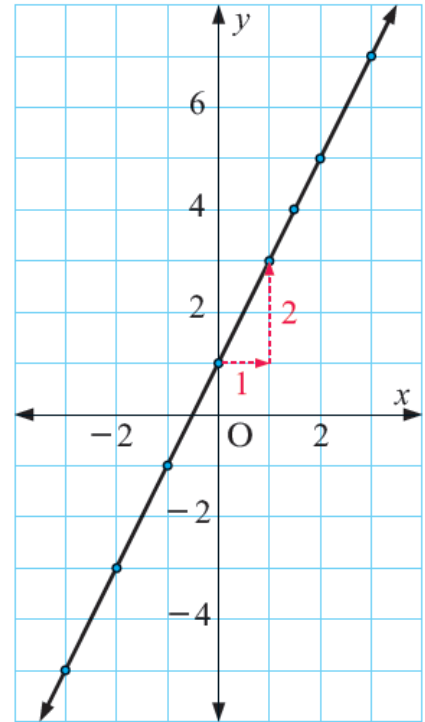
El punt de tall amb l'eix d'ordenades és $(0, 1)$.

El punt de tall amb l'eix d'abscisses el podem calcular substituint en l'equació $y = 0$:

$0 = 2 \times x + 1$, resolent l'equació:

$$x = \frac{-1}{2}.$$

El punt de tall amb l'eix d'abscisses és $\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$.



Exercici 13:

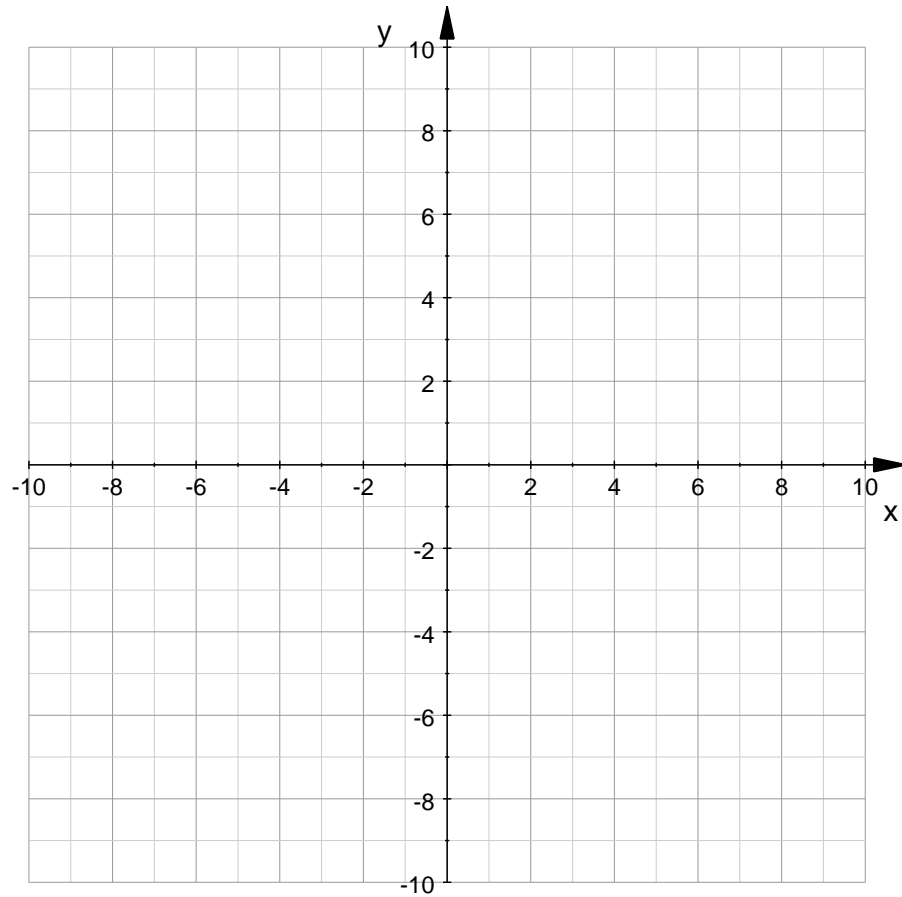
Utilitzant distints color dibuixeu en la mateixa gràfica les funcions:

a) $y = x$

b) $y = 3x$

c) $y = \frac{1}{3}x$

d) $y = -3x$



Calculeu en cadascuna el gradient.

Què observeu en les quatre gràfiques?

Exercici 14:

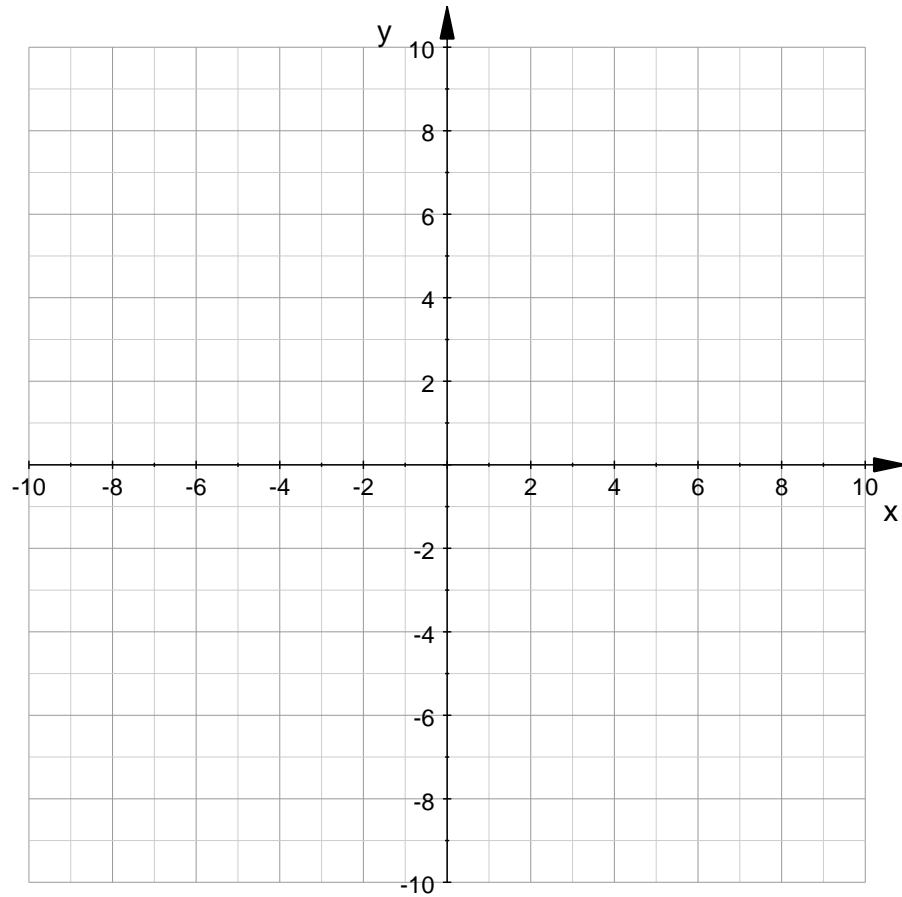
Utilitzant distints color dibuixeu en la mateixa gràfica les funcions:

a) $y = 2x + 1$

b) $y = -2x + 1$

c) $y = \frac{1}{2}x + 1$

d) $y = -\frac{1}{2}x + 1$



Calculeu en cadascuna el gradient.
Què observeu en les quatre gràfiques?

Exercici 15:

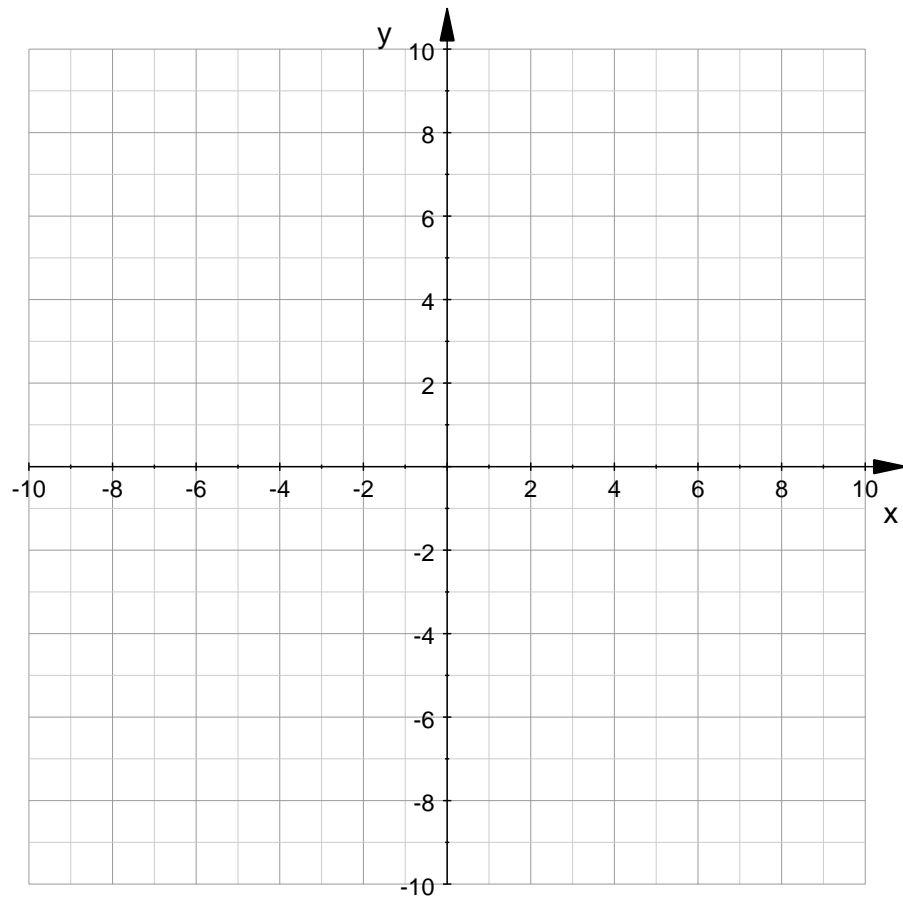
Utilitzant distints color dibuixeu en la mateixa gràfica les funcions:

a) $y = 2x + 1$

b) $y = 2x$

c) $y = 2x - 3$

d) $y = 2x + 4$



Calculeu en cadascuna el gradient.

Què observeu en les quatre gràfiques?

Exercici 16:

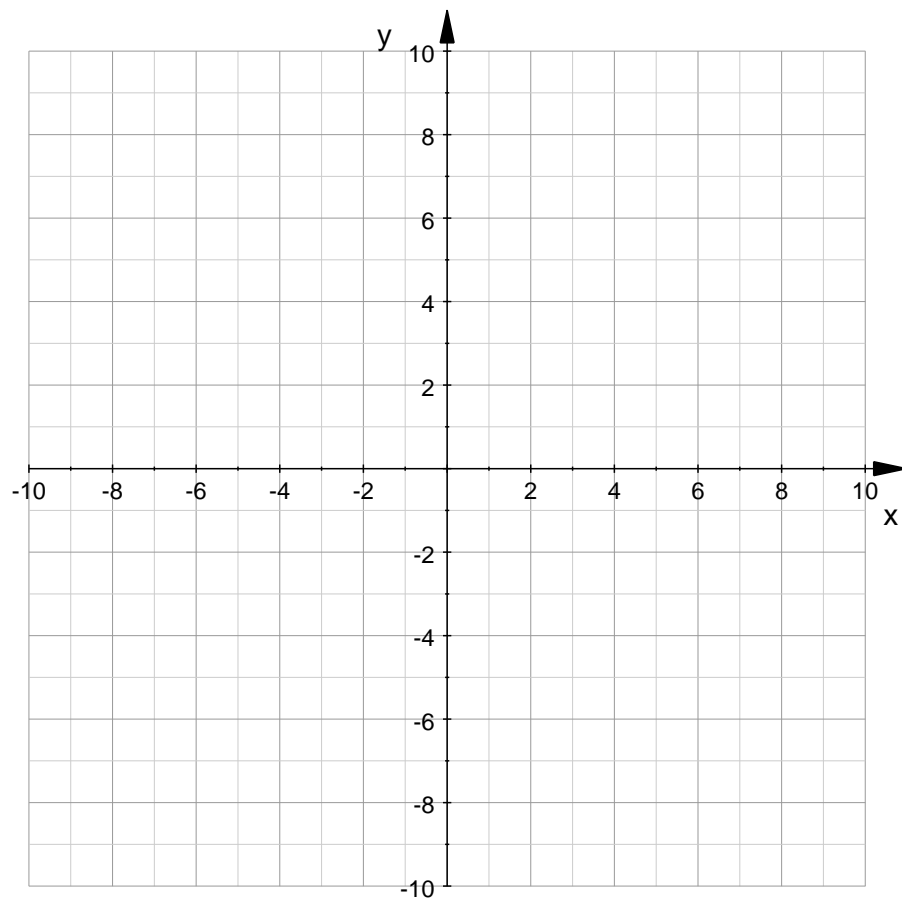
Utilitzant distints color dibuixeu en la mateixa gràfica les funcions:

a) $y = -x + 1$

b) $y = -x$

c) $y = -x + 3$

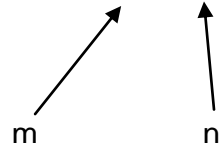
d) $y = -x - 4$



Calculeu en cadascuna el gradient.
Què observeu en les quatre gràfiques?

Resum dels resultats anteriors.

Notem que en la recta $y = mx + n$



Gradient o pendent

Ordenada a l'origen

Dues rectes que tenen el mateix gradient m són paral·leles.

Exercici 17:

Determineu el gradient i l'ordenada a l'origen de les següents gràfiques.

a $y = 3x + 11$

b $y = -2x + 6$

c $y = \frac{1}{2}x$

d $y = -\frac{1}{3}x - 2$

e $y = 3$

f $x = 8$

g $y = 3 - 2x$

h $y = -1 + \frac{1}{2}x$

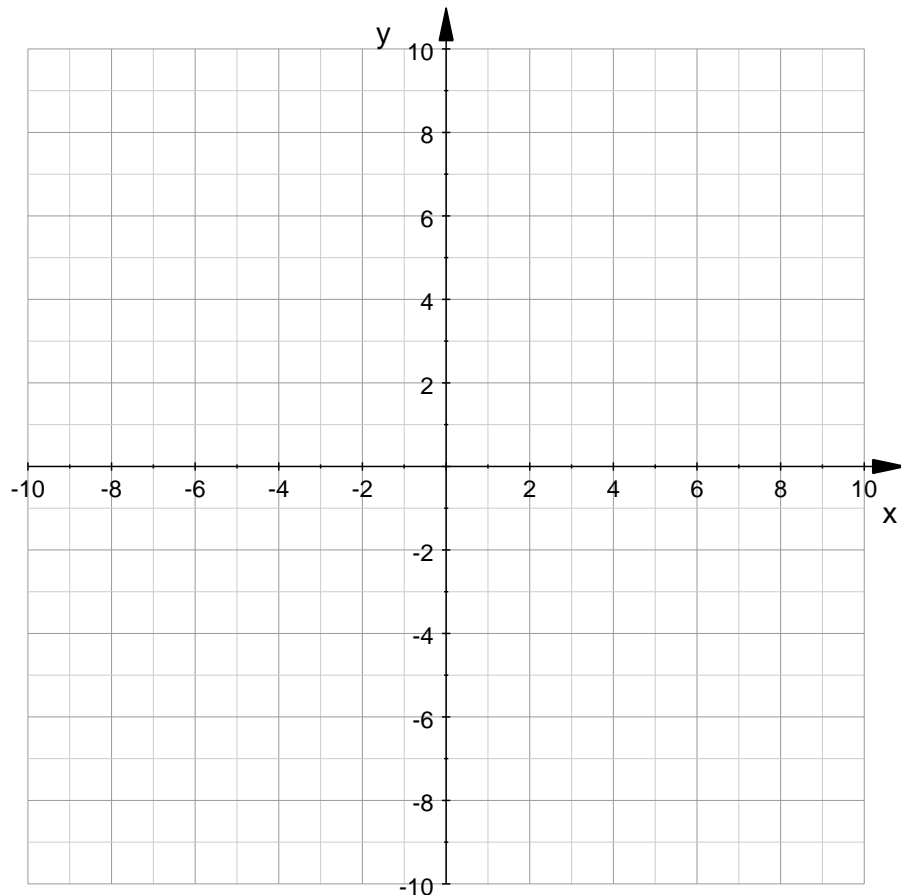
i $y = \frac{3x + 1}{2}$

j $y = \frac{2x - 1}{3}$

k $y = \frac{1 - x}{4}$

l $y = \frac{3 - 2x}{5}$

Dibuixeu a) b) c) i d) sense utilitzar taula.



Exercici 18:

Determineu l'equació de les rectes següents:

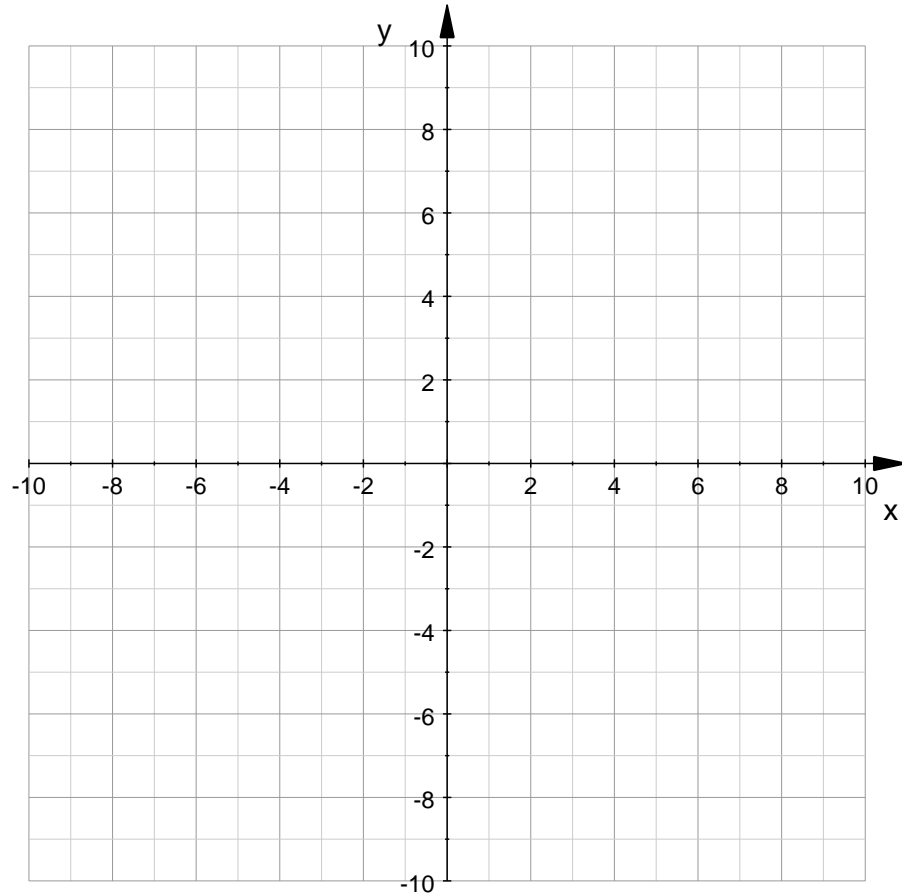
a) La recta de gradient 3 i ordenada a l'origen -2 .

b) La recta de gradient -4 i ordenada a l'origen 5.

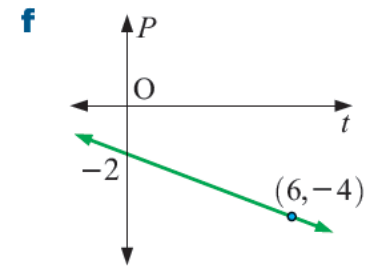
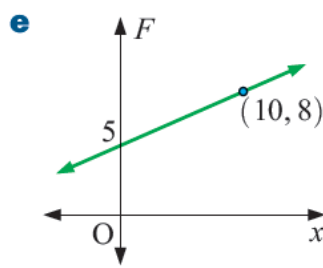
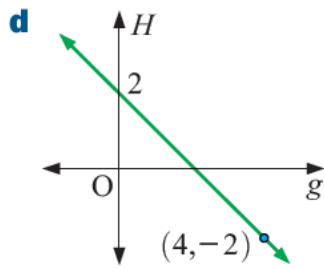
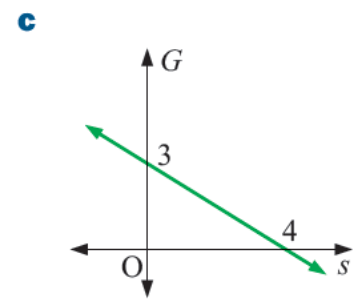
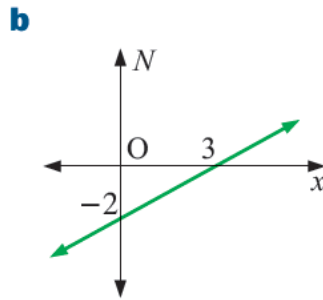
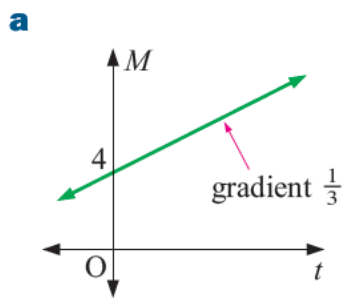
c) La recta de gradient $\frac{1}{2}$ i ordenada a l'origen $\frac{3}{2}$.

d) La recta de gradient $-\frac{2}{3}$ i ordenada a l'origen 2.

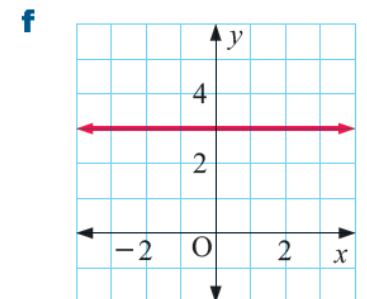
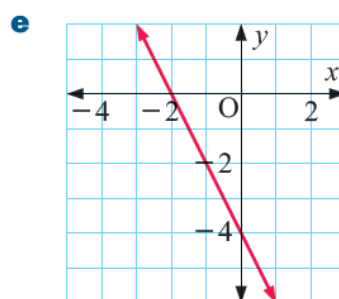
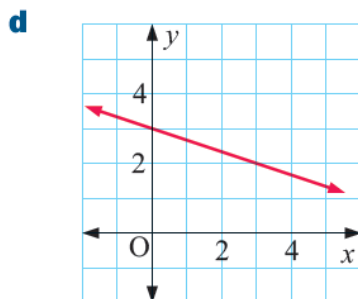
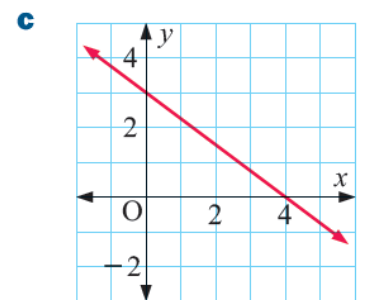
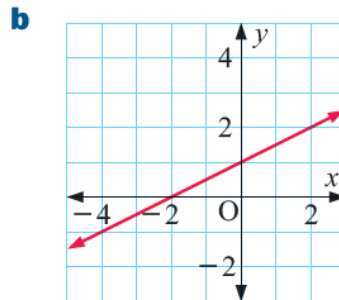
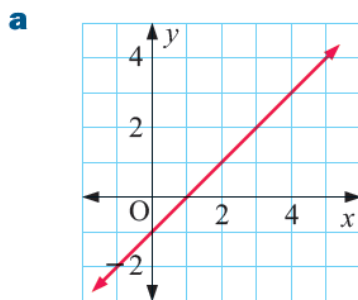
Dibuixeu-les sense taula de valors.



Exercici 19:
 Determineu l'equació de les rectes següents



Exercici 20:
 Determineu l'equació de les rectes següents



Exemple 7:

Determineu l'equació de la recta que té gradient $\frac{3}{4}$ i passa pel punt $(5, -2)$.

Solució:

L'equació de la recta és $y = mx + n$.

El gradient de la recta és $m = \frac{3}{4}$.

Aleshores, $y = \frac{3}{4}x + n$.

El punt $(5, -2)$ pertany a la recta, és a dir, satisfà la seua equació.

Substituïm $x = 5$, $y = -2$ en l'equació de la recta:

$$-2 = \frac{3}{4} \cdot 5 + n.$$

Resolem l'equació:

$$-2 = \frac{15}{4} + n \quad (\text{restar a les dues parts } \frac{15}{4})$$

$$n = -2 - \frac{15}{4}. \text{ Aleshores, } n = \frac{-23}{4}.$$

L'equació de la recta és $y = \frac{3}{4}x - \frac{23}{4}$.

Exemple 8:

Determineu l'equació de la recta que passa pels punts $(-1, 5)$, $(3, -2)$.

Solució:

L'equació de la recta és $y = mx + n$.

El gradient de la recta és:

$$m = \frac{-2 - 5}{3 - (-1)} = \frac{-7}{4}.$$

Aleshores, $y = -\frac{7}{4}x + n$.

El punt $(-1, 5)$ pertany a la recta, és a dir, satisfà la seua equació.

Substituïm $x = -1$, $y = 5$ en l'equació de la recta:

$$5 = -\frac{7}{4} \cdot (-1) + n.$$

Resolem l'equació:

$$5 = \frac{7}{4} + n \quad (\text{restar a les dues parts } \frac{7}{4})$$

$$n = 5 - \frac{7}{4}. \text{ Aleshores, } n = \frac{13}{4}.$$

L'equació de la recta és $y = -\frac{7}{4}x + \frac{13}{4}$.

Exercici 21:

Determineu les equacions de les rectes següents:

a) La recta de gradient 2 que passa pel punt (1, 4).

b) La recta de gradient -3 que passa pel punt (3, 1).

c) La recta de gradient $\frac{2}{3}$ que passa pel punt (3, 0).

d) La recta de gradient $-\frac{1}{4}$ que passa pel punt (2, -3).

Exercici 22:

Determineu les equacions de les rectes següents:

a) La recta passa pels punts $(-1, 1)$, $(2, 7)$.

b) La recta passa pels punts $(2, 0)$, $(6, 2)$.

c) La recta passa pels punts $(-3, 3)$, $(6, 0)$.

d) La recta passa pels punts $(3, -1)$, $(0, 4)$.

e) La recta passa pels punts $(-1, 7)$, $(2, -2)$.