Problemes d'Àlgebra

Problema 1

Considerem el següent sistema d'equacions $\begin{cases} x - y + mz = 0 \\ mx + 2y + z = 0 \\ -x + y + 2mz = 0 \end{cases}$.

Determineu els valors del paràmetre m a fi que el sistema tinga solució única.
Determineu els valors del paràmetre m a fi que el sistema tinga alguna solució distinta de la solució nul·la.
Resol el sistema per a $m = -2$.
Andalusia 2014.

Problema 2

Sabent que el determinant de la matriu $A = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ és 2, calculeu els següents determinants indicant en cada cas, les propietat emprades.

a) det(3A).

b) $\det\left(A^{-1}\right)$.

c) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3x & 2y & z \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x+2 & y+4 & z+6 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

Andalusia 2014.

Problema 3

Considerem el següent sistema d'equacions lineals: $\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 5 \end{cases}$.

a) Calculeu α de manera que al afegir una tercera equació de la forma $\alpha x + y - 7z = 1$ el sistema resultant tinga les mateixes solucions que l'original.
b) Calculeu les solucions del sistema donat tal que la suma dels valors de les incògnites siga 4.

Problema 4

Considerem les matrius $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Determineu, si existeix, la matriu X que verifique $AX + B = A^2$.
Andalusia 2014.

Problema 5

a) Siguen A i B dues matrius 2×2. Determineu aquestes matrius sabent que verifiquen les següents equacions $\begin{cases} A+3B=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix} \\ 2A-B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ -1 & -1\end{pmatrix}\end{cases}$.

b) Siguen C i D les matrius $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Determineu el determinant $\left|5(CD)^{-1}\right|$, on $(CD)^{-1}$ és la matriu inversa de (CD).

Aragó 2014.

Problema 6

Determineu per que quins valors de a el sistema següent és compatible determinat, compatible indeterminat o incompatible:

$$\begin{cases} ax-3y+6z=3 \\ ax+3y+az=6 \\ -ax-6y+9z=0 \end{cases}.$$

Aragó 2014.

Problema 7

Siga m un nombre real i considerem la matriu $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & m\\ m & 0 & -1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

Determineu tots els valors de m a fi que la matriu A té inversa.
Determineu, si existeix, la matriu inversa de A quan $m=0$.
Determineu, si existeix, la inversa de A^2 quan $m=0$.

Aragó 2014.

Problema 8

Considerem les matrius d'ordre 2×2 següents: $A=\begin{pmatrix}1 & -4\\ -2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}4 & 2\\ -2 & -3\end{pmatrix}$.

Determineu dues matrius M i N d'ordre 2×2 tals que $\begin{cases} AM+BN=D \\ AM=N\end{cases}$.

Es considereu la matriu G d'ordre 3×3, les columnes de la qual és representen per C_1, C_2, C_3 i el determinant del qual és 2. Considereu també la matriu H les columnes de la qual són C_3, C_3+C_2, $3C_1$. Calculeu el determinant de la matriu H.

Aragó 2014.

Problema 9
En un partit de basket femení, l'equip de la Universitat d'Oviedo va guanyar al d'una altra universitat espanyola amb un marcador de 64 a 48. El marcador obtingut per l'equip vencedor es va aconseguir mitjançant cistelles de dos punts, triples (cistelles de tres punts) i tirs lliures (cistelles d'un punt). El nombre de tirs lliures van ser dos més que cinc vegades el nombre de triples. A més a més, el nombre de cistelles de dos punts va ser dos més que el nombre de tirs lliures.
a) Plantegeu el sistema d'equacions resultat de l'anterior enunciat.
b) Escriviu la matriu ampliada del sistema obtingut en a)
c) Quantes cistelles de cada tipus va anotar l'equip de la Universitat d'Oviedo?.
Astúries 2014.

Problema 10
a) Donats els nombres reals a, b, c, d, es considera la matriu $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
b) Proveu que el polinomi $p(x) = \det(A - x \cdot I_2)$ és $p(x) = x^2 - \text{Traça}(A) \cdot x + \det(A)$
On $\text{Traça}(A)$ és la suma dels elements de la diagonal de A.
Astúries 2014.

Problema 11
Donat el sistema $\begin{cases} -ax + 2y = a \\ x - (1+a)y = a \\ (1-a)z = 1 \end{cases}$.
a) Estudieu la seua compatibilitat segons els valors del paràmetre real a.
b) Resoleu el sistema, si és possible, quan $a = -1$.
Astúries 2014.

Problema 12
Donat un nombre real a es considera la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a+1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & a-1 \end{pmatrix}$.
a) Determineu els valors de a a fi que la matriu A tinga inversa.
b) Obteniu la solució del sistema homogeni la matriu del qual és A en els casos que siga compatible indeterminat.
Astúries 2014.

Problema 13
a) Resoleu el següent sistema matricial $XA = B - C$ on $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
b) Siguen F_1, F_2, F_3 les files d'una matriu quadrada d'ordre 3 el determinant del qual és 5. Calculeu raonadament el valor del determinant de la matriu les files de la qual són respectivament $3F_1 - F_3, F_2, 2F_3$.
Castella i Lleó 2014.

Problema 14

Siga el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} mx - y = 1 \\ -x + my = 1 - 2m \end{cases}$.

a) Discutiu el sistema segons els valors de m.

b) Determineu els valors de m per als quals el sistema tinga alguna solució en què $x = 2$.

Castella i Lleó 2014.

Problema 15

Discutiu i resoleu quan siga possible, el sistema d'equacions lineals segons els valors del paràmetre m:

$$\begin{cases} mx + y = 1 \\ x + my = m \\ 2mx + 2y = m + 1 \end{cases}.$$

Castella i Lleó 2014.

Problema 16

Siga la matriu $A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ a & a+3 & a+4 \\ a & a+5 & a+6 \end{pmatrix}$.

Discutiu el ramg de la matriu A segons els valors de a.

Per a $a = 1$, resoleu l'equació matricial $A^t \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, essent A^t la transposada de A.

Castella i Lleó 2014.

Problema 17

a) Discutiu, en funció del paràmetre $m \in R$, el rang de la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ m+1 & 3 & m-1 \\ m-1 & m+3 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Per a quins valors de $m \in R$ existeix la matriu inversa de A?.

Castella la Manxa 2014.

Problema 18

Determineu dues matrius A, B quadrades d'ordre 2 que siguen solució del sistema

$\begin{cases} 2A + B = C^2 \\ A - B = C^{-1} \end{cases}$, essent $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Castella la Manxa 2014.

Problema 19

a) Sabent que A és una matriu quadrada d'ordre 2 tal que $|A| = 5$, calculeu raonadament el valor dels següents determinants: $|-A|$, $|A^{-1}|$, $|A^t|$, $|A^3|$.

b) Sabent que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$, calculeu utilitzant les propietats de determinants

$\begin{vmatrix} 3-a & -b & 1-c \\ 1+a & 1+b & 1+c \\ 3a & 3b & 3c \end{vmatrix}$ i $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2a & 2b & 2c \\ 0 & 30 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$.

Castella la Manxa 2014.

Problema 20

a) Se sap que el sistema d'equacions lineals $\begin{cases} x-2y+3z=4 \\ 2x-y+z=8 \\ x-5y+az=4 \end{cases}$, $a \in R$, és compatible determinat. Calculeu i resoleu el sistema per al valor d'aquest paràmetre.

b) Per al valor de a trobat, doneu la solució particular del sistema tal que $x = y$.

Castella la Manxa 2014.

Problema 21

Estudieu, per als distints valors del paràmetre m, el següent sistema d'equacions. Resoleu-lo per a $m = 3$.

$$\begin{cases} mx - y + 13z = 0 \\ x + y + 7z = 0 \\ 2x - my + 4z = 0 \end{cases}.$$

Extremadura 2014.

Problema 22

a) Determineu els valors dels paràmetres a i b per als quals la matriu

$A = \begin{pmatrix} a+b & 4b \\ a & a+b \end{pmatrix}$ tinga inversa.

b) Calculeu la matriu A^{-1} quan $a = 3$ i $b = 1$.

Extremadura 2014.

Problema 23

Estudieu, per als distints valors del paràmetre m, el següent sistema d'equacions i resoleu-lo en els casos en que siga possible

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ my + z = 0 \\ x + (m+1)y + mz = m+1 \end{cases}$$

Canàries 2014.

Problema 24

Siguen les matrius $A=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & 1 & 0\\ 2 & \frac{1}{2} & 5\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 2 & 1 & 8\end{pmatrix}$. Determineu les matrius X i Y de dimensions 2×3 que verifiquen el sistema matricial $\begin{cases}3X+Y=A\\ 4X+2Y=B\end{cases}$.

Canàries 2014.

Problema 25

Considereu el sistema d'equacions lineals $\begin{cases}mx-y=m\\ 3x+(m-4)y=m+2\end{cases}$, per a $m\in R$.

a) Discutiu el sistema d'equacions per als diferents valors del paràmetre m.
b) Resoleu el sistema en aquells casos en què el sistema siga compatible.
Catalunya 2014.

Problema 26

Considereu l'equació matricial $XA=B$, on $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ a & -3 & a-1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}-3 & -2 & -4\\ 5 & -2 & 5\end{pmatrix}$.

Per a quins valors del paràmetre a l'equació matricial té solució única?.
Calculeu la matriu X que satisfà l'equació quan $a=3$.
Catalunya 2014.

Problema 27

Considerem la matriu $M=\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & a+1 & (a+1)^2\\ 1 & a-1 & (a-1)^2\end{pmatrix}$, per a $a\in R$.

a) Calculeu el rang de la matiu M en funció dels valors del paràmetre a.

b) Discutiu i resoleu el sistema d'equacions $M\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$ segons els valors del paràmetre a.
Catalunya 2014.

Problema 28
Responeu a les següents qüestions:
Demostreu que si A és una matriu quadrada que compleix la igualtat $A^2=I$, on I és la matriu identitat, aleshores és invertible i A^{-1} compleix $\left(A^{-1}\right)^2=I$.
Calculeu l'expressió general de les matrius de la forma $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & 2\end{pmatrix}$ amb $b\neq 0$ que compleix la igualtat $A^2=I$.
Catalunya 2014.

Problema 29

Considerem les matrius $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}5 & 0 & -5\\ 0 & 1 & 1\\ -5 & -1 & 5\end{pmatrix}$.

a) Calculeu la matriu $A=3B^2-C$.

b) Calculeu la inversa A^{-1} de A.

Extremadura 2014.

Problema 30

Considerem el sistema compatible determinat de dues equacions amb dues incògnites $S\equiv\begin{cases}x+y=1\\ x-y=3\end{cases}$, la solució del qual és el punt $P_0(2,-1)\in R^2$.

Siga S' el sistema afegint a S una tercera equació $ax+by=c$. Responeu raonadament a les següents preguntes:

a) Pot ser S' compatible determinat?.

b) Pot ser S' incompatible?.

c) Pot ser S' compatible indeterminat?.

Extremadura 2014.

Problema 31

a) Estudieu el sistema d'equacions $\begin{cases}x+y-4z=2\\ 2x-y-z=1\\ x-2y+3z=-1\end{cases}$.

b) Resoleu l'anterior sistema d'equacions.

Extremadura 2014.

Problema 32

Calculeu el determinant de la matriu $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}$

Calculeu la matriu inversa de A.

Calculeu el determinant de la matriu $B=\frac{1}{2}A^3$ sense obtindre prèviament B.

Extremadura 2014.

Problema 33

Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}1 & a & a\\ 1 & a & 1\\ a-1 & a & 2\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$.

a) Determineu el valor o valors de a per als quals no existeix la matriu inversa A^{-1}.

b) Per a $a=-2$ calculeu matriu inversa A^{-1}.

c) Per a $a=1$ calculeu les solucions del sistema $AX=O$.

Madrid 2014.

Problema 34

Donada l'equació matricial $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, on B és una matriu quadrada d'ordre 2, es demana:

a) Calculeu el valor o valors de a per al quals l'equació té solució.

b) Calculeu B en el cas $a = 1$.

Madrid 2014.

Problema 35

Estudieu el rang de la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & -4 & a \end{pmatrix}$ segons els valors del paràmetre a.

Madrid 2014.

Problema 36

Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & 0 & \alpha \\ 1 & \beta & \gamma \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, es demana.

a) Calculeu α, β, γ, per als quals $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ siga solució dels sistema $AX = B$.

b) Si $\beta = \gamma = 1$ quina condició o condicions ha de complir α perquè el sistema lineal homogeni $AX = O$ siga compatible determinat.

c) Si $\alpha = -1, \beta = 1, \gamma = 0$, resoleu el sistema $AX = B$.

Madrid 2014.

Problema 37

Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & a \\ -3 & 2 & a \\ 0 & a & -1 \end{pmatrix}$ es demana:

a) Determineu el valor o els valors de a perquè la matriu A tinga inversa.

b) Calculeu la matriu inversa A^{-1} de A, en el cas $a = 2$.

Madrid 2014.

Problema 38

Per la compra de cinc quaderns, dos retoladors i tres bolígrafs s'han pagar 22€. Si es compren dos quaderns, un retolador i sis bolígrafs, el cost és de 14€. Es demana:

a) Expresseu en funció del preu d'un bolígraf, el que costaria un quadern i el que costaria un retolador.

b) Calculeu el que hauríem de pagar si adquirim vuit quaderns i tres retoladors.

Madrid 2014.

Problema 39

Comproveu que la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ és regular (o inversible) i calculeu la seua matriu inversa.

Resoleu l'equació matricial $AXA = B$, essent $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Múrcia 2014.

Problema 40

a) Discutiu el següent sistema d'equacions en funció del paràmetre a:

$$\begin{cases} ax + 2z = 0 \\ ay - z = a \\ x - y + z = 0 \end{cases}.$$

b) Resoleu si és possible per al valor $a = 0$.

Múrcia 2014.

Problema 41

Sabent que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 4$, calculeu, sense desenvolupar ni utilitzar la regla de Sarrus, els següents determinants, indicant en cada pas quina propietat dels determinants heu utilitzat.

a) $\begin{vmatrix} 3x & 3y & 3z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x & 3y+2 & 3z+4 \\ x+2 & y+2 & z+2 \end{vmatrix}$

Múrcia 2014.

Problema 42

a) Discutiu el següent sistema d'equacions en funció del paràmetre a:

$$\begin{cases} ax + 3y + z = a \\ x + ay + az = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}.$$

b) Si és possible, resoleu-lo per al valor $a = -1$.

Múrcia 2014.

Problema 43

a) Discutiu el següent sistema d'equacions en funció del paràmetre a i resoleu-lo quan tinga solució única:

$$\begin{cases} ax + y = a \\ (a+1)x + y + z = a + 3 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

La Rioja 2014.

Problema 44
Discutiu el següent sistema d’equacions en funció del paràmetre b i resoleu-lo quan siga compatible:

$$\begin{cases} bx + y + z = 3 \\ x + y + z = 3 \\ 2x + y + bz = 3 \end{cases} .$$

La Rioja 2014.