

Problemes de Geometria

Problema 1

Considerem els punts $A(1, 1, 2)$, $B(1, -1, -2)$ i la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$.

- Determineu l'equació general del plànel que conté la recta r i és paral·lel a la recta que passa per A i per B .
 - Determineu el punt de la recta r que està a mínima distància de A i de B .
- Andalusia 2014.*

Problema 2

Siga la recta r que passa pels punts $A(1, 0, -1)$, $B(2, -1, 3)$.

- Calculeu la distància de l'origen de coordenades a la recta r .
 - Determineu l'equació de la recta que talla perpendicularment a r i passa per l'origen de coordenades.
- Andalusia 2014.*

Problema 3

Siga la recta r que passa pels punts $A(1, 0, -1)$, $B(-1, 1, 0)$.

- Determineu l'equació de la recta s paral·lela a r que passa per $C(-2, 3, 2)$.
 - Calculeu la distància de r a s .
- Andalusia 2014.*

Problema 4

Siga la recta r definida per $r \equiv \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$.

- Determineu l'equació general del plànel que conté r i passa per l'origen de coordenades.
 - Determineu les equacions paramètriques del plànel que talla perpendicularment a la recta r en el punt $(1, 1, 0)$.
- Andalusia 2014.*

Problema 5

Determineu el valor o valors de m , si existeixen, a fi que la recta $r \equiv \begin{cases} mx + y = 2 \\ x + mz = 3 \end{cases}$ siga

paral·lela al plànel $\Pi \equiv 2x - y - z + 6 = 0$.

Determineu la distància del punt $P(2, 1, 1)$ a la recta r quan $m = 2$.

Aragó 2014.

Problema 6

a) Estudieu la posició relativa dels plànols $\Pi \equiv x - y - z = 0$, $\Pi' \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda - \mu \\ y = 1 + \lambda + \mu \\ z = \mu \end{cases}$.

- Determineu l'equació de la recta perpendicular a Π que passa pel punt $P(1, 0, 1)$.
Escriviu l'equació de la recta com intersecció de dos plànols.
- Aragó 2014.*

Problema 7

Donats el punt $P(1, -1, 0)$ i la recta $s \equiv \begin{cases} -2x + z - 3 = 0 \\ 3x - y - 3 = 0 \end{cases}$

- Determineu l'equació general del plànel que conté el punt P i la recta s .
- Determineu l'angle que forma el plànel $\Pi \equiv 2x + y - z + 1 = 0$ i la recta s .

Aragó 2014.

Problema 8

Considereu les rectes $r \equiv \begin{cases} 2x - 4z - 3 = 2 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$, $s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y+2}{a} = \frac{z-\frac{1}{2}}{1}$.

- Determineu la posició relativa d'aquestes rectes, m segons els valors de a .
- Si $a = 2$, determineu l'angle que formen les rectes r , s .

Aragó 2014.

Problema 9

Considereu les rectes $r_1 \equiv x = z = 0$, $r_2 \equiv \begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{cases}$.

- Estudieu la posició relativa de r_1 i r_2 .
- Determineu, si és possible, un plànel paral·lel a r_1 i que continga a r_2 .

Astúries 2014.

Problema 10

Determineu l'àrea del triangle els vèrtexs del qual són els punts de tall del plànel $x + y - 2z - 1 = 0$ amb els eixos de coordenades.

Astúries 2014.

Problema 11

Considerem el punt $P(-1, 0, 1)$ i el plànel $\Pi \equiv x - y + z + 2 = 0$. Calculeu:

- Les equacions d'una recta que passe pel punt P i siga perpendicular al plànel Π .
- La distància del punt P al plànel Π .

Astúries 2014.

Problema 12

Considerem els punts de l'espai, $A(0, -1, 2)$, $B(2, 2, 3)$ i $C(0, 0, 3)$.

- Determineu l'equació general o implícita del plànel Π que passa pels punts A , B i C .
- Determineu les equacions d'una recta perpendicular a Π que passa per A .

Astúries 2014.

Problema 13

Siga el punt $A(1, 1, 3)$ i la recta d'equació $r \equiv \begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ z = 2 \end{cases}$.

- Determineu el plànel perpendicular a la recta r que passa per A .
- Determineu la distància del punt A a la recta r .

Castella i Lleó 2014.

Problema 14

a) Donats el punt $A(3, 5, 1)$, la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+2 = z+1$ i el plànel

$\Pi \equiv 3x - 2y + z + 5 = 0$ determineu el punt B de Π tal que la recta AB siga paral·lela a la recta r .

b) Determineu les components d'un vector de mòdul 1, que siga perpendicular als vectors \overrightarrow{PQ} i \overrightarrow{PR} , essent, $P(1, 3, -1)$, $Q(2, 0, 1)$, $R(-1, 1, 0)$.

Castella i Lleó 2014.

Problema 15

Siga el plànel Π que passa pels punts $A(1, -1, 1)$, $B(2, 3, 2)$ i $C(3, 1, 0)$ i r la recta

donada per $r \equiv \frac{x-7}{2} = \frac{y+6}{-1} = \frac{z+3}{2}$.

a) Determineu l'angle que formen la recta r i el plànel Π .

b) Calculeu els punts de la recta r que disten 6 unitats del plànel Π .

Castella i Lleó 2014.

Problema 16

Determineu la recta continguda en el plànel $\Pi_1 \equiv x + y + z = 3$, paral·lel al plànel

$\Pi_2 \equiv x = 0$ i que passa pel punt simètric de $B(-1, 1, 1)$ respecte de Π_2 .

Castella i Lleó 2014.

Problema 17

a) Estudieu en funció dels valors del paràmetre $a \in \mathbb{R}$ la posició relativa dels plànols

$\Pi_1 \equiv x + y - z = 3$, $\Pi_2 \equiv x - y + az = -1$, $\Pi_3 \equiv ax + y - z = 5$.

b) Calculeu, en funció de $a \in \mathbb{R}$, la distància entre els plànols Π_1 i Π_3 .

Castella la Manxa 2014.

Problema 18

a) Determineu $a \in \mathbb{R}$ a fi que les rectes $r \equiv \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -x + y - 3z = 2 \end{cases}$ i $s \equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + 2y + z = a \end{cases}$ es

tallen en un punt.

b) Per a aquest valor de a , determineu l'equació implícita del plànel Π que continga r i s .

Castella la Manxa 2014.

Problema 19

Donats el plànel $\Pi \equiv x - y = 4$ i la recta $r \equiv \begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + y + az = 0 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$ es demana:

Estudieu si existeix algun valor del paràmetre a a fi que r i Π siguin paral·lels.

Estudieu si existeix algun valor del paràmetre a a fi que r i Π es tallen perpendicularment.

Per a $a = 1$, determineu l'equació implícita del plànel Π' que continga r i talle perpendicularment a Π .

Castella la Manxa 2014.

Problema 20

Siga P el punt de coordenades $P(1, 0, 1)$ i la recta r d'equació $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 2z = 1 \end{cases}$.

Determineu l'equació en forma contínua d'una recta que passa pel punt P i siga paral·lela a la recta r.

Determineu l'equació general d'un plànol que passa pel punt P i continga la recta r.

Canàries 2014.

Problema 21

Determineu la posició relativa dels següents plànol

$$\Pi_1 \equiv \begin{cases} x = -1 + 3\lambda - 2\mu \\ y = 4 + \lambda \\ z = -2 + 2\lambda - 5\mu \end{cases}, \Pi_2 \equiv x + y + z = 2, \Pi_3 \equiv \begin{vmatrix} x - 2 & 1 & 2 \\ y + 1 & 2 & 3 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Canàries 2014.

Problema 22

Donats els punts $A(-1, 0, 3)$, $B(2, 4, 1)$ i $C(-4, 3, 1)$:

a) Estudieu si els punts A, B i C estan alineats.

b) Determineu l'equació de la recta paral·lela al segment \overline{AB} que passa per C. Expressen-la com intersecció de dos plànols.

Canàries 2014.

Problema 23

Determineu el valor de a a fi que la recta r d'equació $r \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$ siga paral·lela

al plànol $\Pi \equiv x - ay + 10z = -3$.

Canàries 2014.

Problema 24

Siguen r i s les rectes d'equacions $r \equiv x + 5 = y - 5 = \frac{z - 3}{2}$ i $s \equiv \frac{x - 3}{2} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z + 1}{-1}$.

a) Estudieu el paral·lelisme i la perpendicularitat entre les rectes r i s.

b) Determineu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz = D$) del plànol Π que conté la recta r i és paral·lel a la recta s. Calculeu la distància entre la recta s i el plànol Π obtingut.

Catalunya 2014.

Problema 25

Considerem el punt $A(1, 2, 3)$.

a) Determineu el punt simètric de A respecte de la recta d'equació

$$r \equiv (x, y, z) = (3 + \lambda, 1, 3 - \lambda).$$

b) Determineu el punt simètric de A respecte del plànol d'equació $\Pi \equiv x + y + z = 3$.

Catalunya 2014.

Problema 26

Siguen r i s les rectes de \mathbb{R}^3 d'equacions $r \equiv \frac{x-2}{3} = y = \frac{z+1}{4}$,

$s \equiv (x, y, z) = (1+2\alpha, 3-\alpha, 4+3\alpha)$ amb $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Comproveu que els punts migs dels segments que tenen un extrem situat en la recta r i l'altre extrem situat sobre la recta s formen un plànel.
- Determineu l'equació general (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz = D$) del plànel de l'apartat anterior.

Catalunya 2014.

Problema 27

a) Calculeu el valor del paràmetre k a fi que la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$ siga paral·lela al

plànel $\Pi \equiv kx + y + kz = 1$.

- Per al valor k obtingut en l'apartat anterior, calculeu la distància de la recta r i al plànel Π .

Extremadura 2014.

Problema 28

En \mathbb{R}^3 considerem quatre punts $A(0, 1, 1)$, $B(-2, 0, -1)$, $C(-1, 1, 0)$, $D(-2, 2, 1)$. I siga la recta r que passa per C i per D .

- Obteniu les equacions paramètriques de la recta r .

b) Determineu els punts P de la recta r per al quals el triangle $\triangle APB$ és rectangle en el vèrtex P .

Extremadura 2014.

Problema 29

Considerem en \mathbb{R}^3 les rectes $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$.

- Obteniu un vector director de la recta s .
- Obteniu l'equació del plànel Π que conté r i és paral·lela a s .
- Obteniu l'equació del plànel Π que conté r i és perpendicular a s .

Extremadura 2014.

Problema 30

a) Donat el plànel Π_1 d'equació $\Pi_1 \equiv z = 0$, escriviu les equacions de dos plànols Π_2 i Π_3 tal que els plànols Π_1 i Π_2 i Π_3 es tallen dos a dos però no existesca cap punts comú als tres.

b) Classifiqueu el sistema format per les equacions dels tres plànols Π_1 i Π_2 i Π_3 .

Extremadura 2014.

Problema 31

Donats els punts $A(2, 0, -2)$, $B(3, -4, -1)$, $C(5, 4, -3)$, $D(0, 1, 4)$, es demana:

- Calcular l'àrea del triangle de vèrtexs A , B , C .
- Calcular el volum del tetraedre $ABCD$.

Madrid 2014.

Problema 32

Donats els plànols

$$\Pi_1 \equiv 2x - z - 1 = 0, \quad \Pi_2 \equiv x + z + 2 = 0, \quad \Pi_3 \equiv x + 3y + 2z - 3 = 0, \text{ es demana:}$$

- Obtenir les equacions paramètriques de la recta determinada per Π_1 i Π_2 .
 - Calcular el sinus de l'angle que la recta de l'apartat anterior forma amb el plànel Π_3 .
- Madrid 2014.

Problema 33

Donats el plànel Π i la recta r següents $\Pi \equiv 2x - y + 2z + 3 = 0$, $r \equiv \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$.

- Estudieu la posició relativa de r i Π .
- Calculeu la distància entre r i Π .
- Obteniu el punt P' simètric de $P(3, 2, 1)$ respecte del plànel Π .

Madrid 2014.

Problema 34

Donats el punt $P(1, 0, 1)$, el plànel $\Pi \equiv x + 5y - 6z = 1$ i la recta $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, es demana:

- Calcular el punt P' simètric de P respecte de r .
- Calcular la distància de P a r .
- Calcular el volum del tetraedre format per l'origen de coordenades $O(0, 0, 0)$ i la intersecció de Π amb els eixos coordenats OX, OY, OZ .

Madrid 2014.

Problema 35

Donats el plànel $\Pi \equiv 2x - y = 2$ i la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y - 2z = 2 \end{cases}$, es demana:

Estudiar la posició relativa de r i Π .

Determinar el plànel que conté a r i és perpendicular a Π .

Determinar la recta que passa per $A(-2, 1, 0)$, talla a r i és paral·lela a Π .

Madrid 2014.

Problema 36

a) Estudieu la posició relativa de les rectes r i s en funció del paràmetre a :

$$r \equiv \begin{cases} x + 3y = 8 \\ 4y + z = 10 \end{cases}, \quad s \equiv \frac{x}{7} = \frac{y}{a-4} = \frac{z+6}{5a-6}.$$

b) Per al valor del paràmetre $a = 4$, determineu, si és possible, el punt de tall d'ambdues rectes.

Múrcia 2014.

Problema 37

Considerem la recta r i el plànel Π donat per les equacions següents:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-4} = \frac{z+1}{0} \quad \text{i} \quad \Pi \equiv 7x - y = 8.$$

- Comproveu que la recta r talla el plànel Π és tallen i calculeu l'angle que formen.
- Determineu el plànel que conté la recta r i és perpendicular al plànel Π .

Múrcia 2014.

Problema 38

a) Determineu per a quin valor del paràmetre a la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases}$ és

perpendicular al plànel $\Pi \equiv -6x + ay + 2z = 0$.

b) Demostreu que si $a = -8$, la recta r talla el plànel Π en un punt i determineu el punt de tall.

Múrcia 2014.

Problema 39

Dos dels tres vèrtexs d'un triangle són $A(1, 1, 1)$, $B(1, 1, 3)$. El vèrtex C pertany a la recta r que passa pels punts $P(-1, 0, 2)$, $Q(0, 0, 2)$.

Determineu l'equació de la recta r .

Calculeu les coordenades del vèrtex C per al qual l'àrea del triangle siga $\sqrt{15}$ unitats quadrades.

Observació: Hi ha dues solucions distintes. Només cal calcular una d'elles.

Múrcia 2014.

Problema 40

Siguen els vectors $u = (1, a, a)$, $v = (0, 0, 1)$, $w = (1, 1, a)$.

i) Determineu els valors de a a fi que els tres vectors siguin ortogonals.

ii) Determineu els valors de a per als quals el vector w està en el plànel que conté $O(0, 0, 0)$ i té per vectors directores u i v .

La Rioja 2014.

Problema 41

Considerem el plànel $\Pi_\alpha \equiv x - y + \alpha z = 0$ i la recta $r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

i) Estudieu segons els valors de α la posició relativa del plànel Π_α i la recta r .

ii) Quan Π_α i r es tallen en un punt, determineu les coordenades d'aquest punt.

La Rioja 2014.

Problema 42

Determineu els valors de a que compleixen l'equació $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 4 & 2 & a \end{vmatrix} = 0$.

Determineu un punt P de la recta $r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ que no siga coplanari amb els punts

$A(2, 1, 4)$, $B(1, 2, 2)$ i $C(1, 1, 2)$.

La Rioja 2014.

Problema 43

Considerem els punts $A(2, 6, -3)$, $B(3, 3, -2)$.

Determineu l'equació de la recta r que conté els punts A , B .

Determineu l'equació del plànel els punts del qual estan a la mateixa distància que a A i B .

Determineu el punt d'intersecció de la recta r i el plànel $x = 0$

La Rioja 2014.