Proves PAU's juliol 2014.

Problema A.1.
Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) El valor del determinant de la matriu $S = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ i la matriu S^{-1}, essent S^{-1} la matriu inversa de S. Indiqueu la relació entre el fet que el valor del determinant d'una matriu S siga nul o no i el fet que aquesta matriu S admeta matriu inversa S^{-1}.

b) El determinant de la matriu $\left(4\left(T^2\right)\right)^{-1}$, sabent que T és una matriu quadrada de 3 files i que 20 és el valor del determinant d'aquesta matriu T.

c) La solució a de l'equació $\begin{pmatrix} a & a^2-1 & -3 \\ a+1 & 2 & a^2+4 \\ -3 & 4a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a+1 & -3 \\ a^2-1 & 2 & 4a \\ -3 & a^2+4 & 1 \end{pmatrix}$.

Problema A.2.
Tenim els punts $A(1, 5, 7)$ i $B(3, -1, -1)$.
Es demana obtenir raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:
a) Les equacions dels plans Π_1, i Π_2, que són perpendiculars a la recta r que passa pels punts A I B sabent que el pla Π_1, passa pel punt A i el pla Π_2 passa pel punt mitjà del segment els extrems del qual són els punts A i B.
b) La distància entre els plans Π_1, i Π_2.
c) Les equacions de la recta r que passa pels punts A i B i els punts de la recta r que estan a distància 3 del punt $C(1, 0, 1)$.

Problema A.3.
Siga f la funció real definida per $f(x) = xe^x - 3x$.
Es demana l'obtenció raonada, escrivint tots els passos del raonament utilitzat de:
a) Els punts de tall de la corba $y = f(x)$ amb l'eix X.
b) El punt d'inflexió de la corba $y = f(x)$, i també la justificació raonada que la funció f és creixent quan $x > 2$.
c) L'àrea limitada per l'eix X i la corba $y = f(x)$ quan $0 \le x \le \ln 3$, on ln significa logaritme neperià.

Problema B.1.
Tenim els sistema d'equacions lineals $\begin{cases} (1-\alpha)x + 2y + z = 4 \\ x + y - 2z = -4 \\ x + 4y - (\alpha+1)z = -2\alpha \end{cases}$, on α és un paràmetre real.
Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:
a) Els valors del paràmetre α per als quals el sistema és incompatible.
b) Els valors del paràmetre α per als quals el sistema és compatible determinat.
c) Totes les solucions del sistema quan $\alpha = 2$.

Problema B.2.

Es donen les rectes $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 10 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x + y = 8 \\ x + y + z = 13 \end{cases}$.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:
a) Un vector director de cada recta i la posició relativa de les rectes r i s.
b) L'equació del pla que conté la recta s i és paral·lel a la recta r.
c) La distància entre les rectes r i s.

Problema B.3.

Un club esportiu lloga a l'empresa VR un avió de 80 places per a fer un viatge. Hi ha 60 membres del club que han reservat bitllet. En el contracte de lloguer, s'indica que el preu del bitllet serà 800€ si només viatgen 60 persones, però que el preu per bitllet disminueix en 10€ per cada viatger addicional a partir d'aquests 60 viatgers que ja han reservat el bitllet.
Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:
a) El total que cobra l'empresa VR si viatgen 61, 70, 80 passatgers.
b) El total que cobra l'empresa VR si viatgen $60 + x$ passatgers, essent $0 \leq x \leq 20$.
c) El nombre de passatgers entre 60 i 80 que maximitza el que cobra en total l'empresa VR.

Problema A.1.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) El valor del determinant de la matriu $S=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ i la matriu S^{-1}, essent S^{-1} la matriu inversa de S. Indiqueu la relació entre el fet que el valor del determinant d'una matriu S siga nul o no i el fet que aquesta matriu S admeta matriu inversa S^{-1}.

b) El determinant de la matriu $\left(4\left(T^2\right)\right)^{-1}$, sabent que T és una matriu quadrada de 3 files i que 20 és el valor del determinant d'aquesta matriu T.

c) La solució a de l'equació $\begin{pmatrix} a & a^2-1 & -3 \\ a+1 & 2 & a^2+4 \\ -3 & 4a & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & a+1 & -3 \\ a^2-1 & 2 & 4a \\ -3 & a^2+4 & 1 \end{pmatrix}$.

Solució:

a)

Utilitzant la regla de Sarrus: $|S|=20$.

Una matriu S té inversa si i només si $|S|\neq 0$, a més a més, $S^{-1}=\dfrac{1}{|S|}(\mathrm{AdjS})^t$.

On AdjS és la matriu que resulta de substituir els elements de la matriu S pels seus adjunts.

Aleshores, la matriu S anterior té inversa.

$A_{11}=+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=2$, $\quad A_{12}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=-6$, $\quad A_{13}=+\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=4$

$A_{21}=-\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=13$, $\quad A_{22}=+\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=11$, $\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=-4$

$A_{31}=+\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2$, $\quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1$, $\quad A_{33}=+\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=4$

$$S^{-1}=\frac{1}{|S|}(\mathrm{AdjS})^t=\frac{1}{20}\begin{pmatrix} 2 & 13 & 2 \\ -6 & 11 & -1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

b)

Propietats:

$\det(AB)=\det A\cdot\det B$. $\det\left(A^{-1}\right)=\dfrac{1}{\det A}$.

Si A és una matriu quadrada d'ordre 3, $\det(\alpha A)=\alpha^3\cdot\det A$

$$\det\left(\left(4\left(T^2\right)\right)^{-1}\right)=\frac{1}{\det\left(4\left(T^2\right)\right)}=\frac{1}{4^3\cdot(\det T)^2}=\frac{1}{4^3\cdot 20^2}=\frac{1}{25600}.$$

c)

Igualant els elements de les dues matrius: $\begin{cases} a^2-1=a+1 \\ a^4+4=4a \end{cases}$.

Resolent la primera equació $a=2,-1$.

Resolent la segona equació $a=2,2$.

La solució del sistema és igual a les solucions comunes a les dues equacions, és a dir, $a=2$.

Problema A.2.

Tenim els punts $A(1,5,7)$ i $B(3,-1,-1)$.

Es demana obtenir raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) Les equacions dels plans Π_1, i Π_2, que són perpendiculars a la recta r que passa pels punts A I B sabent que el pla Π_1, passa pel punt A i el pla Π_2 passa pel punt mitjà del segment els extrems del qual són els punts A i B.

b) La distància entre els plans Π_1, i Π_2.

c) Les equacions de la recta r que passa pels punts A i B i els punts de la recta r que estan a distància 3 del punt $C(1,0,1)$.

Solució:

a)

El vector director de la recta r és $\overrightarrow{AB} = (2,-6,-8)$.

Els vectors característics dels plànols Π_1, i Π_2 són el vector director de la recta r.

$\Pi_1 \equiv 2x - 6y - 8z + D = 0$.

El punt A pertany al plànol Π_1 aleshores satisfà la seua equació:

$2 \cdot 1 - 6 \cdot 5 - 8 \cdot 7 + D = 0$. Resolent l'equació:

$D = 84$.

$\Pi_1 \equiv 2x - 6y - 8z + 84 = 0$. Simplificant: $\Pi_1 \equiv x - 3y - 4z + 42 = 0$.

El punt mig M del segment $\overline{AB}$ té les coordenades:

$M(2,2,3)$.

$\Pi_2 \equiv 2x - 6y - 8z + D = 0$.

El punt A pertany al plànol Π_2 aleshores satisfà la seua equació:

$2 \cdot 2 - 6 \cdot 2 - 8 \cdot 3 + D = 0$. Resolent l'equació:

$D = 32$.

$\Pi_2 \equiv 2x - 6y - 8z + 32 = 0$. Simplificant: $\Pi_2 \equiv x - 3y - 4z + 16 = 0$.

b)

Els dels plànols Π_1, i Π_2 són paral·lels.

$$d(\Pi_1, \Pi_2) = d(A, \Pi_2) = \left| \frac{1 - 3 \cdot 5 - 4 \cdot 7 + 16}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-4)^2}} \right| = \frac{26}{\sqrt{26}} = \sqrt{26}.$$

c)

L'equació vectorial de la recta r és:

$r \equiv (x,y,z) = (1,5,7) + \alpha(1,-3,-4)$.

Un punt qualsevol de la recta r té coordenades $P(1+\alpha, 5-3\alpha, 7-4\alpha)$.

Volem que $d(P,C) = 3$. $\overrightarrow{CP} = (\alpha, 5-3\alpha, 6-4\alpha)$.

$\left\| \overrightarrow{CP} \right\| = 3$, $\sqrt{\alpha^2 + (5-3\alpha)^2 + (6-4\alpha)^2} = 3$. Elevant al quadrat i simplificant:

$\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$. Resolent l'equació $\alpha = 1, 2$.

Els punts que cerquem són:

$P_1(2,2,3)$, $P_2(3,-1,-1)$.

Problema A.3.

Siga f la funció real definida per $f(x) = xe^x - 3x$.

Es demana l'obtenció raonada, escrivint tots els passos del raonament utilitzat de:

a) Els punts de tall de la corba $y = f(x)$ amb l'eix X.

b) El punt d'inflexió de la corba $y = f(x)$, i també la justificació raonada que la funció f és creixent quan $x > 2$.

c) L'àrea limitada per l'eix X i la corba $y = f(x)$ quan $0 \le x \le \ln 3$, on ln significa logaritme neperià.

Solució:

a)

Per calcular els punts de tall amb l'eix X:

$f(x) = 0$.

$xe^x - 3x = 0$. Factoritzant:

$x(e^x - 3) = 0$, $x = 0$, $e^x - 3 = 0$. $e^x = 3$, $x = \ln 3$.

Els punts de tall són $(0, 0)$, $(\ln 3, 0)$.

b)

$f'(x) = (x+1)e^x - 3$.

$f''(x) = (x+2)e^x$.

$f'''(x) = (x+3)e^x$.

Per calcular els punts d'inflexió efectuem $f''(x) = 0$, $(x+2)e^x = 0$.

Resolent l'equació: $x = -2$.

$f'''(-2) = e^{-2} \neq 0$. Aleshores, en $x = -2$ la corba té un punt d'inflexió.

El punt d'inflexió és $\left(-2, \frac{-2}{e^2} - 6\right)$.

Si $x > 2$, $x + 1 > 3$ i $e^x > 1$, aleshores, $(x+1)e^x > 3$. Per tant, $f'(x) = (x+1)e^x - 3 > 0$.

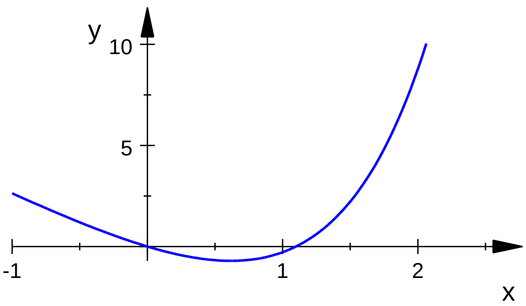
Aleshores, la funció és creixent quan $x > 2$.

c)

La funció $f(x) = xe^x - 3x$ és contínua i definida negativa en $0 \le x \le \ln 3$ ja que en $x = 0$, $x = \ln 3$ estan els punts de tall i $0 \le 1 \le \ln 3$, $f(1) = e - 3 < 0$.

L'àrea limitada per l'eix X i la corba $y = f(x)$ quan $0 \le x \le \ln 3$ és igual a:

$$S = -\int_0^{\ln 3} (xe^x - 3x)dx.$$



Calculem $\int xe^x dx$ utilitzant integració per parts:

$$u = x \qquad u = x$$
$$dv = e^x dx \;, \quad dv = e^x dx \;.$$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = (x-1)e^x + C$$

$$\int (xe^x - 3x)dx = (x-1)e^x - \frac{3}{2}x^2 + C.$$

$$S = -\int_0^{\ln 3} (xe^x - 3x)dx = -\left((x-1)e^x - \frac{3}{2}x^2\right)\Bigg]_0^{\ln 3} = -\left((-1+\ln 3)3 - \frac{3}{2}\ln^2 3 - (-1)\right) = 2 - 3\ln 3 + \frac{3}{2}\ln^2 3$$

$S \approx 0.5146u^2$.

Problema B.1.

Tenim els sistema d'equacions lineals $\begin{cases} (1-\alpha)x + 2y + z = 4 \\ x + y - 2z = -4 \\ x + 4y - (\alpha+1)z = -2\alpha \end{cases}$, on α és un paràmetre real.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) Els valors del paràmetre α per als quals el sistema és incompatible.

b) Els valors del paràmetre α per als quals el sistema és compatible determinat.

c) Totes les solucions del sistema quan $\alpha = 2$.

Solució:

Siga $A = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -(\alpha+1) \end{pmatrix}$ la matriu de coeficients, $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1-\alpha & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & -(\alpha+1) & -2\alpha \end{array}\right)$ la matriu ampliada.

Considerem el menor format per 2ª i 3ª fila i 1ª i 2ª columna de la matriu A:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$, aleshores, $\operatorname{rang} A \geq 2$.

$|A| = \begin{vmatrix} 1-\alpha & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -(\alpha+1) \end{vmatrix} = \alpha^2 - 6\alpha + 8$.

$|A| = 0$, $\alpha^2 - 6\alpha + 8 = 0$ - Resolent l'equació: $\alpha = 2, 4$.

Si $\alpha \neq 2, 4$, $\operatorname{rang} A = 3$, $\operatorname{rang} A' = 3$, aleshores, el sistema és compatible determinat.

Si $\alpha = 4$, $\operatorname{rang} A = 2$.

Considerem el menor format per 1ª, 2ª i 4ª columna de la matriu A':

$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -20 \neq 0$. Aleshores, $\operatorname{rang} A' = 3$.

Per tant, si $\alpha = 4$ el sistema és incompatible.

Si $\alpha = 2$, $\operatorname{rang} A = 2$.

Considerem el menor format per 1ª, 2ª i 4ª columna de la matriu A':

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0$. Aleshores, $\operatorname{rang} A' = 2$.

Per tant, si $\alpha = 2$ el sistema és compatible indeterminat.

Podem eliminar la primera equació que depén de les altres.

$\begin{cases} x + y - 2z = -4 \\ x + 4y - 3z = -4 \end{cases}$. Utilitzant el mètode de Gauss:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 1 & 4 & -3 & -4 \end{array}\right) \underset{F_2 = F_1 - F_2}{\equiv} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$. Els sistema és equivalent a: $\begin{cases} x + y - 2z = -4 \\ -3y + z = 0 \end{cases}$.

La solució és: $\begin{cases} x = -4 + 5\lambda \\ y = \lambda \\ z = 3\lambda \end{cases}$ on λ és un valor real.

Problema B.2.

Es donen les rectes $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 10 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x + y = 8 \\ x + y + z = 13 \end{cases}$.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:
a) Un vector director de cada recta i la posició relativa de les rectes r i s.
b) L'equació del pla que conté la recta s i és paral·lel a la recta r.
c) La distància entre les rectes r i s.

Solució:
a)
Resolent els sistemes de les equacions:

$r \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = 10 \end{cases}$, un punt de la recta r és $A(0, 0, 10)$ i el vector director, $v = (1, 1, 0)$.

$s \equiv \begin{cases} x = 8 - \beta \\ y = \beta \\ z = 5 \end{cases}$, un punt de la recta s és $B(8, 0, 5)$ i el vector director, $w = (-1, 1, 0)$.

$\{v, w\}$ són linealment independents.

$\overrightarrow{AB} = (8, 0, -5)$.

Considerem el determinant format pels vectors $\{v, w, \overrightarrow{AB}\}$.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$, aleshores, $\{v, w, \overrightarrow{AB}\}$ són linealment independents, per tant, les rectes r I s és creuen.

b)
El plànol Π que conté la recta s i és paral·lel a la recta r passa pel punt B I té per vectors directors $\{v, w\}$. L'equació general és:

$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x - 8 & y & z - 5 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Calculant el determinant: $\Pi \equiv z - 5 = 0$.

c)
La distància entre les rectes r i s que és creuen és igual a la distància d'un punt de la recta r al plànol que conté la recta s i és paral·lel a la recta r:

$$d(r, s) = d(A, \Pi) = \left| \frac{10 - 5}{\sqrt{0^2 + o^2 + 1^2}} \right| = 5.$$

Problema B.3.

Un club esportiu lloga a l'empresa VR un avió de 80 places per a fer un viatge. Hi ha 60 membres del club que han reservat bitllet. En el contracte de lloguer, s'indica que el preu del bitllet serà 800€ si només viatgen 60 persones, però que el preu per bitllet disminueix en 10€ per cada viatger addicional a partir d'aquests 60 viatgers que ja han reservat el bitllet.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) El total que cobra l'empresa VR si viatgen 61, 70, 80 passatgers.

b) El total que cobra l'empresa VR si viatgen $60+x$ passatgers, essent $0 \le x \le 20$.

c) El nombre de passatgers entre 60 i 80 que maximitza el que cobra en total l'empresa VR.

Solució:

a)

El total que cobra l'empresa és igual al nombre de viatgers pel preu del bitllet:

Per a 61 viatgers és: $(60+1)(800-10\cdot 1) = 48190€$.

Per a 70 viatgers és: $(60+10)(800-10\cdot 10) = 49000€$.

Per a 80 viatgers és $(60+20)(800-10\cdot 20) = 4800€$.

b)

Si $x = \text{viatgers addicionals}$.

El total que cobra l'empresa és:

$f(x) = (60+x)(800-10x)$.

$f(x) = -10x^2 + 200x + 48000$, $x \in [0, 20]$.

c)

La funció és una paràbola.

El màxim s'assoleix en el vèrtex de la paràbola $x = \dfrac{-200}{2\cdot(-10)} = 10$ persones addicionals.

Aleshores a fi que l'empresa maximitze el que cobra han de viatjar $60+10=70$ persones.

L'empresa guanyaria 49000€.