# Problemes Paus 2015 juliol.

**Problema A1**

Es dóna el sistema d'equacions $\begin{cases} x+3y+z=a \\ x+y-az=1 \\ 2x+ay-z=2a+3 \end{cases}$, on a és un paràmetre real.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:
a) La solució del sistema quan $a=-1$.
b) Totes les solucions del sistema quan $a=0$.
c) El valor de a per al qual el sistema és incompatible.

**Problema A2**

Es tenen les rectes $r \equiv \frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{2}$, $s \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=0 \end{cases}$ i el punt $P(0,3,-2)$.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:
a) Les equacions de la recta que passa pel punt P i és paral·lela a la recta r.
b) L'equació del plànol que conté la recta r i és paral·lel a la recta s.
c) La distància entre les rectes r i s.

**Problema A3**

Es dóna la funció f definida per $f(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:
a) El domini i les asímptotes de la funció f.
b) Els intervals de creixement i de decreixement de la funció f.
c) La integral $\int \frac{x}{(x+1)^2}dx$.

**Problema B1**

Es donen les matrius $A=\begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:
a) Els valors de x per als quals la matriu B té inversa.
b) El valor del determinant de les matrius $A^3$ i $\begin{pmatrix} 2x & 5 & -1 \\ 2y & 10 & 3 \\ 2z & 5 & 0 \end{pmatrix}$, sabent que el valor del determinant de la matriu A és 8.
c) Els valors de x, y, z per als quals $A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

**Problema B2**

Es donen les rectes $r \equiv \begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 6x - z + 8 = 0 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 3 - \alpha \end{cases}$ i el plànol $\Pi \equiv 2x + mz + 1 = 0$,

sent m un paràmetre real. Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:

a) La posició relativa de les rectes r i s i el punt (o punts) comuns a r i s.

b) El valor del paràmetre m perquè la recta s siga paral·lela al plànol $\Pi$.

c) L'equació del plànol que conté la recta s i el punt $P(1, 2, 4)$.

**Problema B3**

Es vol construir un dipòsit de $1500 m^3$ de volum, amb forma de caixa oberta per la part superior. La base és, doncs, un quadrat i les parets laterals són quatre rectangles iguals perpendiculars a la base.

El preu de cada $m^2$ de la base és de 15€ i el preu de cada $m^2$ de paret lateral és de 5€.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:

a) El cost total del dipòsit en funció de la longitud x d'un costat de la base.

b) Les longituds del costat de la base i de l'altura del dipòsit perquè aquest cost total siga mínim.

c) El valor del mínim cost total del dipòsit.

**Problema A1**

Es dóna el sistema d'equacions $\begin{cases} x+3y+z=a \\ x+y-az=1 \\ 2x+ay-z=2a+3 \end{cases}$, on a és un paràmetre real.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:
a) La solució del sistema quan $a=-1$.
b) Totes les solucions del sistema quan $a=0$.
c) El valor de a per al qual el sistema és incompatible.

Solució:

La matriu de coeficients és $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -a \\ 2 & a & -1 \end{pmatrix}$.

$|A| = a^2 - 5a$.

$|A| = 0$ si $a = 0{,}5$.

Si $a \neq 0{,}5$, $|A| \neq 0$, el sistema és de Cramer, per tant, compatible determinat.

a)

Si $a=-1$, $|A|=6$ el sistema de és Cramer, $\begin{cases} x+3y+z=-1 \\ x+y+z=1 \\ 2x-y-z=1 \end{cases}$. Aplicant la regla de Cramer:

$$\begin{cases} x=\dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{6}=\dfrac{2}{3} \\ y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{6}=1 \\ z=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{6}=\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

b)

Si $a=0$, $\begin{cases} x+3y+z=0 \\ x+y=1 \\ 2x-z=3 \end{cases}$, $\text{rang}A<3$. Considerem el menor format per les dues primeres files i columnes de la matriu de coeficients: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$, aleshores, $\text{rang}A \geq 2$. Per tant, $\text{rang}A = 2$.

Considerem el menor format per les columnes 1ª, 2ª i 4ª de la matriu ampliada:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$. Aleshores, $rangA' = 2$.

$rangA = rangA' = 2 < 3 = n.i.$, aleshores els sistema és compatible indeterminat.

$\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$. $\begin{cases} x + z = -3y \\ x = 1 - y \end{cases}$.

La solució del sistema és: $\begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = \mu \\ z = -1 - 2\mu \end{cases}$.

c)

Si $a = 5$, $\begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ x + y - 5z = 1 \\ 2x + 5y - z = 13 \end{cases}$, $rangA < 3$. Considerem el menor format per les dues primeres files i columnes de la matriu de coeficients: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, aleshores, $rangA \geq 2$. Per tant, $rangA = 2$.

Considerem el menor format per les columnes 1ª, 2ª i 4ª de la matriu ampliada:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 13 \end{vmatrix} = -10 \neq 0$. Aleshores, $rangA' = 3$.

$rangA \neq rangA'$, aleshores el sistema és incompatible.

**Problema A2**

Es tenen les rectes $r \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$, $s \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 0 \end{cases}$ i el punt $P(0,3,-2)$.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:
a) Les equacions de la recta que passa pel punt P i és paral·lela a la recta r.
b) L'equació del plànol que conté la recta r i és paral·lel a la recta s.
c) La distància entre les rectes r i s.

Solució:
$r \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. Un punt de la recta r és $A(-1,1,0)$ i el vector director és $v_r = (3,-1,2)$.

$s \equiv \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 0 \end{cases}$. Un punt de la recta s és $B(1,0,0)$ i el vector director és $v_s = (1,-1,0)$.

a)
El vector director de la recta paral·lela és $v_r = (3,-1,2)$. La seua equació és:

$$\frac{x-0}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{2}.$$

b)
L'equació del plànol té per vectors directors $v_r = (3,-1,2)$, $v_s = (1,-1,0)$. La seua equació vectorial és:

$\Pi \equiv (x,y,z) = (-1,1,0) + \alpha(3,-1,2) + \beta(1,-1,0)$.

c)
Les rectes r, s són secants o es creuen ja que els vectors directors d'ambdues són linealment independents.

La distància entre les dues rectes és: $d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, v_r, v_s\right]\right|}{\left\|v_r \times v_s\right\|}$.

$\overrightarrow{AB} = (2,-1,0)$.

$\left[\overrightarrow{AB}, v_r, v_s\right] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2$. $v_r \times v_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2j - 3k + k + 2i = (2,2,-2)$.

$\left\|v_r \times v_s\right\| = \left\|(2,2,-2)\right\| = 2\sqrt{3}$.

Aleshores, $d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, v_r, v_s\right]\right|}{\left\|v_r \times v_s\right\|} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

**Problema A3**

Es dóna la funció f definida per $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:
a) El domini i les asímptotes de la funció f.
b) Els intervals de creixement i de decreixement de la funció f.
c) La integral $\displaystyle\int\frac{x}{(x+1)^2}dx$.

Solució:
a)
No hi ha domini quan el denominador és zero.
El domini és $Dom=R-\{x\in R\ /\ (x+1)^2=0\}=R-\{-1\}=\left]-\infty,-1\right[\cup\left]-1,+\infty\right[$.
La asímptota vertical és la recta $x=-1$. La tendència és:

$\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{x}{(x+1)^2}=-\infty$. $\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{x}{(x+1)^2}=-\infty$.

Les asímptotes horitzontals són la recta $y=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{(x+1)^2}=0$. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{(x+1)^2}=0$.

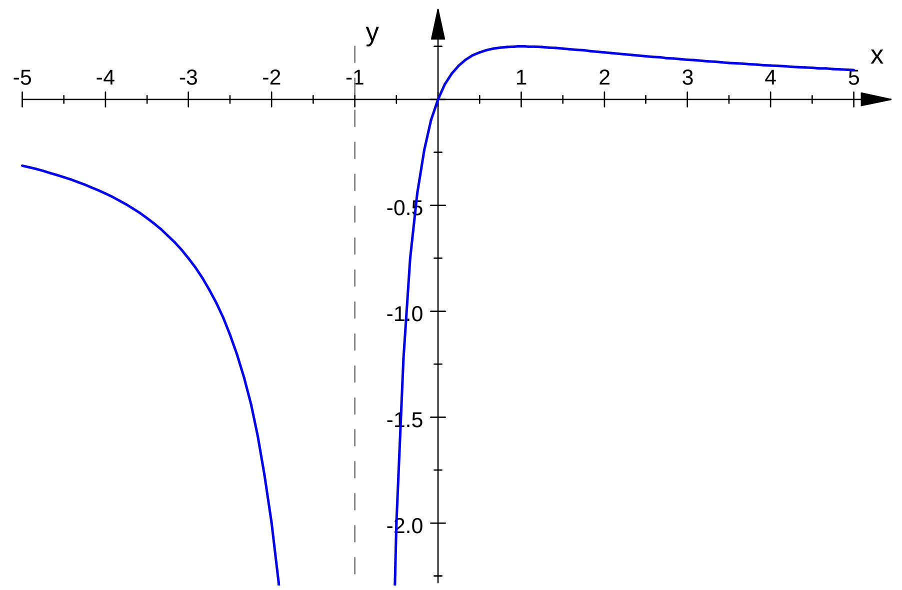
Quan $x\to-\infty$ la corba va per sota de l'asímptota $y=0$.
Quan $x\to+\infty$ la corba va per dalt de l'asímptota $y=0$.
b)
$f'(x)=\dfrac{-x+1}{(x+1)^3}$.

La funció és creixent quan $f'(x)>0$. $\dfrac{-x+1}{(x+1)^3}>0$. Resolent la inequació: $x\in\left]-1,1\right[$.

La funció és decreixent quan $f'(x)<0$. $\dfrac{-x+1}{(x+1)^3}<0$. Resolent la inequació:

$x\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$.

En $x=1$ la funció és contínua i passa de ser creixent a decreixent, aleshores, és un màxim relatiu estricte.



c)

El denominador de la fracció algebraica $\frac{x}{(x+1)^2}$ té una arrel $x = 1$ de multiplicitat 2.

La descomposició en fraccions simples és:

$\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$. Determinem A i B.

$\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2}$.

$x = A(x+1)+B$.

Per a $x = -1$, $B = -1$.

Per a $x = 0$, $A + B = 0$. Aleshores, $A = 1$.

$\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{-1}{(x+1)^2}$.

$$\int \frac{x}{(x+1)^2}dx = \int \frac{1}{x+1}dx + \int \frac{-1}{(x+1)^2}dx = \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C.$$

**Problema B1**

Es donen les matrius $A = \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z & 1 & 0 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:

a) Els valors de x per als quals la matriu B té inversa.

b) El valor del determinant de les matrius $A^3$ i $\begin{pmatrix} 2x & 5 & -1 \\ 2y & 10 & 3 \\ 2z & 5 & 0 \end{pmatrix}$, sabent que el valor del determinant de la matriu A és 8.

c) Els valors de x, y, z per als quals $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Solució:

a)

La matriu B té inversa si i només si $|B| \neq 0$.

$$|B| = \begin{vmatrix} x & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 - 3x.$$

$|B| \neq 0$ si $x \neq \frac{-1}{3}$.

b)

$\det A^3 = (\det A)^3 = 8^3$.

$\det \begin{pmatrix} 2x & 5 & -1 \\ 2y & 10 & 3 \\ 2z & 5 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot 5 \cdot \det A = 2 \cdot 5 \cdot 8$.(notem que la matriu té la 1ª columna i la segona columna de la matriu A multiplicada per 2 i 5, respectivament)

c)

$$A^2 = \begin{pmatrix} x^2 + y - z & x + 1 & -x + 3 \\ xy + 2y + 3z & y + 7 & -y + 6 \\ xz + y & z + 2 & -z + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & 6 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Igualant els elements de la tercera columna:

$\begin{cases} -x + 3 = 4 \\ -y + 6 = 6 \\ -z + 3 = 2 \end{cases}$. Resolent el sistema: $\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$.

Aquestes solucions satisfan totes les 9 equacions.

**Problema B2**

Es donen les rectes $r \equiv \begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 6x - z + 8 = 0 \end{cases}$, $s \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 3 - \alpha \end{cases}$ i el plànol $\Pi \equiv 2x + mz + 1 = 0$,

sent m un paràmetre real. Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:

a) La posició relativa de les rectes r i s i el punt (o punts) comuns a r i s.

b) El valor del paràmetre m perquè la recta s siga paral·lela al plànol $\Pi$.

c) L'equació del plànol que conté la recta s i el punt $P(1,2,4)$.

Solució:

$r \equiv \begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 6x - z + 8 = 0 \end{cases}$, $r \equiv \begin{cases} y = 2x + 5 = 0 \\ z = 6x + 8 = 0 \end{cases}$. $r \equiv \begin{cases} x = \beta \\ y = 5 + 2\beta \\ z = 8 + 6\beta \end{cases}$.

Un punt de la recta r és $A(0,5,8)$ i el vector director és $v_r = (1,2,6)$.

$s \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 3 - \alpha \end{cases}$. Un punt de la recta s és $B(1,2,3)$ i el vector director és $v_s = (-2,1,-1)$.

a)

$\{v_r, v_s\}$ són linealment independents aleshores les rectes són secants o bé és creuen.

$\overrightarrow{AB} = (1, -3, -5)$.

Calculem el determinant format pels vectors $\{\overrightarrow{AB}, v_r, v_s\}$.

$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 1 & 2 & 6 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, aleshores, $\{\overrightarrow{AB}, v_r, v_s\}$ són linealment dependents.

Aleshores, les rectes són secants.

El punt on és tallen es igual a la solució de sistema format per les dues rectes:

$\begin{cases} x = \beta = 1 - 2\alpha \\ y = 5 + 2\beta = 2 + \alpha \\ z = 8 + 6\beta = 3 - \alpha \end{cases}$.

Resolent l'equació és: $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \end{cases}$, $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$.

El punt intersecció de les dues rectes és $Q(-1,3,-2)$.

b)

El vector característic o normal del plànol $\Pi \equiv 2x + mz + 1 = 0$ és $a = (2,0,m)$.

La recta $s \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = 2 + \alpha \\ z = 3 - \alpha \end{cases}$ i el plànol $\Pi \equiv 2x + mz + 1 = 0$ són paral·lels si el vector director de la recta i el característic del plànol són ortogonals:

$v_s \cdot a = 0$.

$(-2,1,-1)(2,0,m) = 0$. $-4 - m = 0$.

Resolent l'equació: $m = -4$.

c)
$\overrightarrow{PB} = (0,0,-1)$.

Els vectors $\overrightarrow{PB} = (0,0,-1)$, $v_s = (-2,1,-1)$ són linealment independents.

El plànol que cerquem passa pel punt P i té per vectors directors $\{\overrightarrow{PB}, v_s\}$.

La seua equació és:
$\Omega \equiv (x,y,z) = (1,2,4) + \lambda(0,0,-1) + \mu(-2,1,-2)$.

**Problema B3**

Es vol construir un dipòsit de $1500m^3$ de volum, amb forma de caixa oberta per la part superior. La base és, doncs, un quadrat i les parets laterals són quatre rectangles iguals perpendiculars a la base.

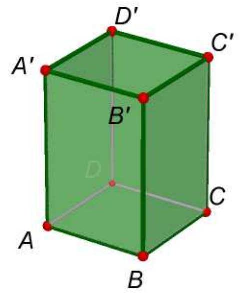
El preu de cada $m^2$ de la base és de 15€ i el preu de cada $m^2$ de paret lateral és de 5€.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:

a) El cost total del dipòsit en funció de la longitud x d'un costat de la base.

b) Les longituds del costat de la base i de l'altura del dipòsit perquè aquest cost total siga mínim.

c) El valor del mínim cost total del dipòsit.




Solució:

Siga ABCDA'B'C'D' el dipòsit de base el quadrat ABCD

Siga $\overline{AB} = x$ aresta de la base, $\overline{AA'} = h$ altura.

El volum del dipòsit és $1500m^3$:

$V = x^2h = 1500$.

Aleshores, $h = \dfrac{1500}{x^2}$.

El cost total del dipòsit és:

$C(x, h) = x^2 + 4(xh)$.

$C(x) = 15x^2 + 5\left(4x\dfrac{1500}{x^2}\right)$.

$C(x) = 15x^2 + \dfrac{30000}{x}$, $x \geq 0$.

$C'(x) = 30x - \dfrac{30000}{x^2}$.

$C'(x) = 0$, $30x - \dfrac{30000}{x^2} = 0$.

Resolent l'equació: $x = 10$.

$C''(x) = 30 + \dfrac{60000}{x^3}$.

$C''(10) = 90 > 0$.

Aleshores, $x = 10$ és un mínim relatiu estricte.

$C(10) = 15 \cdot 10^2 + \dfrac{30000}{10} = 4500$.

Les dimensions del dipòsit de cost mínim són $x = 10m$ d'aresta de la base i $h = \dfrac{1500}{10^2} = 15m$ d'altura.

El cost mínim són 4500€.