Problemes Paus 2016 juliol.

Problema A1

Es dóna el sistema d'equacions $\begin{cases} x+y+2z=2 \\ -3x+2y+3z=-2 \\ 2x+ay-5z=-4 \end{cases}$, on a és un paràmetre real.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:
a) La solució del sistema quan $a=0$.
b) El valor del paràmetre a per al qual el sistema és incompatible.
c) Els valors del paràmetre a per al qual el sistema és compatible i determinat.
Obteniu la solució del sistema en funció del paràmetre a.

Problema A2

Es donen els punts $A(0,0,1)$, $B(1,0,-1)$, $C(0,1,-2)$, $D(1,2,0)$.
Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:
a) L'equació del plànol Π que conté els punts A, B i C.
b) La justificació que els quatre punts A, B, C i D, no són coplanaris.
c) La distància del punt D al plànol Π. El volum del tetràedre els vèrtexs del qual són A, B, C, D.

Problema A3

Es dóna la funció f(x) definida per $f(x)=x^2+|x|$, on x és un nombre real qualsevol i $|x|$ representa el valor absolut de x.
Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:
a) El punt o punts on la gràfica de la funció f(x) talla els eixos de coordenades.
b) La justificació que la corba f(x) és simètrica respecte de l'eix de coordenades.
c) Els intervals de creixement i de decreixement de la funció f(x), i l'extrem relatiu de l funció f(x), justificant si és màxim o mínim relatiu.
d) La representació gràfica d'aquesta corba $y=f(x)$.
e) Les integrals definides $\int_{.1}^{0} f(x)dx$, $\int_{0}^{2} f(x)dx$.

Problema B1

Es donen les matrius $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ i $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:
a) El determinant de les matrius $A\cdot\left(2\cdot B^2\right)$, $A\cdot\left(2\cdot B^2\right)\cdot(3A)^{-1}$.
b) Les matrius A^{-1} i $\left((B\cdot A)^{-1}\cdot B\right)^{-1}$.
c) La solució de l'equació matricial $A\cdot X+B\cdot X=3\cdot I$.

Problema B2

Es donen els plànols $\Pi \equiv x + y + z = 1$, $\Omega \equiv ax + by + z = 0$, on a i b són dos paràmetres reals.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:

a) Els valors a i b per als quals el plànol Ω passa pel punt $(1, 2, 3)$ i a més, aquest plànol Ω és perpendicular al plànol Π.

b) Els valors a i b per als quals ocorre que el plànol Ω passa pel punt $(0, 1, 1)$ i la distància del punt $(1, 0, 1)$ al plànol Ω és 1.

c) Els valors a ib per als quals la intersecció dels plànols Π i Ω és la recta r per a la qual el vector $(3, 2, -5)$ és un vector director d'aquesta recta r.

Problema B3

La diferencia de potencial x entre dos punts d'un circuit elèctric provoca el pas d'un corrent elèctric d'intensitat y, que està relacionat amb la diferència de potencial x per l'equació $y = -x^2 - x + 6$, sent $0 \le x \le 2$.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:

a) La gràfica de la funció $f(x) = -x^2 - x + 6$ i obteniu, gràficament o analíticament, el valor de la intensitat y quan la diferència de potencial és 0, i el valor de la fiferència de potencial x al qual correspon una intensitat y igual a 0, sent $0 \le x \le 2$.

b) El valor de la diferència de potencial x per al qual és màxim el producte y·x de la intensitat y per la diferència de potencial x, quan $0 \le x \le 2$, i obteniu el valor màxim d'aquest producte y·x, quan $0 \le x \le 2$.

c) L'àrea de la superfície situada en el primer quadrat limitada per la corba $y = f(x)$, l'eix d'abscisses i l'eix d'ordenades.

Problema A1

Es dóna el sistema d'equacions $\begin{cases} x+y+2z=2 \\ -3x+2y+3z=-2 \\ 2x+ay-5z=-4 \end{cases}$, on a és un paràmetre real.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:
a) La solució del sistema quan $a=0$.
b) El valor del paràmetre a per al qual el sistema és incompatible.
c) Els valors del paràmetre a per al qual el sistema és compatible i determinat. Obteniu la solució del sistema en funció del paràmetre a.

Solució:

La matriu de coeficients és $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & a & -5 \end{pmatrix}$.

$|A|=-9a-27$.

$|A|=0$ si $a=-3$.

Si $a\neq 0,5$, $|A|\neq 0$, el sistema és de Cramer, per tant, compatible determinat.

a)

Si $a=0$, $|A|=-27$ el sistema de és Cramer, $\begin{cases} x+y+2z=2 \\ -3x+2y+3z=-2 \\ 2x \qquad -5z=-4 \end{cases}$. Aplicant la regla de Cramer:

$$\begin{cases} x=\dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{-27}=\dfrac{26}{27} \\ y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}}{-27}=\dfrac{-4}{3} \\ z=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix}}{-27}=\dfrac{32}{27} \end{cases}$$

b)

Si $a=-3$, $\begin{cases} x+y+2z=2 \\ -3x+2y+3z=-2 \\ 2x-3y-5z=-4 \end{cases}$, $\text{rang}A<3$. Considerem el menor format per les dues primeres files i columnes de la matriu de coeficients: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=5\neq 0$, aleshores, $\text{rang}A\geq 2$. Per tant, $\text{rang}A=2$.

Considerem el menor format per les columnes 1ª, 2ª i 4ª de la matriu ampliada:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & -4 \end{vmatrix} = -20 \neq 0$$. Aleshores, $\text{rang}A' = 3$.

$\text{rang}A \neq \text{rang}A'$, aleshores els sistema és incompatible.

c)

Si $a \neq -3$, $\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -3x + 2y + 3z = -2 \\ 2x + ay - 5z = -4 \end{cases}$, el sistema és compatible determinat.

Aplicant la regla de Cramer la solució del sistema és:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \\ -4 & a & -5 \end{vmatrix}}{-27} = \dfrac{10a + 26}{9a + 27} \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \\ 2 & a & -5 \end{vmatrix}}{-27} = \dfrac{-4}{a + 3} \\ z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \\ 2 & a & -4 \end{vmatrix}}{-27} = \dfrac{4a + 32}{9a + 27} \end{cases}$$

Problema A2

Es donen els punts $A(0,0,1)$, $B(1,0,-1)$, $C(0,1,-2)$, $D(1,2,0)$.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:

a) L'equació del plànol Π que conté els punts A, B i C.

b) La justificació que els quatre punts A, B, C i D, no són coplanaris.

c) La distància del punt D al plànol Π. El volum del tetràedre els vèrtexs del qual són A, B, C, D.

Solució:

a)

$\overrightarrow{AB}=(1,0,-2)$, $\overrightarrow{AC}=(0,1,-3)$. Són linealment independents per tant vectors directors del plànol que conté els punts A, B, C.

L'equació general del plànol Π és:

$$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0.$$ Simplificant:

$\Pi \equiv 2x+3y+z-1=0$.

b)

Vegem si D pertany al plànol Π. (vegem si satisfà la seua equació:

$2\cdot 1+3\cdot 2+0-1\neq 0$. Aleshores D no pertany al plànol Π, per tant els quatre punts A, B, C, D no són coplanaris.

c)

Calculem la distància del punt D al plànol $\Pi \equiv 2x+3y+z-1=0$:

$$d(D,\Pi)=\left|\frac{2\cdot 1+3\cdot 2+0-1}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}\right|=\frac{7}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{2}.$$

$\overrightarrow{AD}=(1,2,-1)$.

El volum de tetràedre format per 4 punts és $V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]\right|$.

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}|7|=\frac{7}{6}.$$

Problema A3

Es dóna la funció f(x) definida per $f(x) = x^2 + |x|$, on x és un nombre real qualsevol i $|x|$ representa el valor absolut de x.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:

a) El punt o punts on la gràfica de la funció f(x) talla els eixos de coordenades.

b) La justificació que la corba f(x) és simètrica respecte de l'eix de coordenades.

c) Els intervals de creixement i de decreixement de la funció f(x), i l'extrem relatiu de l funció f(x), justificant si és màxim o mínim relatiu.

d) La representació gràfica d'aquesta corba $y = f(x)$.

e) Les integrals definides $\int_{.1}^{0} f(x)dx$, $\int_{0}^{2} f(x)dx$.

Solució:

a)

Definim la funció f(x) a trossos:

$$f(x) = x^2 + |x| = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x \le 0 \\ x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

$x = 0$, $f(0) = 0^2 + |0| = 0$, el punt $(0, 0)$ és punt de tall amb l'eix d'ordenades.

Siga $f(x) = 0$.

Si $x \le 0$, $\begin{cases} x^2 - x = 0 \\ x \le 0 \end{cases}$ la solució del sistema és $x = 0$. el punt $(0, 0)$ és punt de tall amb l'eix d'abscisses.

Si $x > 0$, $\begin{cases} x^2 + x = 0 \\ x > 0 \end{cases}$ el sistema no té solució.

b)

Per veure que la funció és simètrica respecte de l'eix d'ordenades hem de provar que $f(-x) = f(x)$.

$|-x| = |x|$ per a qualsevol nombre real x.

$f(-x) = x^2 + |-x| = x^2 + |x| = f(x)$.

c)

Notem que la funció f(x) és contínua en $x = 0$.

$f(0) = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 - x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 + x = 0$.

Aleshores, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(x) = 0$. Per tant, la funció és contínua en $x = 0$.

Estudiem la derivabilitat de la funció.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Vegem si la funció és derivable en $x = 0$.

$\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 2x - 1 = -1$.

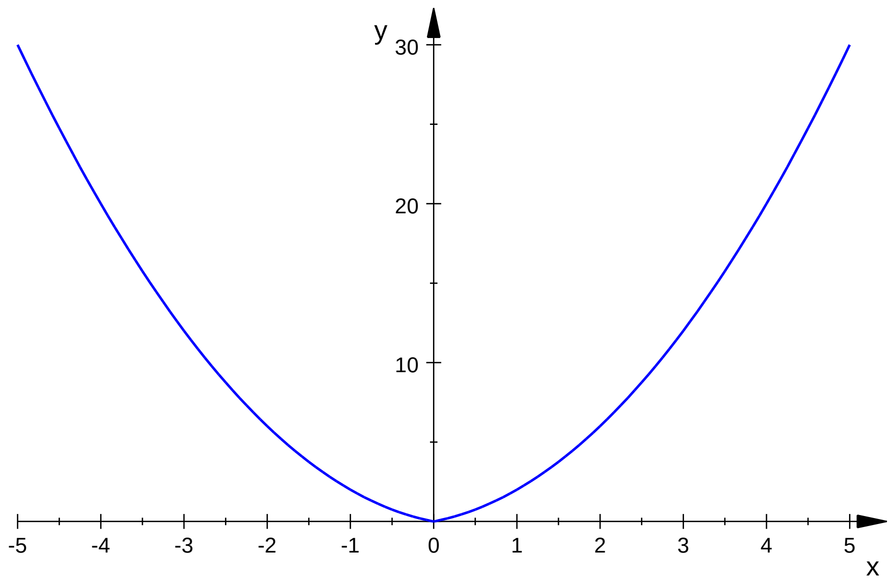
$\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 2x + 1 = 1$.

La funció no és derivable en $x = 0$. La funció f(x) té un punt angulós en $x = 0$ ja que en aquest punt és contínua i no és derivable.

Si $x < 0$, $f'(x) = 2x - 1 < 0$. La funció en $\left]-\infty, 0\right[$ és estrictament decreixent.
Si $x > 0$, $f'(x) = 2x + 1 > 0$. La funció en $\left]0, +\infty\right[$ és estrictament creixent.
La funció f(x) quan $x = 0$ té un mínim relatiu ja que la funció és contínua i passa de ser decreixent a creixent.
El punt $(0, 0)$ és el mínim relatiu i absolut.

d)

Representem la funció definida a trossos $f(x) = x^2 + |x| = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x \le 0 \\ x^2 + x & \text{si } x > 0 \end{cases}$:



e)

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx = \int_{-1}^{0} \left(x^2 - x\right) dx = \left[\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6}.$$

$$\int_{0}^{2} f(x)dx = \int_{0}^{2} \left(x^2 + x\right) dx = \left[\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\right]_{0}^{2} = \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{2}\right) - 0 = \frac{14}{3}.$$

Problema B1

Es donen les matrius $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&1&2\\1&0&-1\end{pmatrix}$ i $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:

a) El determinant de les matrius $A\cdot\left(2\cdot B^2\right)$, $A\cdot\left(2\cdot B^2\right)\cdot(3A)^{-1}$.

b) Les matrius A^{-1} i $\left((B\cdot A)^{-1}\cdot B\right)^{-1}$.

c) La solució de l'equació matricial $A\cdot X+B\cdot X=3\cdot I$.

Solució:

Utilitzarem les propietats:

$\det(M\cdot N)=\det(M)\cdot\det(N)$.

Una matriu quadrada d'ordre 3, i $\alpha\in R$, aleshores, $\det(\alpha M)=\alpha^3\det(M)$.

$\det\left(M^{-1}\right)=\dfrac{1}{\det(M)}$.

$(M\cdot N)^{-1}=N^{-1}\cdot M^{-1}$.

a)

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1&1&-1\\1&2&1\\0&1&1\end{vmatrix}=-1,\ \det(B)=\begin{vmatrix}0&1&-1\\2&1&2\\1&0&-1\end{vmatrix}=5.$$

$$\det\left(A\cdot\left(2\cdot B^2\right)\right)=\det(A)\cdot 2^3\cdot\left(\det(B)\right)^2=-1\cdot 8\cdot 5^2=-200.$$

$$\det\left(A\cdot\left(2\cdot B^2\right)\cdot(3A)^{-1}\right)=\det\left(A\cdot\left(2\cdot B^2\right)\right)\cdot\det\left((3A)^{-1}\right)-200\cdot\frac{1}{3^3\det(A)}=-200\frac{1}{-27}=\frac{200}{27}.$$

b)

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(AdjA)^t.$$

Determinem els elements de la matriu adjunta de A, AdjA:

$A_{11}=+\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1$ $\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=-1$ $\quad A_{13}=+\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}=1.$

$A_{21}=-\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=-2$ $\quad A_{22}=+\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}=1$ $\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}=-1.$

$A_{31}=+\begin{vmatrix}1&-1\\2&1\end{vmatrix}=3$ $\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1&-1\\1&1\end{vmatrix}=-2$ $\quad A_{33}=+\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=1.$

$$AdjA=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-2&1&-1\\3&-2&1\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(AdjA)^t=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}1&-2&3\\-1&1&-2\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2&-3\\1&-1&2\\-1&1&-1\end{pmatrix}.$$

$$\left((B\cdot A)^{-1}\cdot B\right)^{-1}=\left(A^{-1}\cdot B^{-1}\cdot B\right)^{-1}=\left(A^{-1}\cdot I\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{-1}=A.$$

c)

$A \cdot X + B \cdot X = 3 \cdot I$

$(A + B) \cdot X = 3 \cdot I.$

$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3$. Aleshores, l'equació té solució.

$X = 3 \cdot (A + B)^{-1}.$

$$(A + B)^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -2 & 12 \\ 3 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$X = 3(A + B)^{-1} = 3 \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & -2 & 12 \\ 3 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 12 \\ 3 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Problema B2
Es donen els plànols $\Pi \equiv x+y+z=1$, $\Omega \equiv ax+by+z=0$, on a i b són dos paràmetres reals.
Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:
a) Els valors a i b per als quals el plànol Ω passa pel punt $(1,2,3)$ i a més, aquest plànol Ω és perpendicular al plànol Π.
b) Els valors a i b per als quals ocorre que el plànol Ω passa pel punt $(0,1,1)$ i la distància del punt $(1,0,1)$ al plànol Ω és 1.
c) Els valors a ib per als quals la intersecció dels plànols Π i Ω és la recta r per a la qual el vector $(3,2,-5)$ és un vector director d'aquesta recta r.

Solució:
El vector característic del plànol Π és:
$v_\Pi = (1,1,1)$.
El vector característic del plànol Ω és:
$v_\Omega = (a,b,1)$.
a)
Si el punt $(1,2,3)$ pertany a Ω, satisfà la seua equació:
$a\cdot 1 + b\cdot 2 + 3 = 0$.
$a + 2b = -3$.
Es plànols Π i Ω són perpendiculars si els seus vectors característics són ortogonals, és a dir el seu producte escalar és zero.
$v_\Pi \cdot v_\Omega = 0$
$(1,1,1)(a,b,1) = 0$.
$a + b + 1 = 0$.
Considerem els sistema format per les dues equacions $\begin{cases} a+2b=-3 \\ a+b=-1 \end{cases}$.
Resolent el sistema: $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$.
b)
Si el punt $(0,1,1)$ pertany a Ω, satisfà la seua equació:
$a\cdot 0 + b\cdot 1 + 1 = 0$.
$b = -1$.
La distància del punt $(1,0,1)$ al plànol Ω és 1:
$\left|\dfrac{a\cdot 1 + b\cdot 0 + 1}{\sqrt{a^2+b^2+1^2}}\right| = 1$. Elevant al quadrat:
$$\frac{(a+1)^2}{a^2+b^2+1} = 1^2.$$
Simplificant:
$a^2 + 2a + 1 = a^2 + b^2 + 1$.
$2a = b^2$.
Considerem els sistema format per les dues equacions $\begin{cases} b=-1 \\ 2a=b^2 \end{cases}$.
Resolent el sistema: $\begin{cases} a=\dfrac{1}{2} \\ b=-1 \end{cases}$.

c)
El vector director de la recta r és perpendicular als vectors característics dels plànols Π i Ω.
Un vector director de la recta r és proporcional al vector producte vectorial dels vectors característics dels plànols Π i Ω

$$v_{\Pi} \times v_{\Omega} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = i + aj + bk - ak - j - bi = (1-b, a-1, b-a).$$

Els vectors $v_{\Pi} \times v_{\Omega} = (1-b, a-1, b-a)$, $(3, 2, -5)$ són linealment dependents.

Aleshores, $\begin{cases} 1-b = 3\alpha \\ a-1 = 2\alpha \\ b-a = 5\alpha \end{cases}$.

Si $3a + 2b = 5$.
El problema té infinites solucions:

$$\begin{cases} a = 2\lambda \\ b = \dfrac{5}{2} - 3\lambda \end{cases}.$$

Per a cada valor λ, per obtenir un punt resoldrem el sistema format per les equacions dels dos plànol:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2\lambda \cdot x + \left(\dfrac{5}{2} - 3\lambda\right)y + z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ (1-2\lambda)x + \left(\dfrac{-3}{2} + 3\lambda\right)y = 1 \end{cases}.$$

Problema B3

La diferencia de potencial x entre dos punts d'un circuit elèctric provoca el pas d'un corrent elèctric d'intensitat y, que està relacionat amb la diferència de potencial x per l'equació $y = -x^2 - x + 6$, sent $0 \le x \le 2$.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:

a) La gràfica de la funció $f(x) = -x^2 - x + 6$ i obteniu, gràficament o analíticament, el valor de la intensitat y quan la diferència de potencial és 0, i el valor de la fiferència de potencial x al qual correspon una intensitat y igual a 0, sent $0 \le x \le 2$.

b) El valor de la diferència de potencial x per al qual és màxim el producte y·x de la intensitat y per la diferència de potencial x, quan $0 \le x \le 2$, i obteniu el valor màxim d'aquest producte y·x, quan $0 \le x \le 2$.

c) L'àrea de la superfície situada en el primer quadrat limitada per la corba $y = f(x)$, l'eix d'abscisses i l'eix d'ordenades.

Solució:

a)

La funció $f(x) = -x^2 - x + 6$, $x \in [0, 2]$ és un tros de paràbola.

$a = -1 < 0$, la paràbola és convexa.

$x = 0$, $f(0) = 6$, $(0, 6)$ és el punt de tall amb l'eix d'ordenades.

6 és el valor de la intensitat quan la diferencial potencial és $x = 0$.

$f(x) = 0$, $-x^2 - x + 6 = 0$. Resolent l'equació:

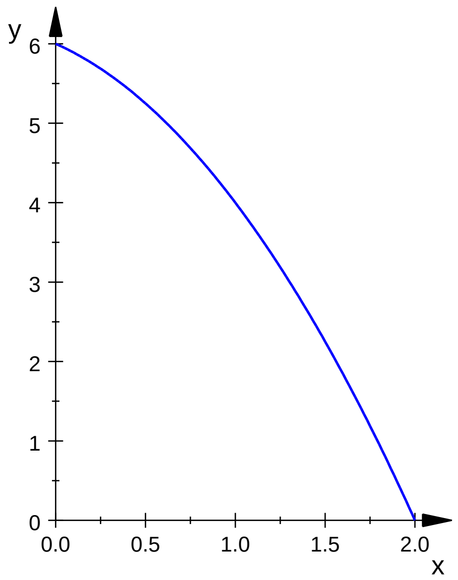
$x = -3, 2$. $(2, 0)$ és el punt de tall de la funció en el seu domini.

2 és la intensitat quan la diferencial potencial és 0.

$x = \frac{-1}{2}$ és l'eix de simetria (no pertany al domini de la funció).

$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{25}{4}$. El vèrtex és $\left(-\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$ (no pertany al domini de la funció)

La gràfica és:



b)

Siga $p(x) = x \cdot y$.

$p(x) = -x^3 - x^2 + 6x$, $0 \le x \le 2$. La funció és contínua i derivable en $x \in [0, 2]$.

$p'(x) = -3x^2 - 2x + 6$.

$p'(x) = 0$, $-3x^2 - 2x + 6 = 0$. Resolent l'equació:

$$x = \frac{-1+\sqrt{19}}{3}, \frac{-1-\sqrt{19}}{3}, \quad x = \frac{-1-\sqrt{19}}{3} \in [0, 2].$$

$$p''(x) = -6x - 2, \; p''\left(\frac{-1+\sqrt{19}}{3}\right) = -2\sqrt{19} > 0.$$

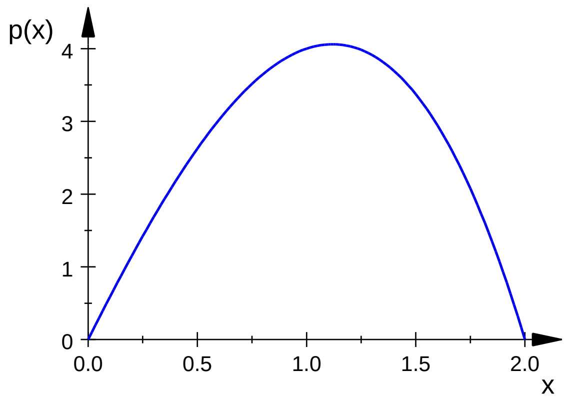
Aleshores, $x = \dfrac{-1+\sqrt{19}}{3}$ és un màxim relatiu de la funció p(x).

$p(0) = 0$.

$p(2) = 0$.

$$p\left(\frac{-1+\sqrt{19}}{3}\right) = -\left(\frac{-1+\sqrt{19}}{3}\right)^3 - \left(\frac{-1+\sqrt{19}}{3}\right)^2 + 6\left(\frac{-1+\sqrt{19}}{3}\right) = \frac{-56+38\sqrt{19}}{27} \approx 4.0607.$$

Aleshores, $x = \dfrac{-1+\sqrt{19}}{3}$ és un màxim absolut de la funció p(x).



c)

La funció $f(x) = -x^2 - x + 6$ té un punt de tall (2, 0) en el primer quadrant.

és definida positiva en $x \in [0, 2]$.

L'àrea que cerquem és: $\int_0^2 f(x)\,dx$.

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \left(-x^2 - x + 6\right)dx = -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 6x\right)\Bigg]_0^2 = \frac{22}{3} - 0 = \frac{22}{3}.$$