Selectivitat juny 2017.

A1

Es dóna el sistema d'equacions $\begin{cases} -x+ay+2z=a \\ 2x+ay-z=2 \\ ax-y+2z=a \end{cases}$, depenent del paràmetre a.

Obteniu raonadament escrivint tots els passos del raonament utilitzat:
a) La solució del sistema quan $a=2$.
b) Els valors del paràmetre a per als quals els sistema és compatible determinat.
c) Els valors del paràmetre a per al qual el sistema és compatible indeterminat, i obteniu totes les solucions del sistema per a aquest valor de a.

A2

Es donen el punt $P(1,1,1)$, la recta $r\equiv\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x+2y-z-1=0 \end{cases}$ i el plànol $\Pi\equiv x+y+z=1$.

Obteniu raonadament escrivint tots els passos del raonament utilitzat:
a) El plànol que conté el punt P i la recta r.
b) La recta s que passa pel punt P i és perpendicular al plànol Π, la distància del punt P al plànol Π i el punt intersecció de la recta s amb el plànol Π.
c) El plànol Φ que conté la recta r i és perpendicular al plànol Π.

A3

Volem unir un punt M, situat en una banda d'un carrer de 6 m d'amplària, amb el punt N, situat a l'altra banda del carrer, 18 m més avall, per mitjà de dos cables rectes, l'un des d'M fins a un punt P situat a l'altra banda del carrer, i l'altre des del punt P fins el punt N. En representar el carrer en un sistema cartesià obtenim $M(0,6)$, $P(x,0)$ i $N(18,0)$. El cable MP ha de ser més gruixut perquè travessa el carrer sense suports intermedis, i té un preu de 10 €/m. El preu del cable PN és de 5 €/m.
Obteniu raonadament escrivint tots els passos del raonament utilitzat:
a) El cost dels dos cables en funció de l'abscissa x del punt P, quan $0\le x\le 18$.
b) El valor d'x , amb $0\le x\le 18$, per al qual el cost total C és mínim.
c) El valor d'aquest cost mínim.

B1

Obteniu raonadament escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) La comprovació que $C^2=2C-I$, en què $C=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ i I és la matriu identitat d'ordre 3×3, i el càlcul de la matriu C^4.
b) El valor del determinant de la matriu $(3A^4)(4A^2)^{-1}$, sabent que A és una matriu quadrada de quatre columnes el determinant de la qual val -1.
c) La matriu B que admet inversa i que verifica la igualtat $BB=B$.

B2

Siga T un tetraedre de vèrtexs $O(0,0,0)$, $A(1,1,1)$, $B(3,0,0)$ i $C(0,3,0)$.

Obteniu raonadament escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) L'equació del plànol Π que conté els punts A, B, C. Les equacions de la recta h_O perpendicular al plànol Π que passa per O.

b) El punt intersecció de la recta altura h_O i el plànol Π.

c) L'àrea de la cara els vèrtexs de la qual són els punts A, B i C i el volum del tetraedre T.

B3

Donada la funció f definida per $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$, per a qualsevol valor real $x \neq 0$, es demana que obtingueu raonadament escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) Els intervals de creixement i de decreixement de la funció f i els extrems relatius de la funció f.

b) Les asímptotes de la corba $y=f(x)$.

c) L'àrea de la regió plana limitada per la corba $y=\frac{x^2+1}{x}$, $1 \leq x \leq e$, els segment que uneix els punts $(0,1)$ $(e,0)$, i les rectes $x=1$ i $x=e$.

A1

Es dóna el sistema d'equacions $\begin{cases} -x+ay+2z=a \\ 2x+ay-z=2 \\ ax-y+2z=a \end{cases}$, depenent del paràmetre a.

Obteniu raonadament escrivint tots els passos del raonament utilitzat:
a) La solució del sistema quan $a=2$.
b) Els valors del paràmetre a per als quals els sistema és compatible determinat.
c) Els valors del paràmetre a per al qual el sistema és compatible indeterminat, i obteniu totes les solucions del sistema per a aquest valor de a.

Solució:
Calculem el determinant de la matriu de coeficients:

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & a & 2 \\ 2 & a & -1 \\ a & -1 & 2 \end{vmatrix}=-3a^2-6a-3.$$

$|A|=0$, $-3a^2-6a-3=0$, $a=-1$.

Considerem el menor de la matriu A $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-3\neq 0$, aleshores, $\text{rang}A\geq 2$.

Si $a=-1$, $\text{rang}A=2$.

Considerem el menor de la matriu ampliada A' format per la 1ª, 2ª i 4ª columna:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0, \text{ aleshores, } \text{rang}A'=2.$$

$\text{rang}A=\text{rang}A'=2<3=\text{núm. incògnites}$.

Aleshores, el sistema és compatible indeterminat.
La tercera equació depén linealment de les altres dues.
El sistema inicial és equivalent al sistema:

$\begin{cases} -x-y+2z=-1 \\ 2x-y-z=2 \end{cases}$. Resolem el sistema pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \underset{E_2\equiv 2E_1+E_2}{\approx} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right).$$

$$\begin{cases} -x-y+2z=-1 \\ y-z=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases}, \quad \lambda\in R.$$

Si $a\neq -1$, $\text{rang}A=3$.

$\text{rang}A=\text{rang}A'=3=\text{núm. incògnites}$. El sistema és compatible determinat.

$a=2$, el sistema és compatible determinat.

$$\begin{cases} -x+2y+2z=2 \\ 2x+2y-z=2 \\ 2x-y+2z=2 \end{cases}. \quad |A|=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-27.$$

Aplicant la regla de Cramer.

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-27} = \dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{-27} = \dfrac{2}{3}. \\ z = \dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-27} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

A2

Es donen el punt $P(1,1,1)$, la recta $r \equiv \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x+2y-z-1=0 \end{cases}$ i el plànol $\Pi \equiv x+y+z=1$.

Obteniu raonadament escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) El plànol que conté el punt P i la recta r.

b) La recta s que passa pel punt P i és perpendicular al plànol Π, la distància del punt P al plànol Π i el punt intersecció de la recta s amb el plànol Π.

c) El plànol Φ que conté la recta r i és perpendicular al plànol Π.

Solució:

Resolem el sistema format per l'equació implícita de la recta r:

$\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x+2y-z-1=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x+y-z=-1 \\ y=2 \end{cases}$, $\begin{cases} x=-3+\alpha \\ y=2 \\ z=\alpha \end{cases}$, un punt de la recta r és $A(-3,2,0)$ i el vector director és $v=(1,0,1)$.

$\overrightarrow{AP}=(4,-1,1)$.

a)

El plànol Ω que conté el punt P i la recta r, passa pel punt P i té direcció $\{v, \overrightarrow{AP}\}$ linealment independents.

$\Omega \equiv (x,y,z)=(1,1,1)+\alpha(1,0,1)+\beta(4,-1,1)$

b)

El vector característic del plànol Π és $a=(1,1,1)$.

La recta s que passa pel punt P i és perpendicular al plànol Π té vector director $a=(1,1,1)$.

$s \equiv (x,y,z)=(1,1,1)+\alpha(1,1,1)$.

La distància del punt P al plànol Π:

$$d(P,\Pi)=\left|\frac{1+1+1-1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}\right|=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}u.$$

Per determinar el punt intersecció de la recta s i el plànol Π resoldrem el sistema format per les seues equacions:

$\Pi \equiv x+y+z=1$. $\alpha+\alpha+\alpha=1$, aleshores, $\alpha=\dfrac{1}{3}$.

Les coordenades del punt intersecció és $Q\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$.

c)

El plànol Φ que conté la recta r i és perpendicular al plànol Π passa pel punt A i té direcció $\{v, a\}$ linealment independents.

$\Phi \equiv (x,y,z)=(-3,2,0)+\alpha(1,0,1)+\beta(1,1,1)$.

A3

Volem unir un punt M, situat en una banda d'un carrer de 6 m d'amplària, amb el punt N, situat a l'altra banda del carrer, 18 m més avall, per mitjà de dos cables rectes, l'un des d'M fins a un punt P situat a l'altra banda del carrer, i l'altre des del punt P fins el punt N. En representar el carrer en un sistema cartesià obtenim $M(0, 6)$, $P(x, 0)$ i $N(18, 0)$. El cable MP ha de ser més gruixut perquè travessa el carrer sense suports intermedis, i té un preu de 10 €/m. El preu del cable PN és de 5 €/m.

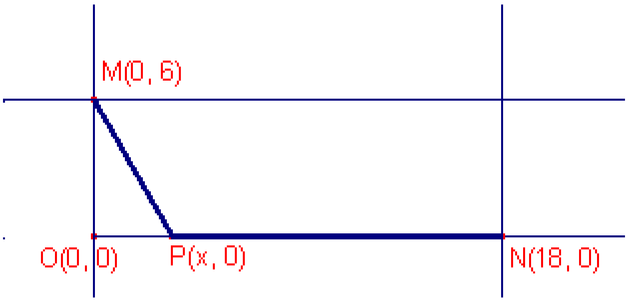
Obteniu raonadament escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) El cost dels dos cables en funció de l'abscissa x del punt P, quan $0 \le x \le 18$.

b) El valor d'x , amb $0 \le x \le 18$, per al qual el cost total C és mínim.

c) El valor d'aquest cost mínim.

Solució:



$\overline{OP} = x$, $\overline{OM} = 6$. Aplicant el teorema de Pitàgores al triangle rectangle $\overset{\Delta}{OPM}$:

$\overline{PM} = \sqrt{36 + x^2}$.

$\overline{PN} = 18 - x$.

La funció cost és:

$C(x) = 10\sqrt{36 + x^2} + 5(18 - x)$, $0 \le x \le 18$.

Derivant la funció:

$$C'(x) = \frac{10x}{\sqrt{36 + x^2}} - 5$$

$$C'(x) = 0, \ \frac{10x}{\sqrt{36 + x^2}} = 5 .$$

Resolent l'equació:

$x = \sqrt{12} \in [0, 18]$.

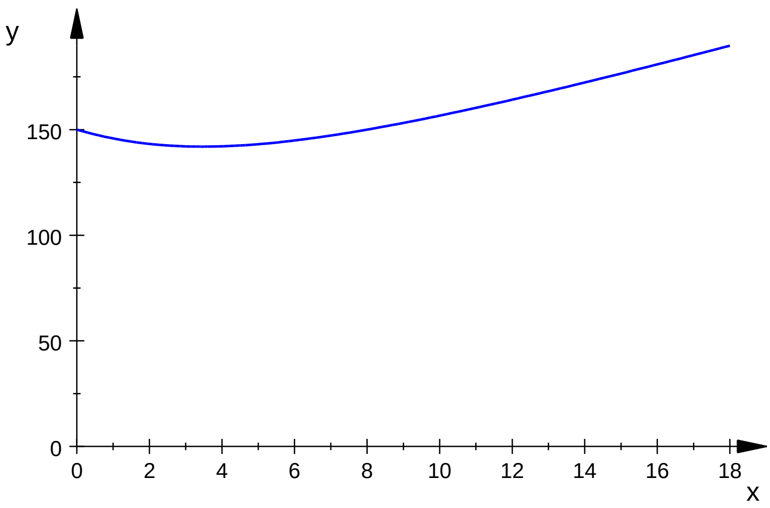
Estudiant el signe de la primera derivada:

$C'(x) < 0$ quan $]0, \sqrt{12}[$, $C'(x) < 0$ quan , $]\sqrt{12}, 18[$.

$x = \sqrt{12}$ és un mínim relatiu de la funció.

El cost mínim és:

$C(\sqrt{12}) = 10\sqrt{48} + 5(18 - \sqrt{12}) = 63\sqrt{3} + 90 \approx 204.32€$.



B1

Obteniu raonadament escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) La comprovació que $C^2 = 2C - I$, en què $C = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ i I és la matriu identitat d'ordre 3×3, i el càlcul de la matriu C^4.

b) El valor del determinant de la matriu $(3A^4)(4A^2)^{-1}$, sabent que A és una matriu quadrada de quatre columnes el determinant de la qual val -1.

c) La matriu B que admet inversa i que verifica la igualtat $BB = B$.

Solució:

a)

$$C^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$2C = 2\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

b).

$\det(MN) = \det(M) \cdot \det(N)$.

$\det(\alpha M) = \alpha^4 \det(M)$.

$\det(M^{-1}) = \dfrac{1}{\det(M)}$.

$$\left|(3A^4)(4A^2)^{-1}\right| = (3^4|A|^4)\frac{1}{4^4|A|^2} = 3^4(-1)^4\frac{1}{4^4(-1)^2} = \left(\frac{3}{4}\right)^4.$$

c)

B té inversa si i només si $|B| \neq 0$, $B^{-1}B = I$.

Si $BB = B$,

$B^{-1}BB = B^{-1}B$.

$IB = I$.

$B = I$, matriu identitat.

B2

Siga T un tetraedre de vèrtexs $O(0,0,0)$, $A(1,1,1)$, $B(3,0,0)$ i $C(0,3,0)$.

Obteniu raonadament escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

a) L'equació del plànol Π que conté els punts A, B, C. Les equacions de la recta h_O perpendicular al plànol Π que passa per O.

b) El punt intersecció de la recta altura h_O i el plànol Π.

c) L'àrea de la cara els vèrtexs de la qual són els punts A, B i C i el volum del tetraedre T..

Solució:

$\overrightarrow{AB} = (2,-1,-1)$.

$\overrightarrow{AC} = (-1,2,-1)$.

a)

L'equació del plànol Π que conté els punts A, B, C passa pel punt A té direcció $\left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right\}$ linealment independents.

$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$. Simplificant:

$\Pi \equiv x + y + z - 3 = 0$.

El vector característic de Π és $a = (1,1,1)$.

L'equació de la recta h_O perpendicular al plànol Π que passa per O, té vector director $a = (1,1,1)$:

$h_O \equiv (x, y, z) = (0,0,0) + \alpha(1,1,1)$.

b)

Per determinar el punt intersecció de la recta altura h_O i el plànol Π resoldrem el sistema format per les seues equacions:

$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ (x, y, z) = (\alpha, \alpha, \alpha) \end{cases}$, $\alpha + \alpha + \alpha - 3 = 0$, $\alpha = 1$.

La intersecció és el mateix punt $A(1,1,1)$.

c)

L'àrea del triangle $\overset{\Delta}{ABC}$ és: $S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\|$.

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3i + 3j + 3k = (3,3,3)$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}3\sqrt{3}\ u^2$.

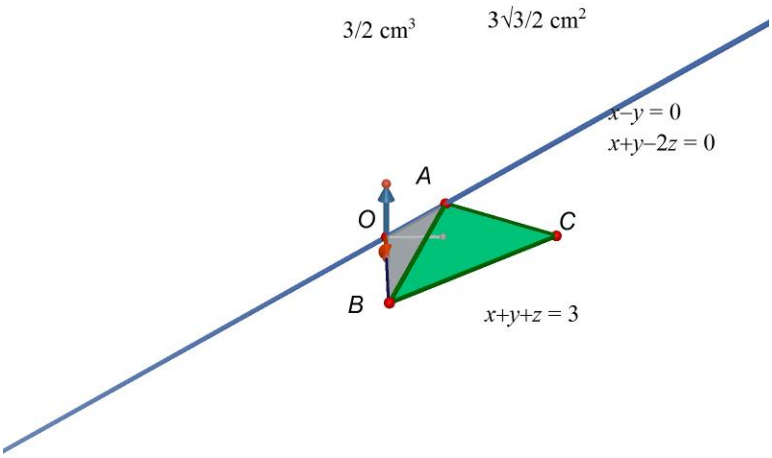
L'altura del tetraedre T sobre la base $\overset{\Delta}{ABC}$ és $h = \overline{OA}$.

$\overrightarrow{OA} = (1,1,1)$.

$h = \left\|\overrightarrow{OA}\right\| = \sqrt{3}$.

El volum del tetraedre T és:

$V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot h = \frac{1}{3}\frac{3}{2}\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2}u^3$.


3/2 cm3
3√3/2 cm2
x−y = 0
x+y−2z = 0
A
O
C
B
x+y+z = 3

B3

Donada la funció f definida per $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$, per a qualsevol valor real $x\neq 0$, es demana que obtingueu raonadament escrivint tots els passos del raonament utilitzat:

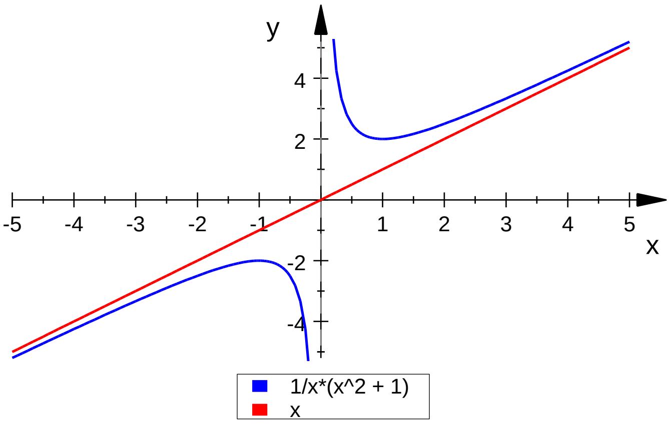
a) Els intervals de creixement i de decreixement de la funció f i els extrems relatius de la funció f.

b) Les asímptotes de la corba $y=f(x)$.

c) L'àrea de la regió plana limitada per la corba $y=\dfrac{x^2+1}{x}$, $1\le x\le e$, els segment que uneix els punts $(0,1)$ $(e,0)$, i les rectes $x=1$ i $x=e$.

Solució:

$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}=x+\dfrac{1}{x}$.



$f'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$.

$f'(x)=0$, quan $x=-1,1$.

$f'(x)>0$, $1-\dfrac{1}{x^2}>0$. Resolent l'equació:

La funció és monòtona estrictament creixent quan

La funció és monòtona estrictament decreixent qu

$f''(x)=\dfrac{2}{x^3}$.

$f''(-1)<0$, aleshores, $x=-1$ és un màxim relatiu estricte.

$f''(1)>0$, aleshores, $x=1$ és un mínim relatiu estricte.

b)

$x=0$ és una asímptota vectorial ja que anul·la el denominador i no anul·la en numerador de la funció.

Té una asímptota obliqua ja el grau del numerador és 1 més gran que el grau del denominador.

$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}=x+\dfrac{1}{x}$.

Aleshores, $y=x$ és una asímptota obliqua.

c)

La funció $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}=x+\dfrac{1}{x}$ és positiva i creixent quan $1\le x\le e$.

La recta que passa els punts $(0,1)$ $(e,0)$, té equació:

$$y=\frac{-1}{e}x+1$$

L'àrea de la regió plana limitada és:

$$\int_1^e\left(x+\frac{1}{x}-\left(\frac{-1}{e}x+1\right)\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+\ln|x|+\frac{1}{2e}x^2-x\right)\Bigg]_1^e=\frac{e^2-e-e^{-1}+3}{2}u^2\approx 3.65u^2$$