Pau juliol 2018

A1

Siga el sistema d'equacions $\begin{cases} x+y=1 \\ (a-1)y+z=0 \\ x+ay+(a-1)z=a \end{cases}$, o a és un paràmetre real, obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:

a) Els valors del paràmetre a per als quals el sistema és compatible.
b) Les solucions del sistema quan $a=1$.
c) La solució del sistema quan $a=0$.

A2

Siguen el plànol $\Pi \equiv x-y+z-3=0$, la recta $s \equiv \begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$ i el punt $A(1,1,1)$.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:

a) Recta que passa per A, talla la recta s i és paral·lela al plànol Π.
b) Plànol que passa per A, és perpendicular al plànol Π i paral·lel a la recta s.
c) Discutiu si el punt $(3,2,1)$ està en la recta paral·lela a s que passa per $(5,3,1)$.

A3

Considerem la funció $f(x)=ax^3+bx^2+cx\cos(\pi x)$, que depén dels paràmetres a, b, c.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:

a) La relació entre els coeficients a, b i c sabent que f(x) pren el valor 22 quan $x=1$.
b) La relació que han de verificar els coeficients a, b i c perquè siga horitzontal la tangent a la corba $y=f(x)$ en el punt P d'aquesta corba, sabent que l'abscissa del punt P és $x=1$.
c) $\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx$.

B1

Resoleu els següents apartats, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:

a) Donades A i B matrius quadrades del mateix ordre tals que $AB=A$ i $BA=B$, deduïu que $A^2=A$, $B^2=B$.
b) Donada la matriu $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, es demana trobar els paràmetres a, b, perquè la matriu $B=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ complesca que $B^2=B$ però $AB\neq A$ i $BA\neq B$.
c) Sabent que $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix}=3$, obteniu raonadament el valor dels determinants:

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

B2

Donada la recta $r \equiv \begin{cases} x + y = 3 \\ x + 4y - z = 8 \end{cases}$ es demana obtenir raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:

a) Les equacions paramètriques de la recta r.

b) L'equació del plànol Π que és paral·lel a la recta r i passa pels punts $(5, 0, 1)$ i $(4, 1, 0)$.

c) La distància entre la recta r i el plànol Π obtingut a l'apartat anterior.

B3

Dins d'una cartolina rectangular es desitja fer un dibuix que ocupe un rectangle R de $600\ \text{cm}^2$ d'àrea de manera que:

Per damunt i per sota de R han de quedar uns marges de 3 cm d'altura cadascun. Els marges a esquerra i a dreta de R han de tenir una amplària de 2 cm cadascun.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:

a) L'àrea de la cartolina en funció de la base x del rectangle R.

b) El valor de x per al qual l'àrea de la cartolina és mínima.

c) Les dimensions de dita cartolina d'àrea mínima.

A1

Siga el sistema d'equacions $\begin{cases} x+y=1 \\ (a-1)y+z=0 \\ x+ay+(a-1)z=a \end{cases}$, o a és un paràmetre real, obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:

a) Els valors del paràmetre a per als quals el sistema és compatible.
b) Les solucions del sistema quan $a=1$.
c) La solució del sistema quan $a=0$.

Solució:
a)

Siguen $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{pmatrix}$ la matriu de coeficients, $A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 1 & a & a-1 & a \end{pmatrix}$ matriu ampliada.

$|A|=a^2-3a+2$.

$|A|=0$ si $a=1,2$.

Si $a\neq 1,2$, $\text{rang}A=\text{rang}A'=\text{núm. incog.}=3$, el sistema és compatible determinat.

Si $a=1$, $\text{rang}A<3$.

Si considerem el menor format per 1ª i 2ª fila i 2ª i 3ª columna $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$.

Aleshores, $\text{rang}A\geq 2$.

Per tant, $\text{rang}A=2$.

Per calcular el rang de la matriu ampliada, calculem el determinant format per la 2ª, 3ª i 4ª columna de la matriu ampliada:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$, aleshores, $\text{rang}A'=2$.

$\text{rang}A=\text{rang}A'=2<\text{núm. incògnites}=3$.

El sistema és compatible indeterminat.

Si $a=2$, $\text{rang}A<3$.

Si considerem el menor format per 1ª i 2ª fila i 2ª i 3ª columna $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0$.

Aleshores, $\text{rang}A\geq 2$.

Per tant, $\text{rang}A=2$.

Per calcular el rang de la matriu ampliada, calculem el determinant format per la 2ª, 3ª i 4ª columna de la matriu ampliada:

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=1\neq 0$, aleshores, $\text{rang}A'=3$.

$\text{rang}A\neq\text{rang}A'$, el sistema és incompatible.

b)
Si $a=1$ el sistema és compatible indeterminat.
La tercera equació depén de les dues anteriors.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ z=0 \end{cases}$$

. La solució del sistema és:

$$\begin{cases} x=1-\mu \\ y=\mu \\ z=0 \end{cases}.$$

c)
Si $a=0$ el sistema és compatible determinat.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ -y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}.\quad |A|=2.$$

La solució del sistema és:

$$\begin{cases} x=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2}=\dfrac{1}{2} \\ y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{2}=\dfrac{1}{2} \\ z=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{2}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

A2

Siguen el plànol $\Pi \equiv x-y+z-3=0$, la recta $s \equiv \begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$ i el punt $A(1,1,1)$.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:
a) Recta que passa per A, talla la recta s i és paral·lela al plànol Π.
b) Plànol que passa per A, és perpendicular al plànol Π i paral·lel a la recta s.
c) Discutiu si el punt $(3, 2, 1)$ està en la recta paral·lela a s que passa per $(5, 3, 1)$.

Solució:
a)
El vector característic del plànol Π és $a=(1,-1,1)$.
Passem l'equació de la recta s a la forma cartesiana:

$s \equiv \begin{cases} x=2\alpha \\ y=\alpha \\ z=0 \end{cases}$. Un punt qualsevol de la recta s és $P(2\alpha, \alpha, 0)$.

a)
El vector director de la recta r que cerquem és $\overrightarrow{AP}=(2\alpha-1, \alpha-1, -1)$.
La recta r ha de ser paral·lela al plànol Π, aleshores, el vector director de la recta és ortogonal al vector característic del plànol.
$\overrightarrow{AP}\cdot a=0$
$(2\alpha-1)\cdot 1+(\alpha-1)(-1)+(-1)\cdot 1=0$. Resolent l'equació:
$\alpha=1$. Aleshores, $\overrightarrow{AP}=(1, 0, -1)$.
L'equació vectorial de la recta r és:
$r \equiv (x, y, z)=(1,1,1)+\mu(1, 0, 0)$.
b)
El vector director de la recta s és $v=(2,1,0)$.
El vector director de la recta s és un dels vectors directors del plànol.
Com el plànol que cerquem ha de ser perpendicular al plànol Π, el vector característic de Π és un dels vectors directors del plànol
Els vectors v, a són linealment independents.

El plànol Ω que cerquem passa pel punt A i té direcció els vectors $\{v, a\}$ La seua equació vectorial és:
$\Omega \equiv (x, y, z)=(1,1,1)+\alpha(2,1,0)+\beta(1,-1,1)$.
c)
La recta paral·lela a s té vector director $v=(2,1,0)$.
Si el punt $B(3, 2, 1)$ pertany a la recta paral·lela a s que passa pel punt $C(5, 3, 1)$, els vectors $\{\overrightarrow{BC}, v\}$ han de ser linealment dependents.
$\overrightarrow{BC}=(2,1,0)$.
$\overrightarrow{BC}=v$.
Aleshores, si el punt $(3, 2, 1)$ està en la recta paral·lela a s que passa per $(5, 3, 1)$.

A3

Considerem la funció $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx\cos(\pi x)$, que depén dels paràmetres a, b, c.
Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:
a) La relació entre els coeficients a, b i c sabent que f(x) pren el valor 22 quan $x = 1$.
b) La relació que han de verificar els coeficients a, b i c perquè siga horitzontal la tangent a la corba $y = f(x)$ en el punt P d'aquesta corba, sabent que l'abscissa del punt P és $x = 1$.
c) $\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx$.

Solució:
a)
$f(1) = 22$.
$a + b + c\cdot\cos(\pi) = 22$.
$a + b - c = 22$.
b)
El pendent de la recta tangent ($f'(1)$) és 0.

$$\begin{cases} f(1) = 22 \\ f'(1) = 0 \end{cases}.$$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c\cdot\cos(\pi x) - \pi cx\cdot\sin(\pi x)$.
$f'(1) = 0$.
$3a + 2b - c = 0$.
Els coeficients a, b i c han de complir:

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ 3a + 2b - c = 0 \end{cases}.$$

c)
Integrant per parts:
$u = x$, $du = dx$.
$dv = \cos(\pi x)$, $v = \frac{1}{\pi}\sin(\pi x)$.

$$\int x\cdot\cos(\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi}x\cdot\sin(\pi x) - \frac{1}{\pi}\int\sin(\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi}x\cdot\sin(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x) + C.$$

$$\int_0^1 x\cdot\cos(\pi x)\,dx = \left.\frac{1}{\pi}x\cdot\sin(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x)\right]_0^1 = \frac{-2}{\pi^2}.$$

B1
Resoleu els següents apartats, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:
a) Donades A i B matrius quadrades del mateix ordre tals que $AB = A$ i $BA = B$, deduïu que $A^2 = A$, $B^2 = B$.
b) Donada la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, es demana trobar els paràmetres a, b, perquè la matriu $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$ complesca que $B^2 = B$ però $AB \neq A$ i $BA \neq B$.
c) Sabent que $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$, obteniu raonadament el valor dels determinants:

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Solució:
a)
$AB = A$.
$B(AB) = BA$.
$(BA)B = BA$.
$B^2 = B$.
Anàlogament:
$BA = B$.
$A(BA) = AB$.
$(AB)A = AB$.
$A^2 = A$.
b)
$$B^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a+b & b^2 \end{pmatrix}.$$
$B^2 = B$
$$\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a+b & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$
$$\begin{cases} a^2 = a \\ b^2 = b \\ a+b = 1 \end{cases}$$. Resolent el sistema:

$\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$, o bé $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \end{cases}$.

Si $\begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases}$, aleshores, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq B$$
$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq A.$$

Si $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$BA=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=B$.

Aleshores, els únics paràmetres que compleixen la condició són $\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$.

c)

$$\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} 2\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 = 6.$$

(1) La primera columna està multiplicada per 2.

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} 3+0=3$$

(2) Descomposició d’un determinant com suma de dos determinants.
(3) El determinant és zero ja que la primera columna és suma de les altres.

B2

Donada la recta $r \equiv \begin{cases} x+y=3 \\ x+4y-z=8 \end{cases}$ es demana obtenir raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:

a) Les equacions paramètriques de la recta r.

b) L'equació del plànol Π que és paral·lel a la recta r i passa pels punts $(5, 0, 1)$ i $(4, 1, 0)$.

c) La distància entre la recta r i el plànol Π obtingut a l'apartat anterior.

Solució:

a)

Per determinar les equacions paramètriques resoldrem el sistema.

$$\begin{cases} x+y=3 \\ x+4y-z=8 \end{cases} \underset{E_3=-E_1+E_2}{\equiv} \begin{cases} x+y=3 \\ 3y-z=5 \end{cases}.$$

La solució del sistema (equacions paramàtriques) és:

$r \equiv \begin{cases} x=3-\alpha \\ y=\alpha \\ z=-5+3\alpha \end{cases}$, el punt de la recta és $P(3, 0, -5)$, el vector director és $v=(-1, 1, 3)$.

b)

Siguen $A(5, 0, 1)$ i $B(4, 1, 0)$.

El plànol Π que és paral·lel a la recta r i passa pels punts A i B, passa pel punt A i té vectors directors $v=(-1, 1, 3)$ i $\overrightarrow{AB}=(-1, 1, -1)$.

Notem que els vectors directors són linealment independents.

L'equació general del plànol Π és:

$\Pi \equiv \begin{vmatrix} x-5 & y & z-1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Simplificant:

$\Pi \equiv x+y-5=0$.

c)

La recta r és paral·lela al plànol Π. La distància entre la recta i el plànol és igual a la distància d'un punt de la recta al plànol:

$$d(r, \Pi) = d(P, \Pi) = \left| \frac{3+0-5}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} \right| = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

B3

Dins d'una cartolina rectangular es desitja fer un dibuix que ocupe un rectangle R de $600\ \text{cm}^2$ d'àrea de manera que:

Per damunt i per sota de R han de quedar uns marges de 3 cm d'altura cadascun. Els marges a esquerra i a dreta de R han de tenir una amplària de 2 cm cadascun.

Obteniu raonadament, escrivint tots els passos de raonament utilitzat:

a) L'àrea de la cartolina en funció de la base x del rectangle R.

b) El valor de x per al qual l'àrea de la cartolina és mínima.

c) Les dimensions de dita cartolina d'àrea mínima.

Solució:

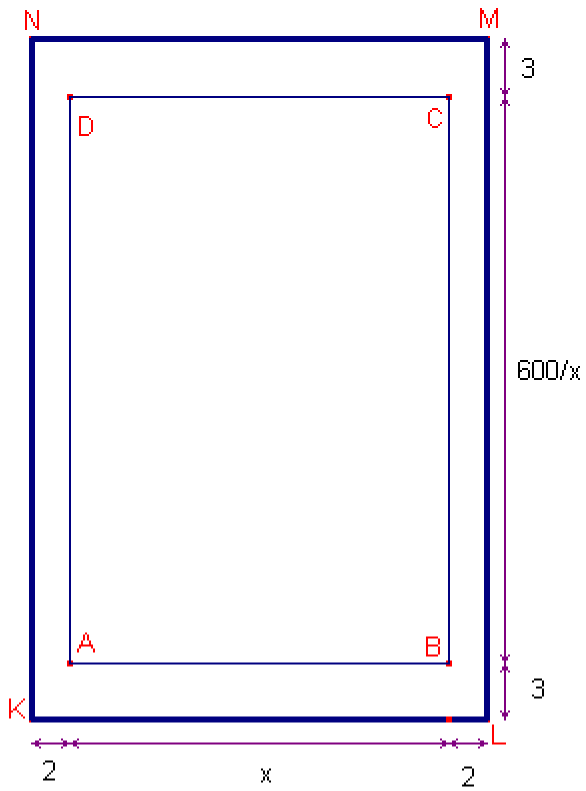
Siga el rectangle R de vèrtexs ABCD.

Siga $x = \overline{AB}$.

Com l'àrea del rectangle R és $600\ \text{cm}^2$, aleshores, $\overline{BD} = \dfrac{600}{x}$.

Siga la cartolina de vèrtexs KLMN.

$\overline{KL} = x + 4$, $\overline{LM} = \dfrac{600}{x} + 6$.



a)

L'àrea de la cartolina és:

$$S(x) = (x+4)\left(\frac{600}{x} + 6\right).$$

$$S(x) = 624 + 6x + \frac{2400}{x}, \quad x \geq 0.$$

b)

Calculem la derivada de la funció àrea.

$$S'(x) = 6 - \frac{2400}{x^2}.$$

$$S'(x) = 0.$$

$6 - \dfrac{2400}{x^2} = 0$. Resolent l'equació:

$x = 20$.

Calculem la segona derivada

$$S''(x) = \frac{4800}{x^3}.$$

$$S''(20) = \frac{4800}{20^3} > 0.$$

Aleshores, el mínim de l'àrea s'assoleix quan $x = 20$.

c)

Les dimensions de la cartolina d'àrea mínima són:

$\overline{KL} = 20 + 4 = 24$ cm, $\overline{LM} = \dfrac{600}{20} + 6 = 36$ cm.